إصدارات موهبة العلمية ١١

تطوُّر الإبداع والموهبة والنبوغ في الرياضيات

هاراث سريرامان

نقله إلى العربية

د. صالح علي أبو جادو





مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع
King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

تقديم

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع (موهبة)

انطلاقاً من الخطة الإستراتيجية للموهبة والإبداع التي طورتها مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع (موهبة) والتي أقرها خادم الحرمين الشريفين الملك عبدالله بن عبد العزيز –حفظه الله–، حرصت (موهبة) على نشر ثقافة الموهبة والإبداع من خلال مبادرات ومشاريع عديدة.

وقد حرصت (موهبة) على أن تبنى ممارسات وتطبيقات تربية وتعليم الموهوبين في المملكة العربية السعودية والوطن العربي على أسس معرفية وعلمية رصينة، ترتكز على أفضل الممارسات العالمية، وأحدث نتائج البحوث والدراسات في مجال الموهبة والإبداع.

وعلى الرغم من التراكم المعرفي الكبير في مجال تربية الموهوبين الذي تمتد جذوره لأكثر من نصف قرن، فإن حركة التأليف على المستوى العربي ظلت بطيئة، ولا تواكب التطور المعرفي المتسارع في مجال تربية الموهوبين. وقد جاءت فكرة ترجمة سلسلة مختارة من أفضل الإنتاج العلمي في مجال الموهبة والإبداع للإسهام في إمداد المكتبة العربية، ومن ورائها المربين والباحثين والممارسين في مجال الموهبة، بمصادر حديثة و أصيلة للمعرفة، يُعتدُّ بقيمتها، وموثوق بها، شارك في تأليفها نخبة من رواد مجال تربية الموهوبين في العالم. وقد حرصت موهبة على أن تغطي هذه الكتب مجالات واسعة ومتنوعة في مجال تربية الموهوبين، بحيث يستفيد منها قطاع عريض من المستفيدين. وقد تناولت هذه الإصدارات عدداً من القضايا المتنوعة المرتبطة بمفاهيم ونماذج الموهبة، وقضايا الإبداع المختلفة، والتعرف على الموهوبين، وكيفية تصميم البرامج وتنفيذها وتقويمها،

والنماذج التدريسية المستخدمة في تعليم الموهوبين، والخدمات النفسية والإرشادية، وغير ذلك من القضايا ذات العلاقة.

وقد اختارت (موهبة) شركة العبيكان للنشر للتعاون معها في تنفيذ مشروع (إصدارات موهبة العلمية) لما عرف عنها من خبرة طويلة في مجال الترجمة والنشر، ولما تتميز به إصداراتها من جودة وتدقيق وإتقان. وقد قام على ترجمة ومراجعة هذه الكتب فريق متميز من المتخصصين،كما قام فريق من خبراء موهبة بالتأكد من جودة تلك الإصدارات.

وتأمل (موهبة) في أن تسهم هذه الإصدارات من الكتب في دعم نشر ثقافة الموهبة والإبداع، وفي تلبية حاجة المكتبة العربية إلى أدلة مرجعية موثوقة في مجال تعليم الموهوبين، تسهم في تعزيز الفهم السليم للموهبة والإبداع لدى المربين والباحثين، وفي تطوير ممارساتهم العملية في مجال تربية الموهوبين، بما يسهم في بناء منظومة تربوية فاعلة، تدعم التحول إلى مجتمع المعرفة وتحقيق التنمية المستدامة، في ظل قيادة حكيمة رشيدة، ووطن غال.

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع (موهبة)

*****

تطوّر الإبداع والموهبة والنبوغ في الرياضيات

سلسلة بحوث متخصصة في تدريس الرياضيات

بهارات سريرامان

Bharath Sriraman

جامعة مونتانا

نقله إلى العربية

د. صالح علي أبو جادو

مراجعة

د. داود سليمان القرنة



مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity



Original Title
Creativity, Giftedness and Talent Development in Mathematics
(PB) (Montana Mathematics Enthusiast)
Author: Bharath Sriraman

ISBN-13: 978-1-59311-977-5

Published by IAP- Information Age Publishing, Inc. PO Box 79049, Charlotte, NC 28271, (U.S.A)

ح مكتبة العبيكان، 1435هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سريرامان، بهارات

تطوّر الإبداع والموهبة والنبوغ في الرياضيات./ بهارات سريرامان؛ صالح أبو جادو.- الرياض 1435هـ

416 ص؛ 16.5×24 سم

ردمك: 0 - 603 - 503 - 603 - 978

1 – الرياضيات – طرق التدريس 2 – الإبداع

أ- أبو جادو، صالح (مترجم) ب – العنوان

ديوي: 510.713 رقم الإيداع: 727 / 1435

الطبعة العربية الأولى 1435هـ - 2014م

تم إصدار هذا الكتاب ضمن مشروع النشر المشترك بين

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع وشركة العبيكان للتعليم

الناشر العبيكان Obeikan للنشر

المملكة العربية السعودية – الرياض – المحمدية – طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول

هاتف: 4808654 فاكس: 4808095 ص.ب: 67622 الرياض 11517

موقعنا على الإنترنت

www.obeikanpublishing.com

متجر العبيكان Obeikan على أبل

http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

امتياز التوزيع شركة مكتبة العبيكان Obeikan

المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية - طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول

هاتف: 4808654 – فاكس: 4889023 ص. ب: 62807 الرياض 11595

قائمة المحتويات

تمهيد

حمّى الرياضيات في مونتانا

بحث علمي في:

تطوير الإبداع والموهبة والتفوق في الرياضيات

بهارات سريرامان

تكمـن روح الإبداع والابتـكار وراء عوامل الراحة والأمان في المجتمع المعاصر المتطور تقنيّاً. ويؤدي العلماء والمخترعون والمستثمرون والفنانون والقادة دوراً حيويّاً في تقدم المعرفة ونقلهـا. وتؤدي الرياضيات على وجه الخصوص دوراً محوريّاً في كثير من المهن، وكانت على مـر العصـور الحارس الأمامي لكثير مـن مجالات الدراسة الأخرى، لا سيمـا العلوم الصعبة كالهندسة والأعمال. وتعد الرياضيات أيضاً مكوناً أساسيّاً في الاختبارات المقننة في الولايات المتحدة، واختبارات القبول في الجامعات في أنحاء كثيرة من العالم.

وغالباً ما يكون الإبداع والتخيل واضحين عندما يبدأ الأطفال الصغار بتطوير المفاهيم الرقمية والمكانية، وسبر غور الواجبات الرياضية التي تستحوذ على اهتمامهم. ويعد الإبداع أيضاً مكوّناً أساسيّاً في عمل علماء الرياضيات المبدعين. وعلى الرغم من ذلك، فإن الجزء الأكبر من التفكير الرياضي الذي يلقى التشجيع في الأوضاع المدرسية المؤسساتية، ينصب علـى الحفظ والتذكر والتمكن من كثير مـن المهارات لحل مشكلات بعينها تحددها المناهج المدرسية، أو تتضمنها الاختبارات المقننة. بدأت مغامراتي في الإبداع والموهبة عندما كنت منسقاً لمدراس المنطقة لبرنامج الموهوبين للمدارس الحكومية في منطقة إلينوي (Illinois). وكان يشـرف على تدريبي في تلك الأثناء البروفيسـور روبرت ويلر (Robert Wheeler) من جامعة إلينوي الشمالية، والذي شاركني في الاهتمام بمجال الإبداع. وتجدر الإشارة هنا إلى أن كثيراً من الندوات أتاحت لنا الاطلاع على كتابات كثيرة في أدب الإبداع، وقد رغبت شخصيّاً في

اختبار ما تراكم لديّ من معرفة تجريبيّاً في غرفة الصف. وقد جربت في المدارس الحكومية كثيراً من الأمور المبتكرة، مثل: دمج العلوم والفلسفة والأدب في الرياضيات، وأجريت تجارب تعليمية على مشكلات متماثلة من حيث البنية والتركيب، وكذلك دراسة هل يستطيع الطلاّب التوصل إلى تعميمات من خلال هذه العملية، إضافة إلى الدراسة الموجهة لإثبات رؤى علماء الرياضيات والطلاّب النابغين، وكذلك طبيعة الإبداع في الرياضيات. تستند كثير من الفصول في هذا الكتاب إلى المقالات المنشورة من خلال مراجعات الأقران الناقدة المنبثقة من هذه الدراسات. وإنني حظيت أيضاً بدعم هاري أدريان (Harry Adrian)، وهو مدرس فلسفة وصاحب أفكار عظيمة، أعانني على تعلم المجالات العملية لاستخدام برنامج عملي للموهوبين في المدارس الحكومية. وقد تطورت اهتماماتي العلمية في هذا المجال أيضاً نتيجة لقائي مصادفة باولا أولزويسكي–كولبيليس (Paula Olszweski–Kulbilius) في مؤتمر النابغين في ولاية إلينوي عام 2000. وقد شجعتني باولا على قراءة البحوث في المجلات العلمية، ونشر ما أتوصل إليه من نتائج بحوثي في المجلات المختصة بتعليم النابغين.

من الصعوبة أن تصدق أنه بعد مضي ثماني سنوات، بُدئ باقتباس كثير من البحوث التي نشرتها والاستشهاد بها على نطاق واسع، إضافة إلى انتشارها وتطبيق العلماء لها في البلدان الأخرى. إذ يُعد الفصل الذي كتبه سوباترا باتيفيزان (Supattra Pativisan) الذي يناقش قدرات حل المشكلات لدى الطلاّب التايلانديين النابغين (الفصل الثامن)، توسعاً واستقصاءً أكثر تفصيلاً للأفكار التي يتضمنها الفصل الثاني بعنوان (**التفوق في الرياضيات وحل المشكلات والقدرة على صياغة التعميمات**). وعلى نحوٍ مماثل، يعد الفصل الحادي عشر الذي كتبه يم وسونج وكيم (Yim, Song, and Kim) **عن إعادة نظر طلاب المرحلة الابتدائية الكوريين النابغين في الرياضيات لنظرية أويلر** (*Euler's polyhedron theorem*) للشكل متعدد الوجوه، مثل دراسة فرضيتي (الجريئة) عن إمكانية تطبيق منهجية لاكاتوسيان (Lakatosian) في غرفة الصف (في الفصل العاشر)، استناداً إلى ما توصلت إليه من دراساتي في غرفة الصف.

وتحتــوي الدراســة أيضاً علــى فصول من تأليـف فكتور فريمــان (Viktor Freiman) وإليكسانــدر كارب (Alexandar Karp)، وهما عالمان مطلعـان على أنماط تطوير الموهبة التي كانت تستخدم في الاتحاد السوفييتي سابقاً. وإضافة إلى ذلك، تقدم الفصول التي كتبها كل من سيلفيا بلغر (Sylvia Bulgar) وألان زولمان (Alan Zollman) ولندا شيفيلد (Linda Sheffield) مناقشــة تكميليــة للأمور المحيطة بتربية النابغين فــي الرياضيات في الولايات المتحدة. ومن شأن تعدد وجهات النظر المعروضة في الفصول، والاختلاف الجغرافي لأصول المؤلفين، أن يجعل من هذه الدراسة دراسة عالمية على نطاق واسع.

ونظراً إلى النقص في وجهات النظر القائمة على البحوث المتعلقة بتطوير الموهبة في تدريس الرياضيات، فإن هذه الدراسة قد تركزت بوجه خاص على الإسهامات في مجال بناء الإبـداع والتفوق في الرياضيات. وتقـدم هذه الدراسة وجهات نظر جديـدة لتطوير الموهبة فــي دروس الرياضيــات، وتقدم أيضاً رؤىً عن علم نفس الإبــداع والنبوغ. وهذا الكتاب موجه للمعلمين في الغرف الصفية، ومنسقي برامج النابغين، ومدربي المسابقات الرياضية، وطلاّب الدراسات العليا، والباحثين المهتمين بالإبداع والموهبة، وتطوير المواهب في الرياضيات.

سمات الإبداع في الرياضيات

بهارات سريرامان

ملخص

يُعدُّ الإبداع في الرياضيات كفيلاً بتطور الرياضيات كلها. وأيّاً كان مصدر هذا النمو، فإن إبداع علماء الرياضيات ما زال حتى الآن مجالاً غير مكتشف إلى حدٍّ ما سواء في الرياضيات نفسها أم في تدريسها. وقد أُجريت دراسة نوعية شملت خمسة من علماء الرياضيات المبدعين؛ من أجل التوصل إلى معرفة كيف يبدعون في الرياضيات. وقد تُرك علماء الرياضيات في هذه الدراسة يتأملون عمليات التفكير المتصلة بابتكار الرياضيات. واستُخدم الاستقراء التحليلي (Analytic Induction) في تحليل البيانات النوعية في مخطوطات المقابلات، إضافة إلى تحقق الفرضيات المحرِّكة للنظرية. وتشير النتائج عموماً إلى أن عملية إبداع علماء الرياضيات اتبعت نموذج الجشتالت (Gestalt Model) الذي يتكون من أربع مراحل متمثلة في: الإعداد، الحضانة، الإشراق، والتحقق. وتبين أيضاً أن التفاعل الاجتماعي والتخيل والاستدلال والحدس والبرهان سمات مشتركة للإبداع في الرياضيات. وإضافة إلى ذلك، روجعت نماذج معاصرة للإبداع من علم النفس استخدمت في تفسير سمات الإبداع في الرياضيات (Mathematical Creativity) وخصائصه.

مقدمة

يؤدي الإبداع في الرياضيات إلى ضمان النمو في حقل الرياضيات عموماً. ويقدم الازدياد المطرد في عدد المجلات العلمية المكرسة لبحوث الرياضيات دليلاً على نمو الرياضيات. وعلى الرغم من ذلك، فإن ما يكمن في جوهر هذا النمو، أي إبداع علماء الرياضيات، لم يكن موضوعاً لكثير من هذه البحوث. إذ إن جلّ علماء الرياضيات لا يكونون في العادة مهتمين بتحليل عمليات التفكير التي ينجم عنها الإبداع في الرياضيات (Ervynck, 1991). ومن أولى المحاولات المعروفة التي عمدت إلى دراسة الإبداع في الرياضيات،الاستبانة الشاملة التي نشرت في الدورية الفرنسية «تدريس الرياضيات» (L'enseigement Mathematique 1902). وقد ألهمت هذه الاستبانة، إضافة إلى المحاضرة التي ألقاها عالم رياضيات القرن العشرين المشهور هنري بوانكريه (Henri Poincaré) أمام جمعية علم النفس عن الإبداع، زميله جاك هادمرد (Jacques Hadamard)، الذي يُعد عالماً آخر من مشاهير علماء الرياضيات في القرن العشرين، للبحث في علم نفس الإبداع في الرياضيات (Hadamard, 1945). وقد أجرى هادمرد استقصاء غير رسمي بين علماء الرياضيات والعلماء البارزين في أميركا من أمثال جورج بيركهوف (George Birkhoff) وجورج بوليا (George Polya) وألبرت آينشتاين (Albert Einstein)، عن الصور الذهنية المستخدمة في مجال الرياضيات. ولمّا كان هادمرد متأثراً بعلم نفس الجشتالت (Gestalt) آنذاك، فقد أصدر أحكاماً نظرية تقول إن عملية إبداع علماء الرياضيات تتبع نموذجاً جشتالتيّاً (كليّاً) يتكون من أربع مراحل، هي: الإعداد، الحضانة، الإشراق، والتحقق. ويصف نموذج الجشتالت العملية التي يستخدمها علماء الرياضيات في الإبداع، ولا تسعى إلى تعريف الإبداع ذاته. ولكن، كيف يمكن لنا أن نعرِّف الإبداع؟ وما الإبداع في الرياضيات تحديداً؟ وعلى وجه الخصوص، هل هو اكتشاف نظرية جديدة من عالم أو باحث في مجال الرياضيات؟ وهل يُعد اكتشاف طالب نتيجة معروفة حتى يومنا هذا إبداعاً؟ هذه هي مجالات البحث في هذه الورقة.

مشكلة تعريف الإبداع

يوصف الإبداع في الرياضيات ببساطة على أنه فطنة واختيار وتمييز مستبصر (Poincaré ,1948). وأما من وجهة نظر بوانكريه (1948)، فإن الإبداع لا يتكوّن على وجه التحديد، من إيجاد ارتباطات لا طائل تحتها، بل يتضمن فقط تلك الارتباطات المفيدة، التي تكون نسبتها عادة صغيرة جدّاً. وقد يبدو هذا وصفاً مبهماً للإبداع في الرياضيات، إذ يمكن للمرء أن يفسر مجاز «الاختيار» الذي استخدمه بوانكريه على أنه مقدرة عالم الرياضيات على أن يختار بعناية من بين المسائل التي تؤدي إلى حلول ناجحة مقارنة بتلك التي لا تأتي بجديد. لكن هذا التفسير لا يكوّن حلاًّ لحقيقة أن بوانكريه قد أغفل مسألة الجِدَّة (The Problem Of Novelty) وبعبارة أخرى، فإن وصف الإبداع في الرياضيات على أنه القدرة على الاختيار من بين الارتباطات المفيدة وتلك التي لا طائل تحتها، يماثل وصف فن النحت على أنه بترٌ لا لزوم له!

وقد كان تعريف «بوانكريه» للإبداع نتيجة لظروف عثر من خلالها على نتائج عميقة في الدوال الفوكسية(Fuchsian Functions) (نسبة إلى العالم الألماني لازاروس فوكس Lazarus Fucks). تألفت المرحلة الأولى من العمل الشاق للتوصل إلى رؤية للمشكلة الموجودة. وقد سمّاها بوانكريه المرحلة الأولية للعمل الواعي. ويشار أيضاً إلى هذه المرحلة **بمرحلة الإعداد** *Preparatory Stage* (Hadamard, 1945). وتحدث المرحلة الثانية حول الفترة التي يصار فيها إلى طرح المشكلة جانباً مدة من الوقت، ويكون فيها العقل مشغولاً بمشكلة أخرى. ويشار إلى هذه المرحلة **بمرحلة الحضانة** *The Incubatory Stage* (Hadamard, 1945). أما المرحلة الثالثة، فتكون عندما يظهر الحل فجأة في الوقت الذي ربما يكون فيه المرء مشغولاً بأمور أخرى لا علاقة لها بالمسألة. ويعدُّ هذا الظهور والإشراق المفاجئ علامة واضحة لعمل طويل لاشعوري يسبق مرحلة العمل(Poincaré, 1948). وقد أشار هادمرد إلى هذه المرحلة **بمرحلة الإشراق** *The Illuminatory Stage*. وعلى الرغم من ذلك، فإن عملية الإبداع لا تتوقف عند هذا الحد، إذ إن هناك مرحلة رابعة أخيرة تتمثل في التعبير عن النتائج شفهيّاً أو كتابيّاً. ويستطيع المرء عند هذه المرحلة أن يتحقق النتائج، ويجعلها دقيقة ومحكمة، وينظر إلى إمكانية نشرها على نطاق واسع من خلال

استخدام النتائج. وعموماً، يمكن القول إن نموذج الجشتالت يحتوي على بعض العيوب، أولها: أن هذا النموذج ينطبق بصورة رئيسة على المسائل التي طرحها علماء الرياضيات بوصفها بدهيات، ومن ثم فقد تجاهل العملية الرائعة الساحرة التي يُتوصل من خلالها إلى الأسئلة الفعلية. وثانيها: أن النموذج يعزو الجزء الكبير مما «حدث» في مرحلتي الحضانة والإشراق إلى محركات اللاشعور. وقد عالج إيرفينك (Ervynck, 1991) في نموذجه ذي المراحل الثلاث، المسألة المتصلة بكيفية التوصل إلى المسائل على نحوٍ جزئي.لقد وصف «إيرفينك» الإبداع في الرياضيات من خلال عملية مكونة من ثلاث مراحل. يشار إلى المرحلة الأولى، وهي مرحلة الصفر (Stage 0) **بالمرحلة التقنية التمهيدية** التي تتألف من بعض أنواع التطبيقات التقنية والعملية لقوانين الرياضيات وإجراءاتها، دون أن يكون لدى المستخدم أي إلمام بالأساس النظري (ص 42). أما المرحلة الثانية (المرحلة رقم 1)، فهي مرحلة **النشاط الحسابي** *Algorithmic Activity* التي تتألف بصورة أساسية من أداء المناحي الرياضية كما في تطبيق بعض الخوارزميات الرياضية على نحو صريح مراراً وتكراراً. في حين يشار إلى المرحلة الثالثة (المرحلة رقم 2) على أنها نشاط إبداعي (مفاهيمي، بنائي) *Creative (Conceptual, Constructive) Activity*. هذه هي المرحلة التي يحصل فيها الإبداع في الرياضيات الحقيقي، وتشتمل على اتخاذ قرارات غير حسابية. و«قد تكون القرارات التي تُتخذ ذات طبيعة متباينة على نطاق واسع، وتشتمل دائماً على خيار» (ص 43). وعلى الرغم من محاولة «إيرفينك» وصف العملية التي يتوصل من خلالها علماء الرياضيات إلى الأسئلة من خلال مرحلة الصفر والمرحلة رقم 1، فإن وصفه للإبداع في الرياضيات يشبه إلى حدٍّ بعيد وصف كل من بوانكريه وهادمرد، حيث إن استخدامه مصطلح «اتخاذ قرارات غير حسابية» يشبه استخدام «بوانكريه» مجاز «الخيار».

ولم يتوصل المؤلف إلى وجود دراسات في تعليم الرياضيات تحاول تعريف الإبداع صراحة. ولكن هناك مراجع للإبداع أشار إليها الباحث السوفييتي كروتتسكي (Kruitiski, 1976) ضمن سياق قدرة الطالب على تجريد المحتوى الرياضي وتعميمه. وعلى الرغم من ذلك، فهناك مثال رائع لمحاولة عالم الرياضيات جورج بوليا (George Polya,1954) لتقديم استدلال لمعالجة مشكلات ومسائل بطريقة مشابهة لما يمكن أن

يصــدر عن عالم رياضــيات يتمتع بقدرات عالية. لاحظ «بوليا» أننا «عند محاولة إيجاد حل للمســألة، ندرس مجالات مختلفة تتعلق بها كل علــى حدة، ثم نفكر فيها مراراً وتكراراً. لذا، فإن اختلاف المســائل أو المشــكلات وتنوعها أمر أساســي في عملنا.» وأكــد «بوليا» أهمية اســتخدام أنماط استدلال متنوعة لحل المسائل الرياضية ذات الصعاب المتنوعة. ويلاحظ أن علماء الرياضيات يعمدون في اختبارهم إلى معقولية التخمينات الرياضية، إلى استخدام إســتراتيجيات متنوعــة. ففي بحثهم عــن الأنماط الواضــحة، يعمد علماء الرياضــيات إلى اســتخدام أنواع متعددة من الاستدلال، مثل (أ) التثبت من النتائج، و(ب) التثبت من نتائج عــدة بنجاح، و(ج) التثبت مــن النتائج غير المحتملة و(د) الاســتدلال من التماثل الجزئي و(هـ) تعميق التماثل الجزئي. وهكذا، يمكن النظر إلى الاستدلال على أنه آلية لاتخاذ قرارات تقود علماء الرياضيات عبر مسار محدد، قد تكون نتائجها مثمرة أو عديمة الجدوى. ويتضح من الفقرات السابقة أن معضلة تعريف الإبداع ليست سهلة.

وعلــى الرغم من ذلــك، فإنه قد نجم عن تجدد اهتمام علمــاء النفس بظاهرة الإبداع دراســات كثيرة تحاول تعريف مصــطلح «الإبــداع» وتفعيله، حيث حاولوا فــي الآونة الأخيرة ربــط الإبــداع بمقاييــس الــذكاء (Sternberg, 1985)، وبالقــدرة على التجريــد والتعميم (Sternberg, 1985)، والقــدرة على حل المشــكلات المعقــدة (Frensch & Sternberg 1992,). وقد عرّف ستيرنبيرج ولوبارت (Sternberg & Lubart 2000) الإبداع أنه القدرة على إنتاج عمل أصيل غير متوقع يكون «مفيداً» وقابلاً للتكيف. وتدور بين علماء الرياضيات كثير من الخلافات والمناقشات حول هذا التعريف خاصة ما يتعلق بأثر نتائج العمل الإبداعي عنــد التطبيق الواقعي. ولعل المثال الحديث الذي يتبــادر إلى الأذهان هو إثبات أندرو وايلز (Andrew Wiles) لنظرية فيرمات (Fermat) الرياضية الأخيرة. وقد نظر مجتمع علماء الرياضــيات إلى عملــه على أنه إبداع؛ إذ كان عملاً غير متوقع وأصــيلاً لكنــه يفتقر إلى أي تطبيــق فــي الواقع، على نحو ما ارتأى ســتيرنبيرج ولوبارت. ومن هــذا المنطلق، فإنني أرى أنــه يكفــي أن نعرّف الإبداع على أنــه القدرة على القيــام بعمل جديد أو أصــيل، وهذا يتفق مع تعريفي الشخصــي للإبداع في الرياضــيات بصــفته العملية التي تنتــج حلولاً غير عادية لمسألةٍ ما بصرف النظر عن المستوى. وفي سياق هذه الدراسة التي تضم علماء رياضيات

مبدعين، يُعرَّف الإبداع في الرياضيات على أنه نشر النتائج الأصلية في مجلات ودوريات بحثية مشهورة في مجال الرياضيات.

الدافعية وراء دراسة الإبداع

كان النقص في وجود دراسات حديثة عن الإبداع في الرياضيات أحد الدوافع لإجراء هذه الدراسة، فقد دعا موير (Muir, 1988) قبل خمسة عشر عاماً علماء الرياضيات إلى إتمام نسخة معدلة للبحث الأصلي المنشور في مجلة تدريس الرياضيات (L'enseigement Mathematique,1902). كانت نتائج تلك المحاولة مهمة جدّاً، لكنها لا تزال مجهولة حتى يومنا هذا. وهدفت هذه الدراسة إلى اكتساب رؤية لطبيعة الإبداع في الرياضيات. وتحقق هذا من خلال مقابلة خمسة علماء رياضيات مبدعين وبارعين باستخدام نظام معدل للمقابلات عما ظهر في تلك المجلة. وقد نوقش الغرض من استخدام نموذج الاستبانة القديمة ضمن الجزء الخاص بالمنهجية في هذا البحث. لقد كان المؤلف مهتمّاً بتنقيح السمات المشتركة لعملية الإبداع ليرى هل توجد أفكار أساسية لوصف الإبداع في الرياضيات. وكانت الأسئلة المحددة المستخدمة في الاستكشاف على النحو الآتي:

- هل لا يزال نموذج الجشتالت للإبداع في الرياضيات قابلاً للتطبيق حتى يومنا هذا؟
- ما سمات عملية الإبداع في الرياضيات وخصائصها ؟
- هل لدراسة الإبداع في الرياضيات أي آثار في غرفة الصف؟

مراجعة الدراسات السابقة

تتساءل أي دراسة عن طبيعة الإبداع في الرياضيات عما إذا كان علماء الرياضيات هم من اكتشفوا الرياضيات أو اخترعوها. واستناداً إلى ذلك، يبدأ استعراض الدراسات بوصف مختصر لوجهات النظر الأربع الشائعة حول طبيعة الرياضيات، ثم يتبعها استعراض شامل للنماذج المعاصرة للإبداع من علم النفس.

طبيعة الرياضيات

يوجد لدى علماء الرياضيات المشاركين بفاعلية في البحث بعض المعتقدات حول الوضع الوجودي (الأنتولوجي)[1] Ontological Status للرياضيات الذي يؤثر في طريقة البحث لديهم (Davis & Hersh, 1981; Sriraman, 2004). ويرى أصحاب مذهب أفلاطون أن المواد الرياضية موجودة قبل اكتشافها وأن «لكل سؤال ذي معنى عن أي مادة رياضية جواباً قاطعاً، سواء أكنا قادرين على تحديده أم لا» (Davis & Hersh, 1981). وتبعاً لوجهة النظر هذه، فإن علماء الرياضيات لم يخترعوا الرياضيات أو يوجدوها، بل اكتشفوها اكتشافاً. يقول علماء المنطق إنه يمكن أن يصار إلى تخفيض المفاهيم الرياضية كافة في نهاية المطاف إلى مفاهيم منطقية، وهذا يعني أن الحقائق الرياضية كافة يمكن إثباتها من خلال البدهيات وقوانين الاستدلال والمنطق وحدها. (Ernest, 1991) في حين لا يعتقد الشكليون[2] (Formalists) أن الرياضيات قد اكتشفت، بل يعتقدون أن الرياضيات عبارة عن لعبة اخترعها علماء الرياضيات استناداً إلى سلاسل من الرموز لا معنى لها (Davis & Hersh, 1981).

كانت البنائية (Constructivism)، وفيها الحدسية (Intuitionism)[3]، إحدى مدارس التفكير الرئيسة (إلى جانب الأفلاطونيين والمنطقيين والشكليين) التي ظهرت بسبب التناقضات التي برزت في نظرية المجموعات (Sets Theory) ونظرية الدوال

1) الأنتولوجيا ontology مصطلح فلسفي قديم يتعلق بدراسة الموجودات أو ما نفترض أنه موجود من أجل التوصل إلى حقيقة قاطعة. وقد أخذ يستخدم حديثاً لفئات أشياء توجد في ميدان بعينه للإشارة إلى المعرفة المشتركة للأشخاص العاملين في ذلك الميدان. وهو مصطلح يرتبط كثيراً بدراسة الواقع -المراجع

2) المدرسة التشكلية هي مدرسة روسية نشأت في رحاب الأدب في الفترة بين عام 1910-1920 وهي تشتمل على أعمال العديد من المفكرين الروس ذوي التأثير الكبير على الساحة الروسية، كان الادب قبل الشكلية الروسية يعامل على أنه صورة مرآتية عن سيرة المؤلف وخلفية أو توثيقاً تاريخياً أو اجتماعياً، أما الشكليون فيعلنون أن الادب منتج له استقاليته وخصوصيته.

3) تُعدُّ النظرية البنائية في التعلّم من الفلسفات التي تهدف إلى تعزيز التطور المنطقي والمفاهيمي للطالب مع التركيز على الخبرات في تعليمه حيث تؤمن هذه النظرية بأن الناس ينتجون المعرفة ويصيغون المعاني المستندة إلى خبراتهم. وهي تولي أهمية خاصة لدور المعلمين بوصفهم ميسّرين لعملية التعلم. أما النظرية الحدسية، فمذهب يرى أن الحدس هو العامل الأول في تكوين المعرفة. وقد جاءت هذه الفلسفة كرد فعل على النزعة المادية والاتجاه العلمي الذي شاع في أوروبا في القرن التاسع عشر. أفضل من يمثل هذا المذهب الفيلسوف الفرنسي هنري برجسون (1859-1941)، الذي جعل الحدس مصدر المعرفة الحقيقية للواقع- المراجع

(Functions Theory) في بدايات القرن العشرين. وكانت التناقضات مثل تناقضات رَسل (Russell's Paradox) كعاصفة رئيسة اجتاحت وجهة نظر أصحاب الأحكام المطلقة حول المعرفة الرياضية، أي إذا كانت الرياضيات مؤكدة ونظرياتها كلها موثوقاً بها، فكيف يمكن للتناقضات أن توجد في نظرياتها؟ وكان من البنائيين في الرياضيات براور (Brouwer) وهيتنج (Heyting) اللذان ينتميان إلى المدرسة الحدسية. يرى البنائيون أن كلاًّ من الحقائق الرياضية ووجود الأشكال الرياضية يمكن أن تُبنى بوساطة طرائق البناء، وأن الأنشطة الرياضية البشرية أساسية في إيجاد معرفة جديدة، وأن كلاًّ من الحقائق الرياضية والأشكال الرياضية يجب أن تؤسَّس من خلال المنهجية البنائية (Ernest, 1991, P. 29).

والسؤال الآن هو: كيف يجري العلماء بحوث الرياضيات؟ هل تبرز المسائل وحدها أم أن هناك نمطاً من التفكير أو البحث يقود إلى مسائل ذات معنى، وإلى الطريقة التي تُعالج فيها تلك المسائل؟ ويؤكد الكاتب أن ثقافة عالم الرياضيات تحدد، على نحوٍ كبير، نوع الأسئلة. وبعبارة أخرى، لا يمكن للمرء أن يكتسب المعرفة من العالم الخارجي دون تفاعل اجتماعي. وبحسب وجهة نظر إيرنست (Ernest, 1994)، ليس ثمة مجاز أساسي لعقل المرء المعزول تماماً، بل إن الاستعارة أو المجاز الأساسي يكمن في المحادثات التي تجري بين الأفراد في سياق لغوي ذي معنى في أثناء الحوار (Ernest, 1994)، حيث تصوغ اللغة عقل الإنسان مثلما تُعدُّ الإنتاج «الكلي» لأفكاره (Wittegenstein, 1978). وعلى أي حال، فإن الدراسات الحديثة في علم النفس تعترف بهذه الجوانب الاجتماعية لأنشطة البشر لأهميتها في عملية الإبداع. وهذا بدوره يتطلب اطّلاعاً معمقاً في الدراسات الخاصة بالرياضيات.

فكرة الإبداع في علم النفس

كانت البحوث عن الإبداع على نحو ما أشرنا سابقاً، على هامش علم النفس وعلم النفس التربوي وتدريس الرياضيات، ولم يتجدد الاهتمام بظاهرة الإبداع في مجتمع علم النفس إلا خلال ربع القرن الماضي فقط. ويرى ستيرنبيرج (Sternberg, 2000) في كتابه بعنوان **دليل الإبداع** (*Handbook Of Creativity*) الذي يحتوي على استعراض شامل

للبحوث جميعها المتوافرة في حقل الإبداع، أنه يمكن تصنيف معظم المناحي المستخدمة في حقل الإبداع ضمن ست فئات، هي: المنحى الروحي، والعملي، والدينامي-النفسي، والقياس النفسي، والمعرفي، والشخصي- الاجتماعي. وفيما يأتي استعراض مقتضب لكل من هذه المناحي.

المنحى الروحي

يرى المنحى الروحي (The Mystical Approach) في دراسة الإبداع، أن الإبداع ينجم عن إلهام روحي أو أنه عملية روحانية. وقد ادعى بليز باسكال (Blaise Bascal) أن كثيراً من آرائه الرياضية هي هبة من الله. وفي السياق نفسه، قال عالم الجبر المشهور في القرن التاسع عشر ليوبولد كرونكر (Leopold Kronecker): إن الله هو الذي خلق الأعداد الصحيحة، وأن ما تبقى كله من صنع البشر(Gillian, 1994). وعلى الرغم من أن اعتقاده المتطرف لم يلق تأييداً واسعاً، لكن الحدسيين دافعوا عن معتقداته الخاصة بالبراهين البنائية بعد وفاته بسنوات كثيرة. وقد جرت محاولات عدة لاستكشاف علاقات ممكنة بين معتقدات عالم الرياضيات عن طبيعة الرياضيات وإبداعه (Davis & Hersh, 1981; Hadamard, 1945; Poincaré, 1948; Sriraman, 2004). وتشير هذه الدراسات إلى وجود علاقة مؤكدة بين معتقدات علماء الرياضيات عن طبيعة الرياضيات والإبداع. ويعتقد أن وجهة نظر الأفلاطونيين الجدد تعدُّ مفيدة لبحوث علماء الرياضيات نظراً إلى الاعتقاد الفطري أن السعي وراء النتيجة/العلاقة موجود أصلاً.

المنحى العملي

يتطلب المنحى البرجماتي (The Pragmatic Approach) أن تكون مهتمّاً اهتماماً أساسيّاً بتطوير الإبداع وتنميته وليس بفهمه فقط (Sternberg, 2000, P. 5). ويعدُّ تركيز «بوليا» على استخدام عدد متنوع من الاستدلالات لحل المسائل الرياضية ذات الصعاب المتنوعة مثالاً على المنحى العملي. وبناءً عليه، يمكن أن يُعدّ الاستدلال آلية لاتخاذ قرار يقود علماء الرياضيات إلى مسار محدد قد تكون نتائجه مثمرة أو عديمة الجدوى. ويُعدُّ

الأسلوب الشائع المعروف بالعصف الذهني، مثالاً آخر على تحفيز الإبداع من خلال البحث عن أكبر عدد من الأفكار أو الحلول الممكنة.

المنحى الديتامي - النفسي

يستند المنحى الدينامي-النفسي (Psychodynamic Approach) في دراسة الإبداع إلى فكرة مفادها أن الإبداع يبرز بسبب التوتر بين حقيقة الشعور ومحركات اللاشعور(Hadamard, 1945; Poincaré, 1948; Sternberg, 2000; Wallace, 1926; Wertheimer, 1945). ويعدُّ نموذج الجشتالت ذو المراحل الأربع (الإعداد، الحضانة، الإشراق، والتحقق)، مثالاً على استخدام المنحى الدينامي-النفسي في دراسة الإبداع. وتجدر الإشارة إلى أن نموذج الجشتالت هو الذي أطلق شرارة كثير من نماذج حل المشكلات المعاصرة (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985; Lester, 1985). وقد استخدمت المناحي الدينامية-النفسية الأولى في بناء دراسات حالة لمبدعين مشهورين، أمثال ألبرت أنشتاين (Albert Einstein)، غير أن السلوكيين انتقدوا هذا المنحى بسبب صعوبة قياس الأفكار النظرية المقترحة.

منحى القياس النفسي

يتضمن منحى القياس النفسي (The Psychometric Approach) في دراسة الإبداع، قياس مفهوم الإبداع بالاستعانة بالورقة وقلم الرصاص. وتعدُّ اختبارات تورانس للتفكير الإبداعي (The Torrance Tests Of Creative Thinking) التي طورها تورانس (Torrance, 1974)، وتستخدمها كثير من برامج الموهوبين في المدارس المتوسطة والثانوية في تحديد الطلاّب الموهوبين/ المبدعين، مثالاً على هذا المنحى. ويشتمل هذا الاختبار على كثير من الواجبات اللفظية والشكلية التي تتطلب استخدام مهارات حل المشكلات والتفكير التباعدي (Divergent Thinking). صمّم الاختبار لقياس مهارات الطلاقة والمرونة والأصالة (الندرة الإحصائية للاستجابة)، إضافة إلى مهارة التوسع أو التفاصيل (Sternberg, 2000). ويرى ستيرنبيرج (Sternberg, 2000) وجود جوانب إيجابية وأخرى سلبية لمنحى القياس النفسي. ففي الجانب الإيجابي، تتيح هذه الاختبارات المجال للبحث

مع الأشخاص غير المشهورين، وهي أيضاً سهلة الإدارة وتعطي علامات موضوعية. في حين يتمثل الجانب السلبي في كون العلامات الرقمية تخفق في الاستحواذ على مفهوم الإبداع؛ لأنها تستند إلى ورقة مختصرة واختبار بقلم الرصاص. ويدعو الباحثون إلى استخدام مزيد من المنتجات المهمة، مثل العينات الكتابية والرسوم وغيرها من أجل تقويمها تقويماً موضوعيّاً من لجنة خبراء بدلاً من الاعتماد على قياسات رقمية فقط.

المنحى المعرفي

يركز المنحى المعرفي (Cognitive Approach) في دراسة الإبداع على فهم العمليات والتمثيلات العقلية التي تعد أساساً في فكر الإنسان(Sternberg, P 7, 2000). يرى (ويسبيرج Weisberg 1993) أن الإبداع يتطلب استخدام العمليات المعرفية العادية ونتائجها في النتائج الأصلية وغير العادية. وتُعد هذه المنتجات نتائج للعمليات المعرفية التي تقوم على المعرفة المخزنة أصلاً في ذاكرة الفرد. وهناك دراسات كثيرة في مجال معالجة المعلومات (Birkhoff, 1969; Minsky, 1985)، تحاول عزل العمليات المعرفية وتوضيحها بناءً على مجاز الآلة[1] (Machine Metaphors).

المنحى الاجتماعي- الشخصي

يركز المنحى الاجتماعي- الشخصي (The Social-Personality Approach) في دراسة الإبداع على الشخصية والمتغيرات التحفيزية على نحو ما هو الحال في البيئة الاجتماعية والثقافية بصفتها مصادر للإبداع. وذكر ستيرنبيرج (2000) أن كثيراً من الدراسات قد أُجريت على مستوى المجتمع، وأشار إلى أن المستويات المشهورة من الإبداع ترتبط إحصائيّاً مع مرور الزمن بمتغيرات، مثل: الاختلاف الثقافي، والحرب، وتوافر نماذج للأدوار، وتوافر الدعم المالي، إضافة إلى توافر منافسين في مجالٍ ما (ص 9).

---

1) وفقاً لهذا المجاز، يمكن فهم أي كيان من كيانات الواقع وتتبع سلوكه والتحكم فيه بصفته آلة وتجميع لأجزاء متفرقة بغرض إنجاز فعل ما أو بلوغ غاية بعينها. ويضبط تفاعل هذه الأجزاء المتجمعة مع بعضها البعض ويحكم سلوكها قانون صارم يمكن ايجاده وتطبيقه عليها. وهكذا تتحول كيانات الواقع إلى مجرد كيانات آلية يمكن التحكم في سلوكها وتوقّع أفعالها من خلال القانون الذى يربط بين الأسباب والنتائج، مثل توقع ما سيحدث لو ألقينا جسماً حيًا أو جامداً إلى الأرض، كما يمكن تبسيط دراسة أي كيان أو ظاهرة من خلال تقسيمها إلى أجزاء منفصلة، ما يسهل دراسة كل جزء منها على حدة- المراجع

تـرى معظم الدراسـات الحديثـة المتعلقـة بالإبـداع (Csikszentmihalyi, 1988;, 2000; Gruber & Wallace, 2000; Sternberg & Lubart, 1996) أن الإبـداع ينتـج مـن التقاء واحد أو أكثر من العوامل أو الفئات الست الآنفة الذكر. وقد اكتسب المنحى التجميعي (The Confluence Approach) فـي دراسـة الإبـداع مصـداقية، وتوجـد في دراسـات البحوث كثير من نظريات التجميع من أجل فهم أفضـل لعملية الإبداع، ما يدعو إلى مراجعة نظريات التجميع الأكثر شيوعاً في مجال الإبداع. ويتبع هذا وصف للمنهجية المتبعة في جمع البيانات وتحليلها في هذه الدراسة.

نظريات التجميع في مجال الإبداع

إن أكثـر المناحـي التجميعيـة شـيوعاً فـي دراسـة الإبـداع، هـي: منحـى النظـم (Csikszentmihalyi, 1988, 2000)؛ دراسة الحالة بصفتها منحى نظم متطوراً (Gruber & Wallace, 2000)، وأخيراً منحى نظرية الاستثمار (Sternberg & Lubart, 1996).

منحى النظم

يأخـذ منحـى النظـم (The Systems Approach) في الحسـبان الجوانب الثقافية والاجتماعيـة في الإبـداع، بدلاً من الاكتفاء بتصـوير الإبـداع على أنه عملية فردية نفسـية (سـيكولوجية). يدرس منحى النظـم التفاعل بين الفـرد والمجـال (Domain) والحقل (Field). ويشـتمل الحقـل علـى أشـخاص ذوي أثـر فـي المجـال. مثـلاً، يكـون لمحرري مجـلات بحوث الرياضـيات تأثير في مجال الرياضـيات. ويعد المجال بنيـة ثقافية تحفظ منتجـات الإبـداع وتنقلهـا إلـى أفـراد آخرين في الحقـل. ويرى نمـوذج النظـم أن الإبداع عبـارة عـن عمليـة يمكـن ملاحظتها عنـد (تقاطـع تفاعـل الأفـراد والمجـالات والحقول (Csikszentmihalyi, 2000)، وتعد المكونات الثلاثة، أي الفرد والمجال والحقل، ضرورية لأن الفـرد يعمل ضـمن جانـب ثقافي أو رمـزي (المجال)، إضـافة إلى الجانـب (الحقل) الاجتماعي.

ويعد المجال مكوناً ضرورياً للإبداع نظراً إلى استحالة إدخال متغير دون الإشارة إلى نمط قائم. ويصبح الجديد ذا معنى فقط عند الإشارة إلى القديم (Csikszentmihalyi, 2000). وهكذا، فإن الإبداع يحدث عندما يحدث الفرد تغييراً في مجال معين، ويُنقل هذا التغيير مع مرور الوقت. وعادة ما تؤثر خلفية الفرد الشخصية وموقعه في المجال في إمكانية إسهامه. مثلاً، يمكن أن يعمل عالم رياضيات في مجال حافل بثقافة البحث الجامعي في إنتاج أوراق بحثية بسبب توافر الوقت لديه «للتفكير»، إضافة إلى كونه يعمل في بيئة حافلة بثقافة تزدهر فيها الأفكار. ولم يكن وجود إسهامات كبيرة مهمة في تاريخ العلوم من قبل رجال الدين، مثل باسكال (Pascal) ومندل (Mendel) مصادفة؛ لأن لديهم من الوسائل ووقت الفراغ ما يعينهم على «التفكير». ويرى تتشكزينتميهالي أن الأفكار الجديدة التي يترتب عليها تغييرات مهمة، لا تحظى بالقبول إلا بعد الموافقة عليها من قبل مجموعة من الخبراء الذين يقررون ما يمكن تضمينه في المجال. و «حراس البوابة» (الخبراء) هؤلاء هم الذين يكوّنون الحقل. فمثلاً، كان رأي عدد قليل جدّاً من كبار الباحثين في الرياضيات كافياً للشهادة بصدق إثبات أندرو ويلز (Andrew Wiles) نظرية فيرمات (Fermat's Theorem) الرياضية الأخيرة.

هناك أمثلة كثيرة في حقل الرياضيات تقع ضمن نموذج النظم. فمثلاً، عمدت البورباكي (Bourbaki)، وهي مجموعة من علماء الرياضيات الفرنسيين التي بدأت اجتماعاتها في الثلاثينيات من القرن الماضي، إلى كتابة دليل موحد شامل للرياضيات كلها. وقد كانت البورباكي مجموعة من خبراء الرياضيات حاولت توحيد الرياضيات كلها، وبذلك تصبح هذه المجموعة حارس البوابة لهذا الحقل بوضعها معياراً للدقة والصرامة. وعلى الرغم من أن مجموعة البورباكي قد فشلت في مسعاها، فإن طلاّب مجموعة البورباكي الذين يعملون محررين في بعض المجلات الرياضية المشهورة لا يزالون يفرضون درجة عالية من الدقة والصرامة حتى يومنا هذا على المقالات المقبولة للنشر، لذا، فإنهم يقومون بدور حراس البوابة لهذا الحقل.

وهنـاك مثال آخر مختلف يتمثل فـي دور البرهان، الذي يعدُّ عمليـة اجتماعية يتحقق خلالها مجتمع الرياضيات من صحة العمل الرياضي الإبداعي (Hanna, 1991). وفي هذا السـياق، يرى عالم المنطق الروسـي مانن (Manin, 1977) أن البرهان يصبح مقبولاً بعد تقبل المجتمع له على أنه إثبات، وينطبق هذا على الرياضـيات كمـا في الفيزياء واللغويات والبيولوجيا. وخلاصـة القول، أن نموذج النظم للإبداع يرى أن الإبداع يتطلب نقل مجموعة من القوانين والممارسـات من المجال إلى الفرد. وعندئذٍ لا بد للفرد أن ينتج متغيراً جديداً ضمن محتوى المجال، ويجب اختيار هذا المتغير من الحقل من أجل تضمينه المجال.

طريقة جروبر ووالاس في دراسة الحالة بوصفها منحى متطوراً للنظم

على النقيض من حجة تشـكزينتميهالي التي تدعو إلـى التركيز على المجتمعات التي ينتشـر فيهـا الإبداع، فقـد اقترح جروبـر ووالاسـ (Gruber & Wallace, 2000) نموذجاً يتعامـل مـع كل فرد بصـفته نظاماً متطـوراً فريداً من الإبـداع والأفكار، وبنـاءً عليه، يجب دراسـة كل عمـل إبداعـي للفرد على حدة وبمعـزل عن أعمال الآخرين. وجـاءت وجهة نظر هذين الباحثين بصـفتها نصراً متأخراً لأتباع مدرسـة الجشتالت الذين أعلنوا منذ البداية الشـيء نفسـه قبل قرن من الزمان تقريباً. ويبدو أن اسـتخدام الباحثين المصـطلح الذي يتناغـم مع التوجهات الحالية فـي علم النفس، قد جعل أفكارهما أكثـر قبولاً، حيث اقترحا نموذجاً يدعو إلى تحليل مفصـل أحياناً، وإلى وصـف سردي لكل حالة أحياناً أخرى، إضافة إلـى محاولة فهم كل حالة بصـفتها نظاماً فريداً ذا فاعليـة (Gruber & Wallace, 2000, P.93). ومـن الأهمية بمـكان أن يدرك المرء أن تركيز هذا النموذج لا ينصـب على شـرح أصول الإبداع ولا على شخصية الفرد المبدع، بل على الكيفية التي يحدث من خلالها العمل الإبداعـي (ص. 94). ويمكن القول إن الباحثين أرادا الإجابة عن سـؤالين مهمين، هما: 1) مـاذا يفعل الأشـخاص المبدعون عندما يكونون مبدعين؟ و 2) كيف يسـتخدم الأشـخاص المبدعون الموارد المتاحة في تحقيق شـيء فريد؟ وعلى أي حال، فإن العمل الإبداعي وفقاً لهـذا النموذج يُعرف أنه العمل الجديد ذو القيمـة. ويتناغم هذا التعريف مع التعريف الذي يسـتخدمه الباحثـون فـي الإبـداع (Csikszentmihalyi, 2000; Sternberg & Lubart, 2000). وكما أشـار جروبر ووالاس إلى أن العمل الإبداعي يكون دائماً نتيجة لسلوك هادف،

وأنــه عادة ما يمثل مهمة طويلة الأمد قد تمتد شــهوراً أو ســنين أو عقــوداً في بعض الأحيان (ص. 94). وعمومــاً، فإن الكاتب لا يتفق في الرأي مع الادعــاء أن العمل الإبداعي دائماً ما يكون نتيجة لســلوك هادف: ولعل أحد الأمثلة التــي تتبادر إلى الذهن وتدحض هذا الإدعاء، هي اكتشــاف البنسلين. إذ يمكن أن يُعزى اكتشاف البنسلين بوضوح إلى محض المصادفة. وفــي الجانب المقابل، فهناك كثير من الأمثلــة التي تدعم الادعاء القائل أن العمل الإبداعي يتطلب أحياناً عملاً قد يمتد سنوات. وهناك كثير من الأمثلة على ذلك في مجال الرياضيات. فمثــلاً، كانــت قوانين كيبلر (Kepler's Laws) للكواكب الســيارة نتيجة عشــرين عاماً من الحســابات الرقمية. وقد امتدت مهمة إثبات أندرو وايل (Andrew Wiles) نظرية فيرمات (Fermat Theorem) الرياضية الأخيرة سبع سنوات. وتفيد فرضية ريمان (Riemann) أن جذر دالة زيتا (Zeta Function) (الأرقام المركبة Z، حيث تســاوي دالة زيتا صــفراً) يقع على الخط الموازي للمحور الوهمي (Imaginary Axis) بنصف وحدة إلى يمينه. وربما تعــد هذه من أكثر المســائل التي بقيت دون حل في الرياضــيات على الرغــم مما لها تبعات كثيرة. وقد أجرى المحلل ليفينســون (Levinson) حســابات وهو على فراش الموت، تزيد من مصداقية نظرية ريمان. ويعد هذا مثالاً آخر على العمل الإبداعي الذي يقع ضمن نموذج جروبر ووالاس.

تعــدُّ العناصــر الآتية من مكونات دراســة الحالة بصــفتها نظاماً متطــوراً؛ أولها، أنها تنظر إلى العمل الإبداعي على أنه متعدد الأوجه. لذا، فعند بناء دراســة حالة لعمل إبداعي، ينبغي للمرء أن يجمّع الوجوه ذات الصلة، ويبني بعد ذلك دراسة الحالة استناداً إلى الوجوه التي اختيرت. وفيما يأتي بعض الأوجه التي يمكن أن يصــار إلى اســتخدامها في بناء نظام متطور لدراســة الحالــة: (أ) تميز العمل وتفرده (ب) ســرد لما حققه المبــدع (ج) أنظمة الاعتقاد (د) المقاييس الزمنية المتعددة (بناء المقياس الزمني المستخدم في إنتاج العمل الإبداعي)؛ (هـ) حل المشكلات و (و) الإطار السياقي (الأسرة، المدرسة، تأثيرات المعلم) (Gruber & Wallace, 2000). وخلاصة القول، إن بناء دراسة حالة لعمل إبداعي بصفته نظاماً متطوراً يتطلب شمول أوجه كثيرة اقترحها جروبر ووالاس. ويمكن للمرء أيضاً أن يقوِّم دراسة حالة تشتمل على عمل إبداعي بالنظر إلى الأوجه المشار إليها آنفاً.

منحى نظرية الاستثمار

ينظر منحى نظرية الاستثمار (The Investment Theory Approach) إلى الأشخاص المبدعين على أنهم مستثمرون جيدون، أي أنهم يشترون بثمن بخس، ويبيعون بثمن باهظ (Sternberg & Lubart, 1996). ويشير السياق هنا بطبيعة الحال إلى عالم الأفكار. ويستحضر الأشخاص المبدعون الأفكار التي تكون إما مكروهة وإما أنها تعامل بازدراء، ولكنهم يمضون وقتاً لا بأس به في محاولة إقناع الآخرين بالقيمة الجوهرية لهذه الأفكار (Sternberg & Lubart, 1996). وبطبيعة الحال، فإنهم يبيعون بثمن باهظ عن طريق إقناع الآخرين بملاحقة أفكارهم، في حين أنهم يكونون في طريقهم وراء فكرة جديدة. وترى نظرية الاستثمار أن هناك ستة عناصر تتجمع معاً لتكون الإبداع. والعناصر الستة، هي: الذكاء والمعرفة وأنماط التفكير والشخصية والدافعية والبيئة. ومن الأهمية بمكان ألا يخلط القارئ بين كلمة الذكاء وعلامة معامل الذكاء. إذ على النقيض من ذلك، اقترح ستيرنبيرج (Sternberg, 1985) النظرية الثلاثية في الذكاء التي تتألف من القدرة التركيبية (القدرة على توليد أفكار جديدة أو أفكار ملائمة لمهام محددة)، والقدرة التحليلية، والقدرة العملية. وتُعرّف المعرفة على أنها المعرفة الكافية في ميدان معين للارتقاء به، في حين تُعرّف أنماط التفكير على أنها تفضيل التفكير بطرق أصيلة يختارها الفرد، والقدرة على التفكير (شمولية/كلية)، إضافة إلى القدرة على التمييز بين الأسئلة المهمة وغير المهمة. وتتمثل السمات الشخصية التي تعزز الأداء الإبداعي في الرغبة في المخاطرة، والتغلب على الصعاب، وتحمل الغموض. وأخيراً، تعد الدافعية والتحفيز إضافة إلى البيئة الداعمة والمكافِئة، عناصر أساسية للإبداع (Sternberg, 1985).

يشتمل الإبداع في نظرية الاستثمار، على التفاعل بين الشخص والمهمة والبيئة. ويُعد هذا المعنى إلى حدٍّ ما حالة خاصة من نموذج النظم. وما قد يترتب على تصوير الإبداع على أنه تفاعل بين الشخص والمهمة والبيئة، هو أن ما يعد جديداً أو أصيلاً قد يختلف باختلاف الشخص والمهمة والبيئة. ويرى نموذج نظرية الاستثمار أن الإبداع أكثر من مجرد مجموع بسيط من مستويات الأداء التي تحققت في كل عنصر من العناصر الستة. وبغض النظر عن مستويات الأداء في العناصر الأخرى، فإن الأمر يتطلب مستوى أو بداية معينة من المعرفة

التي لا يمكن أن يحدث الإبداع دونها. ويمكن للمستويات العالية من الذكاء والدافعية أن تعزز الإبداع بصورة إيجابية، وبذلك تعوض مكامن الضعف في العناصر الأخرى. مثلاً، قد يكون شخص ما في بيئة غير داعمة للجهود الإبداعية، لكن المستوى العالي من الدافعية يمكن أن يتغلب على ذلك، ويجعله يسعى وراء محاولات إبداعية.

وهذا الاستعراض يلخص نظريات الإبداع الثلاث المثالية الشائعة، خاصة منحى النظم، الذي يرى أن الإبداع عبارة عن عملية ثقافية اجتماعية تشتمل على التفاعل بين الفرد والمجال والحقل؛ ونموذج جروبر ووالاس الذي يتعامل مع كل دراسة حالة بصفتها نظام تطور فريداً في الإبداع؛ إضافة إلى نظرية الاستثمار (Sternberg & Lubart, 1996) التي ترى أن الإبداع نتيجة اتحاد العناصر الستة والتقائها، وهي: (الذكاء والمعرفة وأنماط التفكير والشخصية والدافعية والبيئة).

وبعد استعراض دراسات البحوث المتصلة بالإبداع، يتحوّل التركيز إلى المنهجية المستخدمة في دراسة الإبداع في الرياضيات.

المنهجية

أداة المقابلة

تهدف هذه الدراسة إلى اكتساب معرفة متعمقة في طبيعة الإبداع في الرياضيات. وقد انصب اهتمام الكاتب على تعرّف السمات المشتركة المتعلقة بكيفية ابتداع العلماء الرياضيات؛ من أجل تحديد خصائص معينة لعملية الإبداع. وكان الكاتب مهتمّاً أيضاً باختبار إمكانية تطبيق نموذج الجشتالت. وقد كانت المقابلات الشخصية الطريقة الأساسية المستخدمة في جمع البيانات. ولمّا كان التركيز الأساسي للدراسة قد انصب على تأكيد الجوانب النوعية للإبداع، فإنه قد اختيرت منهجية المقابلة الرسمية (Formal Interview). وقد أُعدت أداة المقابلة (الملحق أ) عن طريق تعديل أسئلة استبانة مجلة تدريس الرياضيات (L'enseigement Mathematique) وأسئلة وضعها موير (Muir, 1988). إن الغرض من استخدام الاستبانة المعدلة هو أولاً، أن الأسئلة كانت

عامة بطبيعتها، وهذا ما أتاح لعلماء الرياضيات التعبير عن أنفسهم بحرية، ثانياً، لقد أراد الكاتب أن يختبر إلى حدٍّ ما إمكانية تطبيق نموذج الجشتالت للإبداع ذي المراحل الأربع. وبناءً عليه، فقد عُدّلت الأدوات الموجودة من أجل تفعيل نظرية الجشتالت، وإتاحة المجال أمام تدفق الأفكار لتكوين أساس لفرضية يمكن أن تنبثق من هذا الاستكشاف.

خلفية أفراد الدراسة

اختير خمسة علماء رياضيات من كلية العلوم الرياضية (Mathematical Sciences Faculty) من إحدى الجامعات الكبيرة في الغرب الأوسط من الولايات المتحدة تمنح درجة الدكتوراه. وقد وقع الاختيار على علماء الرياضيات هؤلاء استناداً إلى إنجازاتهم، إضافة إلى تنوع مجالات الرياضيات التي عملوا فيها. وقد قيس ذلك من خلال عدد البحوث المنشورة في مجلات ودوريات بحثية مشهورة، إضافة إلى تنوع ميادين الرياضيات التي أجرى علماء الرياضيات بحوثهم فيها. ومنح أربعة من علماء الرياضيات درجة أستاذ، حيث أمضوا ما يزيد على ثلاثين عاماً بصفتهم علماء رياضيات مبدعين، باستثناء عالم واحد فقط من هؤلاء العلماء كان يحمل رتبة أستاذ مشارك، وهو أصغرهم سنّاً. وأُجريت المقابلات جميعها بصورة رسمية خلف الأبواب المغلقة في مكاتب علماء الرياضيات، وسُجلت على أشرطة، ومن ثم كُتبت خطيّاً.

تحليل البيانات

لمّا كان الإبداع بنية معقدة جدّاً تشتمل على مدى واسع من السلوكات المتداخلة، فإنه يجب دراستها من الناحية التاريخية بحسب وجهة نظر الكاتب. وقد طُبّق مبدأ التحليل الاستقرائي(Patton, 2000) على نصوص المقابلات لاكتشاف الموضوعات البارزة التي تصف السلوك موضوع الدراسة. وبحسب ما يرى باتون(Patton, 2000) فإن «الاستقراء التحليلي، على عكس النظرية المثبتة، يبدأ بافتراضات المحلّل أو افتراضات مستمدة من النظرية، ويُعد إجراءً للتثبت من النظريات والافتراضات استناداً إلى بيانات نوعية (Taylor & Bogdan, 1984, P. 127). وباتباع مبادئ الاستقراء التحليلي، حُلّلت البيانات بكل عناية ودقة من أجل استخراج العوامل المشتركة، ومن ثم قورنت الخيوط المشتركة بالأفكار

النظرية في الأدب المتوافر، لأغراض واضحة صريحة تهدف إلى تحقق صحة مدى قابلية تطبيق نموذج الجشتالت على هذه البيانات النوعية، إضافة إلى استخراج موضوعات تصف عملية إبداع علماء الرياضيات. وإذا ما تعذّر تصنيف موضوع جديد أو تسميته بسبب تعذّر معرفة خصائصه أو أهميته، لجأ الباحث إلى إجراء مقارنة نظرية. وقد بيّن كل من كوربن وستراوس (Corbin & Strauss,1988) أن «استخدام المقارنات يظهر الخصائص، التي يمكن أن تستخدم بدورها في دراسة الحدث أو الموضوع في البيانات. ويمكن أن تُستخلص الأحداث أو الأشياء أو الأفعال المستخدمة في المقارنات النظرية، من الأدب النظري والدراسات السابقة أو من خلال الخبرة. وهذا لا يعني أننا نستخدم الخبرة أو الكتابات بصفتها بيانات، بل نستخدم الخصائص والدلالات المشتقة من الأحداث المقارَنة في دراسة البيانات المتوافرة بين أيدينا» (ص.80). ومن الموضوعات التي برزت: التفاعل الاجتماعي، والإعداد، واستخدام الاستدلال، والتخيل، والحضانة، والإشراق، والتحقق، والحدس، والبرهان.

وقد أُعيد تناول الرويات القصيرة التي تبرز هذه الخصائص في الجزء اللاحق جنباً إلى جنب مع التعليقات التي تتضمن الحوارات الواسعة ومناقشة الارتباطات بالكتابات الحالية.

النتائج والتعليقات والمناقشات

كان علماء الرياضيات المذكورون جميعهم في هذه الدراسة يعملون أساتذة مثبّتين (Tenured Professor) في كلية علوم رياضية تمنح درجة الدكتوراه. ويمكن وصف محيط عملهم بالأكاديمي، إضافة إلى مهام التدريس والعمل في لجان عمل متخصصة. وكان هؤلاء العلماء يمتلكون الحرية في اختيار مجالات بحوثهم، وكذلك الحال فيما يتعلق بالمسائل والمشكلات التي يعرضونها. وقد عمل أربعة من علماء الرياضيات الخمسة في مشروعات مشتركة أحياناً ونشروا أعمالهم فرادى، في حين أجرى واحد منهم فقط دراسة تعاونية واسعة. ولم يكرس هؤلاء العلماء أوقاتهم لبحوث الرياضيات إلا واحداً منهم؛ والأسباب الرئيسة التي برروا بها هذا التقصير كانت الالتزامات العائلية ومسؤوليات التدريس في

أثناء العام الدراسي. وقد كان من السهل على علماء الرياضيات جميعهم الاهتمام بالبحوث في أثناء الصيف؛ بسبب قلة المسؤوليات المتعلقة بمجال التعليم أو عدم وجودها. وقد أظهر اثنان منهم ميلاً نحو الرياضيات في مراحل الدراسة الثانوية المبكرة، في حين أظهر الآخرون الاهتمام بالرياضيات في مرحلة متأخرة في أثناء تعليمهم الجامعي. ولم يكن لأي من علماء الرياضيات المشاركين في هذه الدراسة أي تأثير عائلي ذي أهمية في تطورهم في الرياضيات. وتذكّر أربعة من علماء الرياضيات أنهم قد تأثروا بمعلمين معينين في مراحل مختلفة من تعليمهم، في حين تأثر أحد علماء الرياضيات من أفراد الدراسة بكتاب مدرسي. وقد بذل علماء الرياضيات الثلاثة الذين عملوا أساساً في التحليل، جهداً للتوصل إلى نظرة واسعة في الرياضيات لا علاقة مباشرة لها باهتماماتهم الأساسية. وقد أبدى عالما الجبر اهتماماً بمجالات أخرى في الرياضيات، لكنهما كانا فاعلين على نحوٍ رئيس في مجالاتهما المختارة.

الإشراف على البحث والتفاعل الاجتماعي

وعلى نحو ما ذُكر سابقاً، كان علماء الرياضيات جميعاً في هذه الدراسة، أساتذة دائمين في جامعة تُعنى بالبحث. وإضافة إلى التدريس والبحث ومتطلبات العمل من خلال اللجان، فقد أدى كثير من هؤلاء العلماء دوراً كبيراً في تدريب الطلاّب الخريجين المهتمين بمجال البحوث. ويعدُّ الإشراف على البحوث جانباً من جوانب الإبداع، إذ إن أي تفاعل بين البشر يُعدُّ البيئة المثالية لتبادل الأفكار، حيث يتعرض عالم الرياضيات في أثناء هذا التفاعل لوجهات نظر متباينة عن الموضوع. وقد أشاد علماء الرياضيات كلهم بالتفاعل بينهم وبين طلابهم الخريجين. وفيما يأتي روايات صغيرة لاستجابات بعض الأفراد.

الرواية الأولى

أ: كان لديّ طالبة خريجة واحدة فقط أنهت للتو شهادة الدكتوراه، ويمكنني القول إنها كانت متفاعلة إلى حدٍّ بعيد، وتبحث عن شخص ما يهتم بموضوعها ويزودها بأفكار جديدة ويشاركها في البحث فيها.

ب: كان لـديّ طالبـان، وكانا قد بدأا دراسـة الدكتوراه لكنهما لم يواصـلا الدراسة، لذا، فإنه لا يمكنني الحديث عنهما، لكن التفاعل كان إيجابيّاً.

ج: حقّـاً، كان لديّ كثير من المتعاونين، هؤلاء هم طلابي السـابقون الذين أعرفهم... أنـا أعمل في جميـع الأوقات مع الطلاّب، وهذا هو الوضـع الطبيعي.

د: من الصـعوبة الإجابة عن هذا (صمت)... إنه إيجابي؛ لأن التفاعل مع الآخريـن أمر جيد، ولكنه سـلبي؛ لأنه قد يسـتغرق وقتـاً طويلاً. فكلما تقـدم بك العمر، لا يسـتمر دماغـك في العمل كما كان سـابقاً... حيث إن أدمغة صـغار السـن أكثر انفتاحاً، فهناك قليل من الأفكار الفاسدة. لـذا، فإنـه من المثير العمل مع صـغار السـن الذين لا يزالـون في قمة إبداعهم. وعندما يتقدم بك العمر، تكتسـب خبرات أكثر، ولكن عندما تكون صغيراً فإن دماغك يعمل على نحوٍ أسرع.

هـ: نعـم، أعتقد أنه عامل إيجابي؛ لأنه يحفز الأفكار... ويسـمح بالحديث عن الأشياء ويستعرضـها في أثناء العملية أيضاً، ويضع الأشياء ضمن منظور مع المحافظة على الصـورة الكبيرة، وإن من المفيد لبحثك أن تشرف على الطلاّب.

التعليق على الرواية الأولى

تركزت اسـتجابات علماء الرياضـيات في الرواية السابقة على الإشراف على البحث. وعلى الرغم من ذلك، فقد اعترف جميع علماء الرياضـيات بدور التفاعل الاجتماعي بوجه عام بصـفته جانباً مهمّاً في تحفيز العمل الإبداعي. وقد أشـار كثير من علماء الرياضـيات إلى مزيّة القدرة على مراسـلة الزملاء عبر شـبكة الاتصـالات، إضـافة إلى المشـاركة في المؤتمرات التي تقدم فيها البحوث، وغيرها من اللقاءات المهنية. ويبدو هذا أكثر وضـوحاً ضمن الجزء اللاحق تحت عنوان الإعداد.

الإعداد واستخدام الاستدلال

عادة ما تكون هناك مجموعة من البحوث في مجال الموضوع الجديد الذي ينوي علماء الرياضيات بحثه واستقصاءه. ويكمن أحد أهداف هذه الدراسة في معرفة كيف يتناول علماء الرياضيات موضوعاً جديداً أو مسألة جديدة. هل يجربون المنحى الخاص بهم، أم يحاولون أولاً فهم ما يعرفونه أصلاً عن الموضوع فهماً جيداً؟ وهل يعمد علماء الرياضيات إلى استخدام الحاسوب في اكتساب رؤية عن المشكلة وتبصرها؟ وما الطرائق المتعددة المستخدمة في التعامل مع المشكلة؟ وعموماً، فإن الإجابات تشير إلى استخدام طرائق متنوعة.

الرواية الثانية

أ: أتحدث إلى الأشخاص الذين تناولوا هذا الموضوع، وأتعرف أسئلتهم، ثم أعدّ بحثاً أساسيّاً عن الفكرة الرئيسة. حيث تجد أن الحديث إلى الأشخاص يعينك بصورة أكبر من القراءة؛ لأنك تكتشف الدافع الذي يقف وراء كل شيء.

ب: ما الذي يمكن أن يحدث لي، هل عليّ البدء بقراءة شيء ما، وإذا ما تبين لي أن بوسعي أن أتقدم بصورة أفضل، فإنني عندئذٍ أسعى بجد، وحدي. ولكنني لا أريد في أغلب الأحيان أن أعيد اختراع كثير مما هو موجود أصلاً. لذا، فإن أكثر ما حفزني على بحثي هذا، الرغبة في فهم المجال. وعليه، فلو أن أحداً ما قد قام بالعمل التأسيسي فإن ذلك سيكون مفيداً. وما زلت أعتقد أن الجزء الأكبر من عمل الباحث يعتمد على قراءة ما فعله الآخرون وكتبوه.

ج: يرتبط الأمر بشيء واحد... وهو ببساطة أن أسلوبي تميز بأنني عملت كثيراً حتى إنني كنت أعمل عندما لم أكن قادراً على ذلك. ببساطة، فإن المشكلات التي أحلها قد جذبتني كثيراً حتى إنني كنت أتساءل:

هل سنرى من سيموت أولاً... الرياضيات أم أنا؟ ولم يكن واضحاً لي من سيموت أولاً.

د: حاول أن تعرف ما هو معروف. لن أقول لك افهمه كله... بل حاول معرفة ما هو معروف، وتوصل إلى نظرة عامة، ودع المسألة تتحدث عن نفسها... وغالباً ما يكون عن طريق القراءة، حيث إنك تفتقر إلى ذلك التواصل المباشر مع الأشخاص الآخرين في الحقل نفسه. ولكن تبين لي أنني أستمع أكثر إلى ما يقوله الآخرون مقارنة بالقراءة.

هـ: حسناً! تعلمت أن أكون عالماً جيداً. إذ يحاول العالم الجيد أولاً أن يعرف ما هو معروف عن شيء ما أو غيره قبل أن يمضي وقته بالبحث عن ذاك الشيء بنفسه. وهذا لا يعني أنني لا أحاول أن أتناول موضوعاً آخر في الوقت ذاته.

التعليق على الرواية الثانية

تشير هذه الإجابات إلى أن علماء الرياضيات يمضون وقتاً كبيراً في دراسة سياق المشكلة. وعادة ما يحدث هذا من خلال قراءة الأدب النظري أو الدراسات الموجودة، ومن خلال الحديث إلى غيرهم من علماء الرياضيات في المجال الجديد. وتتناغم هذه النتيجة مع نموذج النظم الذي يرى أن الإبداع عبارة عن عملية حيوية مستمرة تشتمل على التفاعل بين الفرد والمجال والحقل.

ومن المنطقي أن تسأل في هذه المرحلة: هل يتناول علماء الرياضيات مسألة واحدة حتى يحدث انفراج، أم أنهم يتناولون أكثر من مسألة في وقت واحد؟ وقد تبيّن أن كل عالم من علماء الرياضيات قد تناول مسائل كثيرة في وقت واحد مستخدماً منحى الذهاب والإياب.

الرواية الثالثة

أ: تناولت أكثر من مسألة مدة طويلة من الزمن... وقد مرت أوقات شعرت فيها بأنني قادر على إثبات هذه النتيجة، ثم أركز على ذاك الشيء

برهة، ولكن مررت بأوقات أخرى كنت أفكر خلالها في أشياء كثيرة في مرحلة معينة.

ب: ربما أميل إلى تناول كثير من المسائل معاً في آنٍ واحد. هناك كثير من المسائل التي أتناولها، وربما يكون السؤال الحقيقي، كم مرة تغير مجال التركيز؟ هل أتناول مسألتين مختلفتين في اليوم نفسه ؟ وهذا عائد إلى ما قد يتبادر إلى ذهنك في ذاك الإطار الزمني. ربما أتناول واحدة بدلاً من الأخرى. ولكني أميل إلى التركيز على مسألة واحدة بعينها أسابيع، ثم أنتقل بعد ذلك إلى شيء آخر. وما يحدث أحياناً أنني أتناول مسألة ما ثم أصل إلى نهاية مسدودة، ثم أبدل الاتجاه نحو مسألة أخرى بعض الوقت وأصل إلى نهاية مسدودة، ثم أعود إلى المسألة الأصلية. وعليه، فتناول المسألة يتراوح بين التقدم إلى الأمام والتراجع إلى الخلف.

ج: يتعين عليّ أن أركز ببساطة على شيء واحد ولا أتحول عنه كثيراً.

د: أجد أنني من المحتمل أن أعمل على مسألة واحدة. ربما يكون هناك شيئان يلوحان في الأفق، لكنني أتناول شيئاً واحداً فقط، وإذا لم أتقدم إلى الأمام، فإنني أعود إلى تناول الشيء الآخر، ثم أعود مرة أخرى هناك.

هـ: عادة ما أتناول شيئين في آنٍ واحد. وعندما أصاب بالوهَن وأنا مشغول في أحدهما، أنتقل إلى الآخر وأراوح بينهما ذهاباً وإياباً. وعادة ما يكون أحدهما موضع اهتمامي في وقت ما، وأمنحه وقتاً أكثر من الآخر، ولكن اعتدت على أن أتعامل مع مسألتين في آن واحد. فعندما أبحث عن مثال في بعض الأحيان ولا أجده، وابدأ بضرب رأسي بالحائط، وأكتشف أن البحث عنه مضيعة للوقت، فأبدأ بتناول مثال آخر؛ لأن هذا يعينني على ابتداع أفكار تجعل الرجوع إلى المسألة الأخرى سهلاً.

التعليق على الرواية الثالثة

تشير الرواية القصيرة آنفة الذكر إلى أن علماء الرياضيات يعمدون إلى تناول أكثر من مسألة في الوقت نفسه. هل يتنقل علماء الرياضيات ذهاباً وإياباً بين المسائل بطريقة عشوائية، أم أنهم يستخدمون مجموعة منظمة من الأفكار عن المسألة قبل التحول إلى مسألة أخرى؟ أفاد كثير من علماء الرياضيات أنهم يستخدمون الاستدلال المنطقي في سعيهم لإثبات شيء ما في أحد الأيام، ثم العودة لنقضه في اليوم التالي، وهم يبحثون عن الأمثلة والأمثلة المضادة، واستخدام المعالجة البارعة لتحقيق رؤية واضحة عن المسألة(Polya, 1954). وهذا يشير إلى أن علماء الرياضيات يستخدمون بعض الاستدلالات التي جاء بها بوليا. وعلى أي حال، لم يتضح هل استخدم علماء الرياضيات الحاسوب للحصول على رؤية تجريبية أو حسابية للمسألة. واهتم الكاتب أيضاً بمعرفة أنماط الصور والمجاز التي يستخدمها علماء الرياضيات في عملهم، حيث تساءلوا عن هذا. وتقدم إلينا الرواية الآتية رؤية عن هذا الجانب من الإبداع في الرياضيات.

الصور المجازية

سئل علماء الرياضيات في هذه الدراسة عن أنواع الصور والمجازات التي استخدموها في التفكير في الأشياء والوقائع الرياضية. وفيما يأتي إجاباتهم التي نأمل أن يحصل القارئ من خلالها على لمحة عن كيفية تفكير علماء الرياضيات في الأشياء. وتشير الإجابات أيضاً إلى صعوبة وصف الصور بصراحة ووضوح.

الرواية الرابعة

أ: نعم، نعم، أميل إلى رسم كثير من الصور عند إجرائي البحث، وأميل أيضاً إلى التلاعب بالأشياء في الهواء من أجل معرفة كيفية عملها. ولديّ حدس هندسي كبير. وعليه، فإنني أقوم بكثير من اليدويات.

ب: تُعد هذه مشكلة بسبب المجال المحدد الذي أعمل فيه، ولا أستطيع عمل أي رسوم بيانية، حيث إن الأشياء غير محدودة، وعليه، فإنني أتمنى لو كان بوسعي الحصول على نوع من رسوم الحاسوب البيانية لإظهار

تعقيدات حلقة معينة للحصول على شيء يشبه مجموعات جوليا (Julia Sets) أو صور كسرية، أشياء غير محدودة ولكن بوسعك أن تتأمل فيها أكثر فأكثر لتتبين العلاقات الممكنة بينها. فكرت ملياً في استخدام الإمكانات التي يتيحها الحاسوب. وللتفكير في أكثر الحلقات أهمية، عليك بالتفكير في حلقة الأعداد الصحيحة والعلاقات جميعها من حيث القابلية للقسمة، وكيف تصف هذه الشجرة إلى حد ما من خلال قابلية الأعداد الصحيحة للقسمة... إنها غير محدودة.

ج: العلم هو اللغة، فأنت تفكر من خلال اللغة. ولكن الأمر يتعلق باللغة ببساطة، فأنت تربط النظريات بعضها ببعض منطقيّاً. أنت ترى النظرية في بادئ الأمر في الطبيعة... عليك أن ترى أن هناك شيئاً منطقياً، ثم تبدأ بالبحث، وهناك عمل كبير بانتظارك حتى تتوصل إلى نظرية بمعادلات إهليليجية غير خطية.

د: إن كثيراً من الرياضيات، سواء أكنا ندرس أو نعمل، يعني ربط المعنى بما نقوم به، وهذا يعود بنا إلى السؤال المطروح في السابق عندما نتحدث عن كيفية قيامنا بذلك، أي ما نوع الاستدلال الذي تستخدمه؟ وما نوع الصور والمجازات التي تستخدمها؟ وفي الواقع، فإن كثيراً من عمل الرياضيات يتعلق بإيجاد هذه الصور المجردة التي تربط الأشياء بعضها ببعض، ومن ثم تجعلها ذات معنى، لكن ذلك لا يظهر في البراهين كذلك.

هـ: سواء استخدمت الأسلوب التصويري، أو اللغوي، أو الحركي... فجميع هذه المناحي صحيحة! فأحياناً تستخدم أحدها، وأحياناً تستخدم الآخر. وهذا يعتمد فعلاً على المشكلة التي تبحث عن حل لها، وهناك مشكلات كثيرة جدّاً... وغالباً ما أفكر في الاقترانات على أنها حركية على نحوٍ كبير، حيث تنقل الأشياء من مكان إلى آخر. وتتباين المناحي الأخرى من مسألة أو مشكلة إلى أخرى، وأحياناً من يوم إلى آخر.

وأحياناً، أحاول، وأنا أعدّ بحثاً ما، أن أصــور الأشياء بطرق متعددة قدر الإمكان لأتبين ما الذي يجري. لذا، فهناك أنواع متعددة من المناحي.

التعليق على الرواية الرابعة

إضــافة إلــى إظهار صــعوبة وصــف الصــور العقليــة، قال علمــاء الرياضــيات جميعاً إنهــم لا يســتخدمون الحاســوب في أعمالهــم. وقد وردت خاصــية عمل علماء الرياضــيات هذه في اســتخدام بوانكريــه (Poincaré, 1948) **مجــاز الخيــار** (*Choice Metaphor*)، واســتخدام إيرفينــك (Ervynck, 1991) **مصطلــح اتخــاذ القــرار غيــر الحسابــي** (*Non–Algorithmic Decision Making*). تعيــد الشــكوك التــي عبــر عنهــا علمــاء الرياضــيات، فيمــا يتصــل بعــدم قــدرة الآلات على القيــام بعملهــم، إلى الأذهــان كلمات جاريــت بيركهــوف (Garrett Birkhoff) أحــد أعظم علمــاء الرياضــيات التطبيقيين في زماننا، ففي خطابه الذي ألقاه بمناســبة تقاعده من رئاســة جمعية الرياضــيات الصناعية والتطبيقيــة (Society For Industrial And Applied Mathematics, Siam)، تنــاول بيركهوف (Birkhoff, 1969) دور الآلات في محاولات البشر الإبداعية، وخصص جزءاً من خطابه لمناقشة علم نفس الرياضيات، حيث قال:

«حققــت الإنجــازات الأخيــرة البارزة في الحاســوب حلمــاً قديماً بصــورة جزئية. وقــد قاد هذا بعضــ النــاســ إلى الاعتقاد أن حواســيب الغد ســتكون أكثر «ذكاءً» من البشــر، لا ســيما في قواها المتصلة بالمنطق الرياضي... يبدو أن مقدرة علماء الرياضيات على إعطاء معنى للأمور المهمة وتجنب التكرار غير الضــروري يصــعب حوســبتها؛ ودون هذه المقدرة، يتطلب من الحاســوب أن يتتبــع ملايين المســارات عديمة الجدوى التــي يقدمها علماء الرياضــيات ذوو الخبــرة العالية». (Birkhoff, 1969, Pp.430–438).

الحضانة والإشراق

بعد الحديث عن دور الإشراف على البحوث والتفاعل الاجتماعي واستخدام الاستدلال والصــور المجازيــة، التي يمكن أن تُصــوَّر على أنهــا جوانب من مرحلة الإعــداد في الإبداع في الرياضــيات، فمن الطبيعي أن نتســاءل: ماذا يحدث بعد ذلك؟ ويفترض الأدب التربوي

والدراســات المتعلقة بهذا الموضــوع، أن عالم الرياضيات الذي يعمل بجد ليتوصل إلى رؤية عن المسألة، عادة ما يمر بمرحلة انتقالية يتوقف فيها الشعور عن العمل فيما يتعلق بالمسألة ليبدأ اللاشــعور بالعمل، حين تطرح المســألة جانباً قبل أن يحدث الانفراج. وعلى أي حال، فقــد قــدّم علماء الرياضـيات في هذه الدراســة خبــرات تتناغم مع الكتابــات ذات العلاقة والدراسات المتوافرة (Hadamard, 1945; Poincaré, 1948).

الرواية الخامسة

ب: تتمثل إحدى المشــكلات في أن المرء يعد أولاً شــيئاً عن المســألة التي يريــد حلها، ثــم يضــعها جانباً، ويتــرك التفكيــر فيهــا. لا أعتقد أنك تســتطيع اســتخراج الأفكار من فراغ، بل يتعين عليك أن تبني الأساس أولاً، أليســ كذلــك؟ لذا، يقــول النـاس: الآن، قد تناولنا هذه المســألة، فدعونا نفكر في الأمر، ونؤجل اتخاذ القرار. إذاً، فأنت تعد لذلك. لذا، فإن جانب اللاشــعور أو الحدســ قد يتناول المســألة ويأتيك الجواب، ولكنــك لا تســتطيع أن تحدد متى يحدث ذلك. وعليك بــأن تكون واعياً لهــذا، فتضــع الأســاس وتفكر فيــه، وعندئــذٍ تأتي تلك الومضــات من الحدس، وهي بذلك تمثل الجانب الآخر من الدماغ الذي يتواصل معك في أي وقت دون سابق إنذار.

د: لســت متيقنــاً هل يمكنك الفصــل بين مرحلتــي الإعداد والإشــراق في العمليــة الإبداعيــة؛ لأنهمــا مرتبطتان علــى نحوٍ ما. فقد تمضــي بعض الوقــت وأنــت تبحث في شــيء ما، لكنك لا تــراوح مكانــك... أعتقد أن عقلك بالجهود الموزونة المدروسة يواصل العمل والتنظيم. وربما تظهر الفكرة عندما يتلاشى الضغط، ولكنها ترد نتيجة العمل الدؤوب الجاد.

هـ: عــادة ما ترد الفكرة بعــد أن أكون قد أظهرت الجد في عمل شــيء ما، لكنهــا قد ترد في وقت غريب قبــل أن أذهب إلى الفراش...فماذا أفعل عندئذٍ؟ نعم، أدوّنها (ضــاحكاً). أحياناً، وأنا أتجول في مكان ما، أفكر مــرة أخرى في المســألة وأقول: ماذا بخصــوص هذا الحــل؟ لماذا لا

تجربه؟ إن مثل هذا الأمر قد يحدث، إذ خطرت ببالي أفضل فكرة في إحدى الليالي وأنا أعد أطروحتي. وبعد أن عملت في بحثي بعض الوقت، جلست متسائلاً: لماذا لا أراجعه مرة أخرى؟...عندئذٍ قلت في نفسي! ها هي... لقد عرفت أن بوسعي فعل ذلك. غالباً ما تأتي الأفكار إليك من العالم الخارجي، لكنها لا تأتي إلا بعد أن تكون قد فكّرت فيها كثيراً.

التعليق على الرواية الخامسة

يتضح من الرواية القصيرة آنفة الذكر،أن ثلاثة من علماء الرياضيات الخمسة قد أفادوا بوجود خبرات تتناغم ونموذج الجشتالت. حيث عزا عالم الرياضيات (ت) الانفراجات التي حدثت إلى إرادته التي لا تتزعزع، إذ إنه لا ييأس ولا يستسلم، وعزاها أيضاً إلى الإلهام الروحاني، مردداً صدى صوت «باسكال» بطريقة ما. وعلى الرغم من ذلك، فقد عزا عالم الرياضيات (أ) هذه الإنجازات إلى المصادفة. وبعبارة أخرى، فإن الروابط (النفسية) الملائمة تحدث مصادفة، ويترتب على ذلك في نهاية المطاف السعي وراء النتيجة. وتؤدي المصادفة دوراً مهمّاً في الإبداع في الرياضيات. فقد تكون الأفكار والرؤى العظيمة وليدة المصادفة، مثل اكتشاف البنسلين. وفي هذا السياق، قدر أولام (Ulam,1976) الإنتاج السنوي بنحو مئتي ألف نظرية في الرياضيات. وتؤدي المصادفة دوراً مهمّاً في البحوث الرياضية، حيث إن عدداً قليلاً فقط من نتائج ومناحي البحوث المنشورة تخرج عن هذا الإطار. وهنا لا بد من التمييز بين المصادفة من وجهة نظر أتباع داروين (بخصوص البقاء)، والمصادفة من وجهة نظر علم النفس (التي يترتب عليها الاكتشاف/ الاختراع). وقد عالج «موير» دور المصادفة على النحو الآتي:

> «هناك جانبان لإيجاد مجالات جديدة، هما: إيجاد احتمالات جديدة، حيث يمكن لنا أن نجرب وصفاً عشوائيّاً (Stochastic)، ومن ثم نختار منها ما له قيمة. وعلى الرغم من أن الاستعانة بالمجازات البيولوجية لتفسير التطور الثقافي مشكوك فيها، فإن الإيجاد (Creation) والاختيار (Selection) عمليتان تحدثان ضمن سياق اجتماعي.(Muir, 1988 P. 33)

وهكذا، فإن «موير» يرفض تفسير أتباع داروين. وفي الجانب المقابل، لا يعترف نيكول (Nicolle, 1932) في كتاب «اختراع الأحياء» (*Biolgie De L'invention*) بدور اللاشعور في العملية الإبداعية، فهو يعزو التقدم الخارق في العلم والبحث إلى المصادفة المحضة:

> «ستجد أن المسألة الغامضة حتى حينها، التي لا يبدو أن مصباحاً واهناً قادراً على الكشف عنها، قد فاضت بالضوء. إنها تشبه عملية الإيجاد من العدم. وعلى عكس المكتسبات التدريجية، فإن مثل هذا الفعل لا يدين بشيء للمنطق أو العقل. فعملية الاكتشاف وليدة المصادفة» (Hadamard, 1945, P.19).

رفض «هادمرد» تفسير نيكول (Nicolle) المستند إلى أتباع داروين معللاً ذلك بقوله: تفسيرك لحدوث الإبداع مصادفة يماثل تأكيدنا على وجود آثار (Effects) دون أسباب (Reasons). وناقش هادمرد أيضاً قائلاً :على الرغم من أن «بوانكريه» قد عزا الانفراج الخاص به في الدوال الفوكسية (Fuchsian Function) إلى المصادفة، فإنه اعترف بوجود مقدار لا بأس به من الجهد الواعي السابق تبعته مدة زمنية من اللاوعي. وأضاف هادمرد أيضاً قائلاً: «حتى لو كان إنجاز بوانكريه نتيجة للمصادفة وحدها، فإنها لم تكن كافية لتفسير حجم العمل الإبداعي الكبير المنسوب إلى بوانكريه في كل جانب من جوانب الرياضيات تقريباً». والسؤال الذي يبرز هو: كيف تعمل المصادفة (من الناحية النفسية)؟ يعتقد الكاتب أن العقل ينشر أفكاراً متفرقة، تكون من منتجات الخبرات السابقة. ويمكن لبعض هذه الأفكار العشوائية أن يتجمع بعضها بجانب بعض، ثم تدمج بطريقة ذات معنى. مثلاً، إذا ما قرأ أحدنا برهاناً معقداً يتألف من آلاف الخطوات، فقد لا تكون ألف فكرة عشوائية كافية لبناء برهان ذي معنى. وعلى الرغم من ذلك، فإن العقل يعمد إلى اختيار الأفكار المتصلة بعضها ببعض من بين تلك الأفكار العشوائية، ويربطها معاً ويحولها إلى بنية ذات معنى. وتعدّ نظرية ويدربيرن (Wedderburn) عن حلقة الانقسام المحدودة، أحد الأمثلة على توحيد الأفكار العشوائية على ما يبدو؛ لأن البرهان يشتمل على الجبر والتحليل المعقد ونظرية الأعداد.

يعالج «بوليا» دور المصادفة بمعنى احتمالي. وغالباً ما يحدث في الرياضيات أن سلسلة من التجارب الرياضية (تشمل عملية العد) تأتي بأرقام قريبة من مثالية أفلاطون.

والمثـال التقليـدي هو تحقيق «يولر» (Euler) للسلسـلة اللانهائية $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ حصـل «يولـر» على قيمة رقمية تقريبية لمجموع السلسـلة باسـتخدام تحويلات متعددة للسلسلة. وكان الرقم التقريبي 1.644934، فخمّن بثقة مجموع السلسلة بِ $\pi^2/6$.

وعلى الرغم من أن القيمة الرقمية التي حصـل عليها «يولر» وقيمة $\pi^2/6$ تتوافقان إلى حد سـبع منـازل عشـرية، فإن مثل هذا التخمين يمكن أن يعزى إلى المصـادفة. ومع ذلك، وبحساب بسيط، فإنه يتبين أن احتمالية توافق سبع منـازل يساوي واحداً لكل عشرة ملايين! وعليه، لم ينسـب «يولر» هذا التخمين إلى المصادفة، وخمّن بجرأة أن مجموع هذه السلسلة كان فـي الواقع، $\pi^2/6$، ناهيك عن حقيقة أنه قد أثبت لاحقاً صـحة تخمينه (Polya, 1954, Pp.95-96).

الحدس والتحقق والبرهان

عندما تحدث لحظة الإشراق (Illumination)، سواء أكان ذلك من خلال المصادفة المحضـة أم من خلال الحضـانة أو من خلال التدخل الروحاني، يحاول علماء الرياضـيات عـادة التحقق أن حدسـهم كان صـحيحاً، ويحاولون بنـاء البرهان. يناقش هـذا الجزء من البحث كيف يتحقق علماء الرياضـيات من حدسـهم وبناء الأدلة علـى ذلك. حيث طُلب إلى علماء الرياضـيات في هذه الدراسة أن يصـفوا كيف يتكوّن الحدس لديهم بخصوص صحة الافتراضـ. وسُـئلوا: هل يعتمـدون على تحقق الدليل الرسـمي مراراً، أم أنهـم يعمدون إلى اسـتخدام البرهان الجزئي التقاربي المتعدد (Multiple Converging Partial Proof)؟ وهـل كانـوا ينظرون أولاً إلى الانسـجام مع نتائـج أخرى في المجـال نفسـه، أم أنهم كانوا ينظرون إلى التطبيقات؟ وعموماً، فقد ذكر غالبية علماء الرياضـيات في هذه الدراسـة أن آخر ما كانوا ينظرون إليه هو الدليل الرسمي. وهذا يتسق مع الكتابات والدراسات المتوافرة عن دور الدليل الرسـمي فـي الرياضـيات (Polya, 1954; Usiskin, 1987). وقد ذكر جُل علماء الرياضـيات أيضـاً الحاجة إلى التناغم مع النتائج الأخرى في المجال، وسـوف نشير إلى إجابات علماء الرياضيات عن هذا التساؤل لاحقاً.

الرواية السادسة

ب: أعتقد أنني سوف أختار التفحص المتكرر للدليل الرسمي... ولكني لا أعتقد أن ذلك كافٍ، إذ لابد من أخذ البقية الباقية في الحسبان. أي، أنك ربما تعتقد أن شيئاً ما صحيح على الرغم من أنك قد لا تفهمه تماماً. هذه هي النقطة التي أشير إليها في المحاضرة التي ألقاها عن سلسلة عالم الرياضيّات الألمانيّ ديريتشليت (Dirichlet). يومئذٍ، قال المحاضر: لقد كان لدينا دليل رسمي في وقت ما، لكن لا يمكننا القول إنه كان مفهوماً تماماً، فماذا كان يعني بذلك؟ ليس الدليل الذي لم يكن مفهوماً، بل تبعات النتائج وارتباطها بغيرها، والتطبيقات، ولماذا تعمل الأشياء في الواقع؟ ولكن ربما يكون أول ما سأفعله هو تفحص الدليل الرسمي لإرضاء نفسي، وبذلك أعتقد أنه صحيح على الرغم من أنني لا أفهم تبعاته ودد عليه عند ذلك الحد...إذ من الأسلم أن تقول إنه الموجه أو المرشد الأكثر ضماناً لي.

ج: أولاً يجب أن تراه في الطبيعة. عليك أن ترى أولاً ان هذه النظرية تتطابق مع شيء في الطبيعة، ثم إذا ما تكون لديك هذا الإنطباع، فمن المنطقي جداً أن تبحث عن البراهين.. ولديّ بالطبع عدة نظريات وبراهين تعتبر غير صحيحة، لكن معظم البراهين والنظريات صحيحة.

د: آخر ما أفكر فيه هو الدليل الرسمي، فأنا أبحث عن مقارنات ونظائر مع أشياء أخرى... وكيف ستضيء نتائجك التي تظن أنها صحيحة، الأشياء الأخرى وتتلاءم مع البنية العامة.

هـ: لمّا كنت أعمل في مجال البحث الأساسي، فإن عملي عادة ما يكون متناغماً مع غيره من الأشياء، وربما يكون هذا أهم شيء آخر لي. نعم، بوسع المرء أن يعود ويتفحص الدليل وهذا النوع من الأشياء، لكن التطبيقات لمّا تأت بعد، حيث إنها غير موجودة. ويمكن القول إن إمكانية التطبيق هي التي توجه عادة اختيار المسألة، حيث إن الجزء

الجيد الذي يمثلها هو إمكانية استخدامها. لذا، فإنك تنظر إلى أهميتها في الإطار الكبير... وهذه هي ظاهرة التماسك والتناغم. وربما تكون التطبيقات هي الأكثر ملاءمة على الأرجح، من بين الخيارات المتاحة جميعها.

التعليق على الرواية السادسة

تشير هذه الرواية القصيرة إلى وجود درجات متفاوتة من الدقة للبراهين الصادقة بين علماء الرياضيات. وبوجه عام، تتفاوت الدقة بين علماء الرياضيات استناداً إلى الوقت والأحوال. وهناك عدد قليل من البراهين في مجالات الرياضيات تنطبق عليها المعايير التي يستخدمها معلمو الهندسة في المدارس الثانوية (حيث يدعم كل برهان بالأسباب). وعموماً، يعمد المرء إلى زيادة الدقة والصرامة عندما لا تبدو النتائج صحيحة (Usiskin, 1987). وتعدُّ البراهين في أغلب الأحيان الخطوة الأخيرة في عملية الاختبار هذه. ومن حيث المبدأ، من الواضح أن الرياضيات تشبه من حيث عملية بنائها أي معرفة بشرية أخرى، حيث يؤدي العمل الإبداعي لعلماء الرياضيات إلى استدلالات توضيحية، وهي كالبراهين، ولكنها تكتشف عن طريق الاستدلال المعقول، من خلال التخمين (Polya, 1954). لقد كانت الطريقة التي تعامل فيها علماء الرياضيات مع البرهان في هذه الدراسة مختلفة جدّاً عن المنحى المنطقي في أغلب الكتب المدرسية. ويعدُّ المنحى المنطقي إعادة بناء مصطنعة للاكتشافات التي أُدخلت عنوة إلى النظام الاستنتاجي، وفي هذه العملية يُفتقد الحدس الذي وجّه عملية الاكتشاف.

الاستنتاجات والمضامين

هدفت هذه الدراسة إلى تحقيق رؤية واستبصار أكثر عمقاً في الإبداع في الرياضيات. وعلى نحو ما اتضح من استعراض الكتابات عن الموضوع والدراسات السابقة، فإن ما يتوافر حاليّاً منها عن الإبداع في الرياضيات ضئيل نسبيّاً. وفي السعي نحو تحقيق فهم أفضل لعملية الإبداع، تبين للكاتب أن نموذج الجشتالت الذي اقترحه هادمرد لا يزال قابلاً للتطبيق في أيامنا هذه. وقد حاولت هذه الدراسة إضافة بعض التفاصيل إلى نموذج هادمرد المتمثل

في الإعداد، الحضـانة، الإشراق، والتحقق، آخذة في الحسبان دور كل من الصور المجازية والحدس والتفاعل الاجتماعي، إضـافة إلى الاستدلال وضرورة استخدام البرهان في عملية الإبـداع. ومـن الجدير بالذكر أن علماء الرياضـيات قـد عملوا في هذه الدراسـة في أجواء مواتية للقيام بدراسات بحثية مطولة. حيث توافر لهم التقاء الذكاء بالمعرفة وأنماط التفكير والشخصـية والتحفيـز، وكذلك البيئة التي مكّنتهم من العمل بإبـداع (Sternberg, 2000; Sternberg & Lubart, 1996, 2000). وقد تكونت مرحلة الإعداد للإبداع في الرياضـيات من مناحٍ كثيرة، اسـتخدمها عالم الرياضـيات في وضع أسـاس للعمل. واشتملت على قراءة الدراسـات القائمـة، والحديـث مع علماء رياضـيات آخرين في مجال الرياضـيات المحدد (Csikszentmihalyi, 1988, 2000)، وتجريب مجموعة متنوعة من الاستدلالات (Polya, 1954)، إضافة إلى استخدام منحى الذهاب والإياب (Back And Forth Approach) في التخمين المنطقي. قال أحد علماء الرياضـيات إنه حاول في البداية معرفة هل السـعي وراء العلاقات يستجيب للظواهر الطبيعية.

تناول علماء الرياضـيات جميعهم في هذه الدراسـة أكثر من مسـألة في الوقت نفسه. وهذا يتفق مع نظرية الاسـتثمار في الإبداع (Sternberg & Lubart, 1996)، حيث استثمر علماء الرياضـيات قـدراً مثاليّاً من الوقت حول المسـائل كلها التي تناولوهـا، ولكنهم كانوا يتحولون إلى مسألة أخرى عند انقطاع بريق الأمل بانفراج قادم. وقد عدّ علماء الرياضيات جميعهـم في هذه الدراسـة أن هـذه المرحلة تعدّ مـن أكثر مراحل الإبداع صـعوبة وأهمية، حيـث كان يتبع العمل المطول مرحلة حضـانة، حيث تطرح المسـألة جانباً (ثم تعاد مرحلة الإعداد لمسألة أخرى مختلفة). وهكذا، فقد حدث تحول في العقل من الشعور إلى اللاشعور فـي أثناء تناول المسـألة. قال أحد علماء الرياضـيات: إن هذه هي المرحلـة التي تبدأ فيها المسألة بالتحدث إليك، في حين قال عالم رياضيات آخر: إنه في هذه المرحلة يبدأ الجانب الحدسـي من الدماغ بالتواصـل مع الجانب المنطقي، وخمّن أن هذا التواصل لم يكن ممكناً في المستوى الشعوري.

يحدث الانتقال من مرحلة الحضانة إلى الإشراق عند اللحظة التي تنعدم فيها التوقعات بحدوث أي انفراج، إذ أفاد عدد من العلماء بأن الانفراج في المسألة قد حدث وهم في طريقهم إلى فراش النوم أو وهم سائرون في الطريق، أو أحياناً وهم يتحدثون إلى شخص آخر عن المسألة. وقد وصف أحد علماء الرياضيات ذلك على النحو الآتي: تتحدث إلى شخص ما ويقول شيئاً ما، ربما كان عاديّاً جدّاً قبل شهر، ولكن عندما يتفوه به في الوقت الذي تكون فيه مستعدّاً لتلقي المعلومة، يتهلّل قائلاً: نعم، بوسعي أن أعملها بهذه الطريقة، أليس كذلك! لكن يجب أن تكون مستعدّاً لذلك. الفرصة تدق بابك، ولكن عليك أن تكون قادراً على فتح الباب.

أما عملية الإشراق، فتحدث بعد تحقق عالم الرياضيات الفكرة التي حدثت من خلال إقامة البرهان. وقد بحث جلّ علماء الرياضيات في هذه الدراسة عن ترابط النتيجة بغيرها من النتائج الموجودة في مجال البحث، وهل اتسقت النتيجة مع النتائج الأخرى، وتناغمت مع التركيبة العامة للمجال، وعندئذٍ يكون بوسع عالم الرياضيات أن يحاول بناء البرهان والبرهان الرسمي. أوضحت الدراسة من حيث معتقدات علماء الرياضيات عن طبيعة الرياضيات وأثرها في بحوثهم، أن أربعة منهم كانوا يميلون إلى الأفلاطونية، لذا، كانوا يسيرون على عكس التيار القائل: إن الأفلاطونية قد أضحت استثناء هذه الأيام. وتجدر الإشارة هنا إلى أن النقاش المفصل عن هذا الجانب يقع خارج نطاق هذا البحث. وعلى الرغم من ذلك، فقد تبين أن المعتقدات المتعلقة بطبيعة الرياضيات قد أثرت في كيفية إجراء علماء الرياضيات هؤلاء البحث، وقد ارتبطت بشدة بمعتقداتهم اللاهوتية (Sriraman, 2004).

وقد أمل علماء الرياضيات أن تلقى نتائج عملهم الإبداعي قبولاً من مجموعة من الخبراء؛ من أجل تضمين عملهم المجال، ولا سيما في صورة نشرة في مجلة علمية مشهورة. وعلى الرغم من ذلك، فإن قبول النتيجة الرياضية التي تعدُّ الإنتاج النهائي للإبداع، لا تضمن البقاء بالمعنى الذي اقترحه داروين (Muir, 1988). وقد لا تجد النتيجة من يتبنّاها من علماء الرياضيات الآخرين، وإذا ما تبنّاها مجتمع علماء الرياضيات بصفتها نتيجة

قابلـة للحياة، فمن الأرجح أن تتعرض لطفرة، وتقود إلى رياضـيات جديدة. وهذه المسـألة على أي حال تقررها المصادفة!

الآثار المترتبة والمضامين

يبـدو من الواضـح أن مـن المفيد في مجـال تدريس الرياضـيات أن نحـدد المواهب الإبداعيـة ونتولـى رعايتها في غرفة الصـف. وعلـى أي حال، فإن الفرق بيـن عمل الطالب الـذي يحاول حل مسـألة معقدة في الرياضـيات وعمـل المختـرع (المبتدع)...هو فرق في الدرجـة فقط (Polya, 1954). وعموماً، فإن الإبداع بصـفته سـمة في التفكير الرياضـي لا يُعـدُّ بـراءة اختـراع لعالـم الرياضـيات (Krutestskii, 1976). وقـد ركـزت معظـم الدراسـات المتعلقة بالإبداع على الأشـخاص المشـهورين (Arnheim, 1962; Gardner, 1993,1997; Gruber, 1981). يـرى المؤلـف أنـه يمكـن تكييـف النماذج المعاصـرة من بحـوث الإبداع لدراسـة عينات غير مشـهورة، مثل طـلاّب المرحلة الثانوية. وسـتُظهر مثل هذه الدراسـات شـيئاً كثيراً لمجتمع بحوث تعليم الرياضـيات بخصـوص الإبداع في غرفة الصف. ويمكن للتربويين أن يسألوا أنفسهم: (أ) هل يظهر الإبداع في الرياضيات في غرفة الصـف؟ (ب) كيـف يمكن للمعلم أن يحـدد العمل الإبداعي؟ من الإجابـات المحتملة لمثل تسـاؤلات كهـذه هو إعادة بناء عمل الطلاّب وتقويمه بصـفته نظام تطـور فريداً من الإبداع (Gruber & Wallace, 2000) عـن طريـق تضـمين بعض الأوجـه التـي اقترحها جروبر ووالاس. وهذا يستوجب ضرورة إيجاد مسائل مناسبة للمستويات الملائمة تثير الإبداع لدى الطلاّب. ومن السـمات الشائعة بين علماء الرياضـيات الاعتماد على حالات معيّنة أو إعادة الصياغات المتماثلة، أو المسائل المشابهة التي تحاكي أوضاع المسألة الأصلية وهم يبحثون عـن الحل (Polya, 1954; Skemp, 1986). وإن ابتداع رياضـيات أصـيلة يتطلب مسـتوى عالياً جدّاً من التحفيز والدافعية والمثابرة إضـافة إلى التأمل، التي تعدُّ هذه كلها مؤشـرات علـى الإبـداع (Amabile, 1983; Policastro & Gardner, 2000; Gardner, 1993). يتضـمن أدب الإبداع والدراسـات المتعلقة بـه أن معظم الأفراد يميلـون إلى الانجذاب نحو التعقيد، الأمر الذي لا تسـتطيع جلّ المناهج المدرسـية أن توفره إلا بنسـبة قليلة، إذ نادراً

ما تستخدم الممارسات الصفية ومناهج الرياضيات مسائل ذات أسس رياضية، أو تتيح للطلاّب مدة زمنية طويلة ليتفاعلوا معها باستقلالية. ويرى الكاتب أنه لكي يظهر الإبداع في الرياضيات في غرفة الصف، لا بد من إعطاء الطلاّب فرصة معالجة المسائل غير الاعتيادية من حيث التركيب والتعقيد، التي لا تتطلب الدافعية والمثابرة فحسب، بل التأمل والتفكر المتعمقين. وهذا يتطلب أن يتيح المربون الفرصة أمام الطلاّب للتفكر مليّاً في المسائل التي حُلّت سابقاً، وإجراء مقارنات بين مسائل ملبسة متعددة (English, 1991, 1993; Hung, 2000; Maher & Kiczek, 2000; Maher & Martino, 1997; Maher & Speiser, 1996; Sriraman, 2003; Sriraman, 2004B). إضافة إلى ذلك، فإن تشجيع الطلاّب على البحث عن المتشابهات ضمن مجموعة من المسائل يعزز السلوك الرياضي (Polya, 1954)، ويقود الطلاّب إلى اكتشاف بنى وقواعد رياضية معقدة نوعاً ما بطريقة مماثلة لإبداع علماء الرياضيات.

قائمة المراجع

Amabile, T. M. (1983). *Social Psychology Of Creativity: A Componential Conceptualization*. Journal Of Personality And Social Psychology, 45, 357–376.

Arnheim, R. (1962). *Picasso's Guernica. Berkeley*: University Of California Press.

Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology*. Siam Review, 11, 429–469.

Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning*. Journal Forresearch In Mathematics Education, 15, 35–49.

Corbin, J., & Strauss, A. (1998). *Basics Of Qualitative Research*. Thousand Oaks, Ca: Sage.

Csikszentmihalyi, M. (1988). *Society, Culture, And Person*: A Systems View Of Creativity.

In R. J. Sternberg (Ed.), *The Nature Of Creativity: Contemporary Psychological Perspectives* (Pp. 325–339). Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications Of A Systems Perspective For The Study Of Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 313–338). Cambridge University Press.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Hough–ton Mifflin.

English, L. D. (1991). *Young Children's Combinatoric Strategies*. Educational Studies In Mathematics, 22, 451–474.

English, L. D. (1993). *Children's Strategies In Solving Two– And Three–Dimen–sional Combinatorial Problems*. Journal For Research In Mathematics Ed–ucation, 24(3),255–273.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy Of Mathematics Education*, Briston, Pa: Falmer.

Ernest, P. (1994). *Conversation As A Metaphor For Mathematics And Learning*. Proceedings Of The British Society For Research Into Learning Mathemat–ics Day Conference, Manchester Metropolitan University (Pp. 58–63). Not–tingham: Bsrlm.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity*. In D. Tall (Ed.). Advanced Math–ematical Thinking (Pp. 42–53). Kluwer Academic.

Frensch, P., & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving*: Principles And Mechanisms. Mahwah, Nj: Erlbaum.

Gallian, J. A. (1994). *Contemporary Abstract Algebra*. Lexington, Ma: Heath.

Gardner, H. (1993). *Frames Of Mind*. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1997). *Extraordinary Minds*. New York: Basic Books.

Gruber, H. E.(1981). *Darwin On Man*. Chicago: University Of Chicago Press.

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). The Case Study Method And Evolving Sys–temsapproach For Understanding Unique Creative People At Work. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). Cambridge Univer–sity Press.

Hadamard, J. W. *(1945). Essay On The Psychology Of Invention In The Mathemati–cal Field*. Princeton University Press.(Page References Are To Dover Edi–tion, New York 1954).

Hanna, G. (1991). *Mathematical Proof*. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (Pp. 54–60). Kluwer Academic Publishers.

Hung, D. (2000). *Some Insights Into The Generalizations Of Mathematical Mean–ings*. Journal Of Mathematical Behavior, 19, 63–82.

Krutetskii, V. A.(1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children* .(J. Teller, Trans. & J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.

L'enseigement Mathematique. (1902), 4, 208–211, And (1904), 6, 376.

Lester, F. K. (1985). *Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem Solving* . In E. A. Silver, Teaching And Learning Mathematical Problem Solving.Multiple Research Perspectives (Pp. 41–70). Hillsdale, Nj: Erlbaum.

Maher,C. A., & Kiczek R. D. (2000). *Long Term Building Of Mathematical Ideas Related To Proof Making* . Contributions To Paolo Boero, G.Harel, C. Maher, M.Miyasaki. (Organisers) Proof And Proving In Mathematics Education. Icme9– Tsg 12. Tokyo/Makuhari, Japan.

Maher ,C. A., & Speiser M. (1997) *How Far Can You Go With Block Towers? Stephanie's Intellectual Development* . Journal Of Mathematical Behavior 16(2), 125–132.

Maher, C. A., & Martino A. M. (1996) *The Development Of The Idea Of Mathematical Proof: A 5–Year Case Study* . Journal For Research In Mathematics Education, 27(2), 194–214.

Manin, Y. I.(1977). *A Course In Mathematical Logic* , New York: Springer–Verlag,

Minsky, M. (1985). *The Society Of Mind* . New York: Simon & Schuster.

Muir, A. (1988). *The Psychology Of Mathematical Creativity* . Mathematical Intelligencer,10(1), 33–37.

Nicolle, C. (1932). *Biologie De L'invention* , Paris: Alcan.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative Research And Evaluation Methods. Thousand Oaks : Sage.

Poincaré, H. *(1948). Science And Method* . New York: Dover.

Policastro, E., & Gardner, H. *(2000).* From Case Studies To Robust Generalizations: An Approach To The Study Of Creativity . In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 213–225). Cambridge University Press.

Polya, G. (1945). *How To Solve It* . Princeton, Nj: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). Mathematics And Plausible Reasoning: Induction And Analogy In Mathematics (Vol. Ii). Princeton, Nj: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Skemp, R. (1986). *The Psychology Of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Sriraman, B. (2003). *Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations*. The Journal Of Secondary Gifted Education. Xiv(3), 151–165.

Sriraman, B (2004). *The Influence Of Platonism On Mathematics Research And Theological Beliefs*. Theology And Science, 2(1), 131–147.

Sriraman, B. (2004). *Discovering A Mathematical Principle*: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.

Sternberg, R. J. (1979). *Human Intelligence: Perspectives On Its Theory And Measurement*. Norwood, Nj: Ablex.

Sternberg, R.J. (1985). *Human Abilities: An Information Processing Approach*. New York:w. H. Freeman.

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook Of Creativity*. Cambridge University Press. Sternberg. R. J., & Lubart, T. I. (1996). *Investing In Creativity*. American Psychologist, 51, 677–688.

Sternberg. R. J., & Lubart, T. I. (2000). *The Concept Of Creativity : Prospects And Paradigms*. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 93–115). Cambridge University Press.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1984). *Introduction To Qualitative Research Methods: The Search For Meanings*. New York: Wiley.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests Of Creative Thinking: Norms–Technical Manual*. Lexington, Ma: Ginn.

Ulam, S. (1976). *Adventures Of A Mathematician*. New York: Scribners.

Usiskin, Z. P. (1987). *Resolving The Continuing Dilemmas In School Geometry*. In M. M.Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.) Learning And Teaching Geometry, K–12: 1987 Yearbook (Pp. 17–31). Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Wallas, G. (1926). *The Art Of Thought*. New York : Harcourt, Brace & Jovanovich.

Weisberg, R.W. (1993). *Creativity: Beyond The Myth Of Genius*. New York: Freeman.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks On The Foundations Of Mathematics* (Revised Edition), Cambridge, Massachusetts Institute Of Technology Press

الملحق أ: العُرف المتبع في المقابلات

لقد طوّرت أداة المقابلة بوساطة إجراء تعديلات على الأسئلة المدرجة في الاستبانات الواردة في مجلة «تدريس الرياضيات» (L'enseigement Mathematique, 1902) و (Muir, 1988):

1. صف موقعك في العمل ودورك فيه.
2. هل تمتلك حرية اختيار المسألة الرياضية التي تعالجها، أم أن من يقرر ذلك هو مكان عملك؟
3. هل تعمل وتنشر بصورة رئيسة بصفتك فرداً أم جزءاً من مجموعة؟
4. هل يعدُّ الإشراف على البحث عاملاً إيجابيّاً أم سلبيّاً في عملك؟
5. هل تنظم وقتك في دراسة الرياضيات؟
6. ما الأنشطة المفضلة التي تمارسها، باستثناء الرياضيات، في أوقات فراغك؟
7. هل تتذكر أي عوامل ذات تأثير مباشر، سواء كانت العائلة أو المعلمين أو الزملاء أو الكتب المدرسية، كان لها أهمية كبيرة في تطورك في الرياضيات؟
8. أي المجالات تعلمتها من تلقاء نفسك؟ وأي المجالات تعمل فيها الآن؟ إذا كان المجالان مختلفين، فما أسباب ذلك؟
9. هل تسعى إلى الحصول على نظرة عامة شاملة عن الرياضيات، ليست ذات علاقة مباشرة بمجال بحثك؟
10. هل تفرق بين عمليات التفكير في التعلم والبحث؟
11. عندما تكون على عتبة البدء بموضوع جديد، هل تفضل تجميع ما هو معروف أولاً، أم أنك تجرب المنحى الخاص بك؟
12. هل تركز على مسألة واحدة وقتاً طويلاً، أم على مسائل عدة في آن واحد؟
13. هل كانت أفضل الأفكار لديك وليدة جهود طويلة مقصودة، أم أنها أتت وأنت منشغل بمهام أخرى ليست ذات صلة بالموضوع؟

14. كيف تكوّن حدساً عن حقيقة افتراض ما؟
15. هل يؤدي الحاسوب دوراً في عملك الإبداعي (التفكير الرياضي)؟
16. أي نوع من الصور العقلية تستخدم عندما تفكر في شيء رياضي؟

ملاحظة: حذفت الأسئلة المتصلة بالمسائل الوجودية واللاهوتية في هذه الوثيقة. وقد تناول في سريرمان (Sriraman, 2004) الحديث عن المناقشات التي نجمت عن هذه الأسئلة.

ملاحظات

يشير ضمير المتكلم في جميع الروايات إلى الشخص الذي أجرى المقابلة، في حين تشير الحروف الأبجدية: أ، ب، ت، ث، ج إلى علماء الرياضيات المشاركين في الدراسة.



النبوغ في الرياضيات وحل المسائل والقدرة على صوغ التعميمات

خبرات حل المسائل لدى أربعة من الطلاب الموهوبين

بهارات سريرامان

ملخص

تعدُّ المهام الرياضية المعقدة، مثل حل المسائل، طريقة مثالية لتزويد الطلاب بفرص لتطوير العمليات الرياضية العليا، مثل التمثيل والتجريد والتعميم. طُلب في هذه الدراسة إلى تسعة من طلاب الصف التاسع المبتدئين الذين التحقوا بالصف الخاص بدراسة مادة الجبر المسرّع، حل مسائل مركبة غير اعتيادية في صحائف مذكراتهم اليومية. وقد حُددت المسائل بحيث تقدم إلى الطلاب على مدار ثلاثة أشهر، بمستوى متزايد من التعقيد. والصورة العامة التي كانت تميز حلول المسائل الخمس هي مبدأ برج الحمام أو مبدأ ديريشلت (Dirichlet Principle)[1]. وقد نجح الطلاب الأربعة النابغون في الرياضيات في اكتشاف الصورة العامة التي تميز حلول المسائل الخمس والتعبير عنها لفظيّاً، في حين أخفق الطلاب غير الموهوبين في اكتشاف خفايا الصورة العامة. وهذا يؤكد فرضية وجود علاقة بين النبوغ الرياضي والقدرة على حل المسائل، وكذلك القدرة على التعميم. ويوضح هذا البحث خبرات حل المسائل لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات، وكيف يصوغون

1) يعتقد أن عالم الرياضيات الألماني يوهان ديريشلت Dirichlet Johann هو أول من طرح هذه الفكرة في عام 1834 ، وأطلق عليها اسم مبدأ الجارور أو الدُّرج أو مبدأ الرف. لذا، فإنها غالباً ما يشار إليها بمبدأ صندوق ديريشلت. وقد أصبح هذا المبدأ يسمى مبدأ برج الحمام Pigeonhole principle، لكن الاسم الأصلي لا يزال مستخدماً في اللغات الفرنسية والإيطالية والألمانية- المراجع

التجريد والتعميمات، مع تبعات التسريع والحاجة إلى التمايز في حصص رياضيات المرحلة الثانوية.

مقدمة

تتمثل أحد الجوانب المثيرة في فكر الإنسان في مقدرته على التعميم من الخبرات الخاصة المحددة، ومن ثم تكوين مفاهيم مجردة جديدة. تدعو مبادئ ومعايير المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة The Principles & Standards Of The National Council Of Teachers Of Mathematics (Nctm, 2000) إلى برامج تعليمية تركز على حل المسائل بهدف مساعدة الطلاب على تطوير درجة التعقيد في العمليات الرياضية، مثل التمثيل والمنطق الرياضي والتجريد والتعميم. وغني عن القول، أن على الطلاب تطوير عمليات رياضية أكثر تطوراً، لا سيما حل المسائل والتمثيل والمنطق، وكذلك مقدرتهم المتزايدة على التفكير التأملي، ومراقبة أعمالهم التي تقود إلى التجريد ومقدرة أكبر على التعميم. وهكذا، فإن المقدرة على التعميم تنجم عن بعض الخبرات الرياضية التي تعدُّ مكوناً مهمّاً من مكونات القدرة الرياضية، إضافة إلى أن تطوير مثل هذه القدرة يُعدُّ أحد أهداف تعليم/تعلم الرياضيات (Nctm, 2000).

واهتم علماء النفس أيضاً بظاهرة التعميم، وحاولوا ربط القدرة على التعميم بمقاييس الذكاء (Sternberg, 1979)، وقدرات حل المشكلات المعقدة (Frensch & Sternberg, 1992). يرى جرينز (Greenes, 1981) أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يختلفون عن المجموع العام من حيث مقدرتهم على صياغة المسائل بصورة عفوية، والمرونة في معالجة البيانات، والقدرة على التجريد والتعميم. وهناك دليل تجريبي على وجود فروق في التعميم بين الطلاب الموهوبين وغير الموهوبين في مستوى ما قبل المدرسة (Kanevsky, 1990). ويوجد أيضاً عدد قليل من الدراسات على مستوى المرحلة الثانوية توثق وتصف كيف يتعامل الطلاب النابغون مع حل المسائل المجردة، إضافة إلى تعميم المفاهيم الرياضية. وهذا يقود بدوره إلى الأسئلة الآتية:

1. ما نوع سلوكات حل المشكلات التي يتعامل بها طلاب المرحلة الثانوية؟

2. ما أوجه الاختلاف بين سلوكات حل المشكلات للطلاب الموهوبين وغير الموهوبين؟
3. كيف يجرد الطلاب النابغون المفاهيم الرياضية ويعمّمونها ؟

تعريفات

موقف حل المسألة: يمكن أن يعرّف موقف حل المسألة بالموقف الذي يشتمل على:

- مهمة مفاهيمية.
- وضع يكون فيه الفرد قادراً على الفهم، سواء أكان ذلك بوساطة التعلم السابق (Brownwell, 1942; Kilpatrick, 1985)، أم تنظيم المهمة (English, 1992)، أم طريق الأصالة (Birkhoff, 1969; Ervynch, 1991).
- موقف لا يعرف الفرد في أثنائه أي وسيلة مباشرة للشعور بالرضا والتوازن.
- موقف يعاني فيه الفرد حيرة وارتباكاً في وضع المسألة، لكنه لا يعاني ارتباكاً مطلقاً.
- نقطة متوسطة على متصل (Continuum)، يمتد من الغموض على أحد الطرفين إلى حالة من الفهم التام عند الطرف الآخر (Kilpatrick, 1985).

التعميم: العملية التي يشتق الفرد من خلالها أو يستنتج قاعدة من حالات خاصة. وتشتمل على سمات التجريد (Davis & Hersh, 1981)، وتحديد القواسم المشتركة (Dreyfus, 1991)، وتوسيع نطاق الصدق (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Polya, 1954).

إستراتيجيات حل المشكلات: تشير إلى الأفعال و/أو الطرائق التي يستخدمها الطلاب من أجل فهم الموقف المُشكِل، وحله. وقد صُنّفت إستراتيجيات الطلاب في هذه الدراسة وفقاً لنموذج ليستر (Lester, 1985) المفاهيمي المتصل بسلوك حل المشكلة، والموضح في مراجعة الأدب والدراسات السابقة ذات العلاقة بالموضوع.

مراجعة الكتابات والدراسات السابقة

يُعدُّ نموذج جورج بوليا، عالم الرياضيات المشهور، واحداً من نماذج حل المشكلات الأكثر شهرة، ويشتمل هذا النموذج على أربع مراحل، هي: الفهم، والتخطيط، والتطبيق، والتأمل والمراجعة. ومن المآخذ على نموذج بوليا أنه كان حسابيّاً في طبيعته، وأن البحوث الناجمة عنه ركزت أساساً على التجريب. عزا لستر(Lester, 1985) إخفاق غالبية الجهود التعليمية الهادفة إلى تحسين أداء الطلاب في حل المسائل، إلى التركيز الزائد عن حده على مهارات التجريب، في الوقت الذي أُغفلت فيه المهارات الإدارية اللازمة لتنظيم نشاط الفرد (مهارات ما وراء المعرفة) (ص. 62). وقد أشير إلى أن نشاط ما وراء المعرفة، أو معرفة عمليات تفكير الشخص، أو التنظيم الذاتي، توفر أرضية لتطبيق التجريب والعمليات الحسابية (Lester, 1985; Schoenfeld, 1985, 1992)؛ لذا، أجرى «لستر» تعديلاً على نموذج بوليا ليشتمل على مكونات المعرفة وما وراء المعرفة. ففي مكون المعرفة، أعاد تسمية المراحل الأربع: الفهم، والتخطيط، والتطبيق، والمراجعة (Understanding, Planning, Implementing, & Looking Back) ، على النحو الآتي: التوجه، والتنظيم، والتنفيذ، والتحقق (Orientation,Organization, Execution, & Verification). وتألف مكون ما وراء المعرفة من ثلاثة أنواع من المتغيرات، هي: متغيرات الشخص، ومتغيرات المهمة، ومتغيرات الإستراتيجية. وفيما يأتي وصف لفئات المعرفة الأربع:

التوجه (Orientation)، يشير إلى السلوك الإستراتيجي نحو تقويم المشكلة (المسألة) وفهمها. ويشتمل على إستراتيجيات شمولية وتحليلية للمعلومات، وتمثيل أولي ولاحق، وتقويم مستوى الصعوبة وفرص النجاح.

التنظيم (Organization) ، يشير إلى تحديد الأهداف، والتخطيط الشامل، والتخطيط المرحلي.

فئة التنفيذ (Execution)، تشير إلى تنظيم السلوك ليتفق مع الخطة. ويشتمل على أداء الأعمال من مرحلة إلى أخرى، ومراقبة التقدم، واتساق الخطط المرحلية، والمفاضلة بين القرارات (السرعة مقارنة بالدقة).

وأخيراً، التحقق (Verification)، ويتألف من تقويم القرارات المتخذة، وتقويم نتاجات الخطط المنفذة. ويشتمل على تقويم الإجراءات المتخذة في مستويات التوجه والتنظيم والتنفيذ.

يتألف مكوّن ما وراء المعرفة من وجهة نظر ليستر من ثلاث فئات من المتغيرات، هي: متغيرات الشخص، ومتغيرات المهمة، ومتغيرات الإستراتيجية. تشير متغيرات الشخص إلى نظام معتقدات الفرد، والسمات المؤثرة التي قد تؤثر في الأداء، في حين تشير متغيرات المهمة إلى سمات المهمة، مثل: المحتوى والسياق والتركيب وبناء الجملة والعملية. مثلاً، تؤثر معرفة الفرد بملامح المهمة في الأداء وسماتها. وأخيراً، تشير متغيرات الإستراتيجية إلى معرفة الفرد بالإستراتيجيات التي تعين على فهم الخطط وتنظيمها وتنفيذها وتفحصها وتقويمها. وتُربط سلوكات ما وراء المعرفة هذه بفئات المعرفة الأربع. يكمن هدف نموذج لستر المفاهيمي في محاولة وصف السلوكات في مراحل المعرفة الأربع، من حيث «نقاط» حدوث أفعال ما وراء المعرفة في أثناء حل المسألة. ويصف الفلاسفة أحياناً فعل ما وراء المعرفة هذا على أنه «التفكير حول التفكير».

وقد اقترح شونفلد (Scheonfeld 1985, 1992) وجوب دراسة حل المسألة ضمن السياق الأوسع لما يعنيه مفهوم تعلم «التفكير الرياضي»، حيث وصف هذا التفكير على أنه تطوير وجهة نظر رياضية، وتقويم عمليات التمثيل والتجريد، وامتلاك الميل، والاستعداد لتعميمها.

وعلى أي حال، فإن التعميم مرتبط ارتباطاً لا ينفصل بعملية التجريد (Davydov, 1990, P, 13). ووفقاً لرأي دافيدوف (Davydov 1990)، فإن عملية تحديد صفة ما بصفتها عامة، وفصلها عن صفات أخرى يتيح للطفل تحويل الفئة العامة إلى أشياء مستقلة ومحددة من الأفعال المتلاحقة، في حين تحدث عملية التجريد عند تركيز الفرد على سمات وخصائص محددة لشيء معيّن، ومن ثم عدّ هذه الخصائص منعزلة عن الأصل. ويمكن اللجوء إلى ذلك لفهم جوهر ظاهرة معيّنة بهدف تطبيق النظرية نفسها على الحالات التي تنطبق عليها.

وقد ركزت البحوث المبكرة عن التعميم على قدرات طلاب المدارس الابتدائية على تعميم مفاهيم الأعداد (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Shapiro, 1965). واهتم الباحثون كثيراً بعملية التعميم في تعليم الرياضيات في الاتحاد السوفييتي سابقاً (Davydov, 1990; Krutetskii, 1976; Shapiro, 1965).

وفي هذا السياق، كتب شابيرو (Shapiro, 1965) الفقرة الآتية عن الطلاب الموهوبين في الرياضيات:

> «تحدث عملية تطوير التعميمات من الأمثلة الأولى في مراحل التعلم المبكرة. ومع مرور الوقت، غالباً ما يدمج التحول في الشكل العام مع التعميمات، ويطبق فوراً على مجموعة كاملة من المسائل من نوع واحد. أما لدى الطلاب الأقل قدرة، فإن التعميمات تنضج تدريجيّاً، وتظهر في مراحل متأخرة، أو أنها لا تنضج أبداً» (ص. 95).

وقد حلّل كروتتسكي (Krutetskii, 1976) بدوره، قدرة التعميم لكل من الطلاب العاديين، والطلاب الموهوبين ضمن سلسلة من التجارب، وافترض أن الطلاب ذوي القدرات المختلفة يتسمون بالتباين في درجة التطور، من حيث القدرة على تعميم المادة الرياضية، والقدرة على تذكر التعميمات (ص. 84). وقد أجرى كروتتسكي دراسة على تسعة عشر طالباً يتباينون في قدراتهم الرياضية. واستناداً إلى تجاربه مع هؤلاء الطلاب، فقد توصّل إلى أنه كان بمقدور الطلاب الأكثر قدرة (الموهوبين) تكوين تعميمات رياضية على نحوٍ أسرع وأوسع. ولاحظ أن هؤلاء الطلاب من «أصحاب القدرة» كانوا قادرين على بيان التركيبة العامة للمسائل وفهمها قبل أن يحلوها، في حين لم يكن بمقدور الطلاب الأقل قدرة إدراك العناصر المشتركة في المسائل، وأخفق الطلاب «غير القادرين» في هذه المهمة. ولكي يتمكن الطلاب من صياغة التعميمات صياغة صحيحة، يتعين عليهم التمكن من التجريد من محتوى معيّن، وتحديد أوجه الشبه والتراكيب والعلاقات (Krutestskii, 1976).

وفي الواقع أن غالبية الدراسات المتعلقة بعملية التعميم تجري ضمن سياق مفاهيم الأعداد وعلم الحساب والجبر. ويبدو أنه لا توجد بحوث عن التعميم ضمن سياق العمليات

الرياضية العليا، مثل حل المسائل على مستوى المرحلة الثانوية. ولا يوجد على وجه الخصوص بحوث عن التباين في سلوكات حل المسائل بين الطلاب الموهوبين وغير الموهوبين. وتكتسب مثل هذه البحوث قيمة كبيرة بالنسبة إلى التربويين الذين يسعون لتقديم منهاج متمايز في غرفة الصف التي تضم طلاباً متفوقين وغير متفوقين.

المنهجية

كان الباحث في هذه الدراسة معلماً في مدرسة ثانوية ريفية في الغرب الأوسط من الولايات المتحدة، شاركه فيها تسعة من الطلاب المبتدئين (أربعة ذكور، وخمسة إناث)، ملتحقين بصف مسرَّع لمادة الجبر1 التي يدرِّسها الباحث. وكان الطلاب التسعة الملتحقون بصف الجبر المسرَّع راغبين في المشاركة في هذه الدراسة ومستعدين لذلك، وكانوا جميعاً من البيض الذين ينحدرون من خلفية اجتماعية واقتصادية من الطبقة الوسطى. ويتطلب الالتحاق بصف الجبر المسرّع في هذه المدرسة الثانوية توصية من معلمي الصف الثامن، إضافة إلى أداء يفوق المتوسط في متطلبات الجبر السابقة.

لم يطّلع الباحث على بيانات اختبار الطلاب التسعة في الصف في أثناء جمع البيانات وتحليلها. وعلى الرغم من ذلك، وبعد الانتهاء من جمع البيانات وتحليلها، فقد اطلع الباحث على بيانات الاختبار الخاصة بالطلاب التسعة، واكتشف أن أربعة منهم قد صُنِّفوا على أنهم طلاب متفوقون في الرياضيات في مدارسهم الابتدائية، حيث استند التصنيف إلى مجموعة متنوعة من العوامل، مثل علامات اختبار الذكاء (أكثر من 124)، واختبار ستانفورد التحصيلي (Stanford Achievement Test) (المئين 95)، وتوصيات المعلمين والمرشدين التربويين. ويوضح جدول (1:2) صورة موجزة لتحصيل الطلاب التسعة.

كانت كتابة الصحائف اليومية جزءاً مكملاً لدورة الجبر المسرَّعة، حيث يعين المعلم بصورة متكررة مسألة غير عادية أو لغزاً كل أسبوعين، ويحل الطلاب هذه المسائل أو الألغاز في صحائف مذكراتهم اليومية. وقد طلب الباحث إلى الطلاب أن يدوّنوا كل شيء جربوه وفيها «الخرابيش» في هذه المذكرات.

جدول 1،2 ملخص تحصيل الطلاب التسعة

الإسم	اختبار الذكاء[1]	SAT علامة الرياضيات[2] العلامة الخام (من 09).	SAT تطبيقات الرياضيات العلامة[3] الخام (من 03)	OLSAT غير لفظي العلامة الخام[4] (من 63)
إيمي	162	89	30	36
جون	124	85	29	32
مات	140	87	30	33
هانا	126	85	28	32
المجموعة الفرعية أ: الطلاب النابغون في الرياضيات ممن صاغوا التعميمات				
إيمي	162	89	30	36
جون	124	85	29	32
مات	140	87	30	33
هانا	126	85	28	32
المجموعة الفرعية ب: الطلاب غير الموهوبين ممن صاغوا تعميمات خاطئة				
بارت	100	68	19	22
جيم	120	74	21	25
إيزابيل	05	70	20	22
المجموعة الفرعية ج: الطلاب غير الموهوبين ممن لم يصوغوا تعميمات				
جامي	98	60	15	20
هيدي	102	62	16	21

1) ستانفورد- بينيه (الطبعة الرابعة). الوسيط = 001؛ الانحراف المعياري= 16؛ البيانات في الأعمدة 2–3 مستخلصة من سلسلة SAT (مطبقة على طلاب الصف الأول) 2) تألف جزء الرياضيات من تسعين بنداً عن مفاهيم الأرقام (34)، الحساب (26) والتطبيق (30). 3) تألف جزء الرياضيات من ثلاثين بنداً عن حل المسائل (12)، الرسوم البيانية (3)، الهندسة (6) والقياس (9). 4) اختبار قدرات مدرسة أوتيس-لينون Otis-Lennon School Ability Test-OLSAT- الطبعة السابعة، طُبّق على طلاب الصف السادس. يتألف الجزء غير اللفظي من الامتحان من بنود حول المنطق الرقمي (18)، والمنطق الكمي (18) مفاهيم رياضية

وقد منح الطلاب الذين أتموا التلميحات الثلاثة، وضمّنوا جميع أعمالهم و«خربشاتهم» دفاتر مذكراتهم، علامة كاملة. أما التلميحات الثلاثة التي زوّد بها الباحث الطلاب فهي:

1. أعد صياغة المسألة بكلماتك الخاصة. وبعبارة أخرى، ما المطلوب في هذه المسألة؟
2. كيف ستبدأ حل المسألة؟

3. حُلَّ المسألة، واكتب ملخصاً عن الأمور التي سارت على نحو جيد، والتي لم تكن كذلك.

كشفت المذكرات التي كتبت على مدار العام الدراسي أن جلّ الطلاب كان وصفهم إستراتيجيات الحل واضحاً، وكانوا قادرين على معالجة المسائل الرياضية التي لم يتضمنها المنهاج المدرسي. ومن أجل الإبقاء على الدراسة طبيعية، بعيدة عن التدخل قدر الإمكان، مع المحافظة على اتساق الممارسات داخل الغرفة الصفية، حدّد الباحث المسائل المركبة (Combinatorial Problems) الخمس (انظر ملحق أ) للدراسة بصفتها واجبات يحلها الطلاب في صحائف مذكراتهم بدءاً بالمسألة الأقل تعقيداً. وقد حُدّدت هذه المسائل بصفتها واجبات خلال ثلاثة شهور.

اختيرت هذه المسائل بكل دقة وعناية على أن تمثل أوضاعاً تسهل عملية التمثيل والمنطق والتجريد، ومن ثم يُتوصل في نهاية المطاف إلى صياغة تعميمات. وقد طُبّقت المعايير الآتية لتحديد هذه المسائل:

1. يجب أن تعالج المسائل أفكاراً رياضية معمقة، بمعنى ألا تكون عادية متكررة، وأن يتطلب حلها المثابرة والإبداع من جانب الطالب.
2. كانت المسائل مركبة بطبيعتها، ويعود ذلك إلى أن بحوث تعليم الرياضيات المطبقة على طلاب المدارس الابتدائية، قد أشارت إلى أن الأطفال لديهم قدرات حدسية في معالجة المسائل المركبة (English, 1992).
3. مثلت المسائل أوضاعاً متنوعة ومتزايدة في تعقيدها، وكانت خطة زيادة التعقيد في المسائل تدريجيّاً متسقة مع البحوث الأولى حول عملية التعميم (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Krutestskii, 1976).
4. كانت المسائل وطرائق الحل قابلة للتعميم، إضافة إلى ذلك، فقد اتسمت الحلول لفئة من المسائل التي تبدو مختلفة ومشتركة في العمومية، بأنها صعبة جدّاً، وقد أُطلق عليها اسم مبدأ برج الحمام (Pigeonhole Principle) الذي ينص على ما يأتي: إذا وضعت الحمامات (م) في تجاويف برج الحمام (ن)، وكانت (م)

أكبر من (ن)، (م > ن)، فعندئذٍ لا بد من أن يكون في أحد تجاويف برج الحمام أكثر من حمامة واحدة.

واقترح الباحث أن الإستراتيجيات التي يطورها الطلاب يمكن أن تتطور مع تعقيدات المسألة، وهذا يعتمد على التمرس الرياضي للطلاب، وفي نهاية المطاف يقود بعض الطلاب إلى اكتشاف المبدأ العام الذي يمكن أن يطبق عليها جميعاً.

جمعت البيانات من خلال كتابات الطلاب لمذكراتهم، ومن خلال المقابلات التشخيصية، وكتابات المعلمين في مذكراتهم اليومية في الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي. وقد كُلّف الطلاب بخمس مسائل مركبة بدءاً من المسألة الأولى، وكان المسوغ وراء تقديم ثلاثة تلميحات رغبة الباحث في البدء بمراحل حل المشكلات الأربع (Lester, 1985). وقد أعطي الطلاب مدة تراوحت من أسبوع إلى عشرة أيام لحل المسألة، وكان الباحث خلالها يجمع صحائف مذكرات الطلاب الكتابية أسبوعيّاً للاطلاع على حلولهم، ومن ثم يرصد مجموعة من الأسئلة يطرحها عليهم في أثناء المقابلة.

جرت مقابلة الطلاب بعد أسبوع من تسليم المذكرات التي تضمنت كتاباتهم قبل الدوام الدراسي أو بعده. واتّبع الباحث أسلوب المقابلة الإكلينيكية (Clinical Interview) الذي ابتدعه بياجيه (Piaget, 1975)، وطبّقه على دراسة عملية التفكير لدى الطلاب. وكانت المقابلات مفتوحة النهاية بهدف إعطاء الطلاب فرصة التعبير عن عملياتهم الفكرية عند حل المسألة. وفي جلسات المقابلات الخمس جميعها التي أجريت مع الطلاب على مدار ثلاثة شهور، وجّهت إليهم الأسئلة الآتية:

1. كيف بدأت التعامل مع المسألة؟
2. كم أمضيت من الوقت في هذه المسألة؟
3. ما وجه المقارنة بين هذه المسألة ومسائل الجبر التي نتعامل معها في الصف الآن؟
4. كيف تتحقق صحة إجابتك؟
5. كيف توضح إجابتك لصديق؟
6. هل استخدمت إجراءً معروفاً في حل المسألة؟

7. وأما فيما يتصل بالمسائل الثانية والثالثة والرابعة والخامسة، فقد سئل الطلاب هل أجروا أي تحسين أو تعديل على إستراتيجية سابقة، وهل توصلوا إلى أوجه شبه في المسائل أو الحلول؟

لقد صيغت هذه الأسئلة أملاً في أن يتمكن الطلاب من التعبير عن إستراتيجيات حلولهم. وأراد الباحث أيضاً من الطلاب أن يبرروا إجاباتهم، ويوضحوا المنطق الذي استخدموه في الحل. وقد وجّه السؤالين «الثالث و السابع» لحث الطلاب صراحة على الوصول إلى تعميمات. وبعد كل جولة من المقابلات، كان الباحث يسجل انطباعاته عن المقابلات في مذكراته الخاصة بهذا الغرض، حيث سُجلت المقابلات صوتيّاً على أشرطة، ومن ثم حُوّلت لغويّاً بصورة حرفية، ودُققت أيضاً الأخطاء التي فيها. تألفت البيانات من كتابات الطلاب في دفاتر المذكرات الخاصة بهم، ومن مخطوطات المقابلات، إضافة إلى المذكرات التي دوّنها الباحث.

تبع ذلك تحليل لكتابة صحائف الطلاب والبيانات المدونة، باستخدام مناحٍ مستقاة من نظرية راسخة ومبررة ومثبتة (Glaser & Strauss, 1977) (Grounded Theory). واستخدمت في ذلك طريقة المقارنة الثابتة (Constant Comparative) بهدف البحث عن أنماط في البيانات. ويعدُّ إجراء المقارنات من السمات الأساسية لمنهجية النظرية المثبتة. وفي هذا السياق، جرى تفعيل الفئات الأربع المتمثلة في التوجه والتنظيم والتنفيذ والتحقق المستمدة من نموذج ليستر لحل المشكلات. وقارن أيضاً الباحث سلوكاً بسلوك بهدف تصنيف البيانات وفقاً لنموذج ليستر المفاهيمي، ثم قارن كل سلوك بغيره من السلوكات في المستوى الإعدادي بهدف تحديد أوجه الشبه والاختلاف، ومن ثم يصار إلى وضعها في الفئات، وحُدّدت الفئة بخصائص أو أفعال حدّد معناها، أو أُعطيت معنى. وعندما رُمّزت البيانات وحُلّلت، حُصل على أوجه شبه واختلاف في سلوك حل المشكلات للطلاب التسعة، وفي السلوكات التي تميز صياغة التعميمات للمسائل الخمس المركبة، حيث برزت فئات التعميم والتأمل نتيجة الدراسة.

أما التعميم فقد وصف في هذه الدراسة على أنه العملية التي يشتق الطلاب من خلالها أو يستنتجون مبادئ ونتائج من حالات خاصة. وتتضمن تحديد القواسم المشتركة في بنية المسائل وحلولها. واشتملت أيضاً على مقارنات، إضافة إلى مجموعة أخرى أصغر منها. وبعبارة أخرى، فإن التأمل يتألف من التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول، ومن ثم تلخيص أوجه الشبه تلك على مدار مدة من الوقت. وأخيراً، تؤدي العاطفة أو الوجدان (*Affect*) دوراً كبيراً، وتؤثر أيضاً في نجاح أو فشل الطلاب في تكوين الصورة العامة التي تميز مجموعة من المسائل المستخدمة في الدراسة. ويشمل البعد الانفعالي الاتجاهات والمعتقدات والآراء والقناعات التي يتبناها الشخص (Burton, 1984; Mandler, 1948).

وتلبيةً لمتطلبات الصدق في هذه الدراسة، عمد الباحث إلى استخدام ثلاث مصادر ن البيانات للتحقق من صدقها، هي: البيانات المستقاة من كتابات الطلاب في صحائف المذكرات، ووثائق المقابلة، إضافة إلى كتابات الباحث في دفتر المذكرات الخاص به، واستخدم الباحث أيضاً إستراتيجية تبادل الذاتية أو البين- ذاتية (Inter Subjectivity) عن طريق تكليف زميل بتحليل البيانات المستقاة من المقابلات، مستخدماً أسلوب الترميز الذي وضعه الباحث. وفعلاً، رمّز الزميل ثلاثين صفحة عشوائية من بيانات المذكرات والمقابلات وحلّلها، وتوصل إلى النتيجة نفسها التي توصل إليها الباحث. وبحسب شريحة معيّنة من البيانات التي رمّزها زميل للباحث على نحوٍ مستقل، كان هناك توافق ل 89% من السلوكات التي تقع ضمن فئة التوجه، و 86% للسلوكات التي تقع ضمن التنظيم، و93% للتنفيذ و96% للتعميم، في حين حاز التأمل على 91%. وهذه النتائج تضفي مزيداً من الصدق على نتائج البحث.

وقد لبّى الباحث متطلبات صدق الدراسة كذلك عن طريق دراسة الطلاب في صف الجبر نفسه للصف التاسع، حيث وثّق ملاحظاته عن الطلاب على مدار العام الدراسي في مذكراته. وكذلك الحال من حيث تخصيص وقت كافٍ في هذا المجال، حيث إن الباحث كان أيضاً معلماً للصف التاسع، وكان ملمّاً إلماماً تامّاً بثقافة غرفة الصف. إضافة إلى

ذلك، فقد سُجّلت المقابلات الشخصية على أشرطة، ودُوّنت حرفيّاً، وأُعيدت إلى الطلاب بغرض التوضيح أو الحذف أو الإضافة.

محددات الدراسة

على القارئ أن يدرك أن سياق الدراسة قد أسهم في طبيعة النتائج. ومن هنا، يود الباحث أن يشير إلى المزايا الفريدة لهذه الدراسة النوعية، وعلى هذا، يكون بوسع القارئ الحكم على قابلية تطبيق النتائج في مواقف أخرى أو تعميمها.

كان الطلاب في هذه الدراسة مبتدئين في صف الجبر المسرع في مدرسة ثانوية ريفية. من الناحية الديمغرافية كان الطلاب جميعاً من البيض، وينحدرون من خلفية اجتماعية واقتصادية من الطبقة الوسطى. وكان ثمانية من أصل تسعة طلاب يطمحون إلى إكمال المرحلة الثانوية بدراسة حساب التفاضل والتكامل. وقد شُجّع الطلاب، المستهدفون في هذه الدراسة، وحُفّزوا على النجاح في المدرسة، وكانوا مستعدين لبذل الجهود المطلوبة في هذا البحث. وهكذا، فقد يكون لاستعداد الطلاب للمشاركة في الدراسة ودافعيتهم أثر في مستوى جهودهم والنتائج التي توصّل إليها.

كان الطلاب التسعة الذين شاركوا في هذه الدراسة، قد درسوا مقرر ما قبل الجبر (Pre-Algebra) في الصف الثامن، سنة كاملة. ولم يحدث أن تعرض هؤلاء الطلاب في خلفيتهم الرياضية قبل المرحلة الثانوية لبناء البراهين الرياضية، ولم يتوقع منهم أيضاً أن يبنوا حلولاً عامة للمسائل الجبرية وما قبل الجبرية. ولو تعرض الطلاب لمسائل تشتمل على برهان رياضي، لكان من الممكن أن يميزوا بين المسائل التي تتطلب حلولاً موجودة ومحددة (Existence Solutions) (المسائل 1 و2) مقارنة بتلك التي تتطلب حلولاً عامة (General Solutions) (المسائل 5 ،4 ،3).

كانت لدى الباحث توقعات كبيرة جدّاً تتعلق بطلاب صف الجبر المسرّع، إذ توقع أن يقضي الطلاب وقتاً أطول وحدهم في حل المسائل في صحائف مذكراتهم. وتشير صعوبة المسائل الخمس المستخدمة في هذه الدراسة إلى أن الباحث توقع قفزات مفاجئة غير

عادية من طلاب مرحلة ثانوية مبتدئين. وكان الباحث ذا فاعلية أيضاً في تشجيع الطلاب على كتابة إستراتيجياتهم وملخصاتهم التأملية بخصوص هذه المسائل على مدار الفصل الأول. لذا، كانت هذه الخلفية متوافرة لدى هؤلاء الطلاب عند إعطائهم المسائل المركبة الخمس في الفصل الثاني. وعلى هذا، فإن الوضوح الموجود في كتابات المذكرات عائد إلى تأثير الباحث في الطلاب.

طُلب إلى الطلاب في صف الجبر أن يحلّوا المسائل بأنفسهم دون الرجوع إلى كتب أو أصدقاء أو أشخاص آخرين في الصف. ويشير التنوع في الحلول الواردة في مذكرات الطلاب، والتنوع في التفسيرات في أثناء المقابلات، إضافة إلى إخفاق كثير من الطلاب في التوصل إلى حلول للمسائل الثلاث الأخيرة، إلى أن الطلاب لم يتعاونوا فيما بينهم. وعلى الرغم من ذلك، فهناك احتمال ضئيل أن يكون بعض الطلاب قد تحدثوا إلى غيرهم عن هذه المسائل.

النتائج

نجم عن التحليل النوعي لدراسات الحالات التسع، ثلاث مجموعات فرعية استناداً إلى سلوكات حل المشكلة والتعميمات التي طورها الطلاب. ضمت المجموعة الفرعية: (أ) كلّاً من (Amy, John, Matt & Hanna) الذين أفلحوا في اكتشاف الصورة العامة التي تميز حلول المسائل، أي مبدأ برج الحمام، حيث تمكنوا من تحديد أوجه الشبه في بنية المسائل وحلولها، وقد تبينوا أن الحلول تتطلب «مطابقة» كميتين غير متساويتين أو المقارنة بينهما، وعندئذٍ يتمكنون من تحديد الدور الذي تؤديه في حل المسألة، أيّ، أيُّ تجويف (في برج الحمام) قد أكره على أن يحوي أكثر من حمامة واحدة. أظهر هؤلاء الطلاب مثابرة كبيرة نحو الفضول، وحُفّزوا على تعقب المسائل والتأمل مليّاً فيها على مدار مدة طويلة من الوقت. وعلى نحو ما أُشير سابقاً، فقد اطلع الباحث على تفاصيل الاختبارات المتعلقة بالطلاب التسعة بعد جمع البيانات وتحليلها، ليتبين أن الطلاب الأربعة في المجموعة الفرعية (أ) كانوا متفوقين في الرياضيات في مدارسهم الابتدائية.

ضـمت المجموعة الفرعية (ب) كلاً مـن (Bart, Jim & Isabel) الذين كان مخطط تعميمهـم العام يتمثل في اسـتخدام عمليـات الجبر في الأعداد المعطاة في المسـائل. ركز هؤلاء الطلاب على أوجه الشـبه الظاهرية في المسـائل، وحاولوا تطبيق عمليات من الجبر. وغالبـاً مـا أظهرت مقارناتهم بين المسـائل كثيراً من التناقضـات، فقـد أخفقوا في تعقب تسلسل الأفكار من مقابلة إلى أخرى على مدار المسائل الخمس.

وأخيراً، ضـمت المجموعة الفرعيـة (ج) كلاً مـن (Jamie & Heidi)، اللذين أظهر مخططهمـا العـام «التوصـل إلى كثير مـن الأمثلة ذات الفائـدة»، وقد عُـدّل ذلك في بعض المسـائل ليشـمل «كثيراً من الأمثلة عديمة الفائدة»، واسـتخدم هـذا المخطط العام مراراً وتكراراً، وكان هدف الطالبين التمكن من المسـألة، إذ كانا مهتمين اهتماماً أساسيّاً بتنفيذ ما تتضمنه هذه المسألة وتحقق صحته.

تظهر الجـداول من (2:2-4:2) أوجه الشـبة والاختلاف في سـلوكات الطلاب، ويتبع ذلك جزء توضيحي يركز على بعض الحلول التي قدّمها (Amy, John, Matt & Hanna)، ويشتمل على مقالات قصيرة تظهر إستراتيجيات حل المسائل، إضافة إلى الخبرات الرياضية لهـؤلاء الطلاب الأربعة الموهوبين. يقارن جدول (2:2) بين سـلوكات حل المشـكلات لدى الطلاب في المجموعات الفرعية الثلاث للحل في مراحل التوجيه والتنظيم والتنفيذ والتأمل، فـي حين يقارن جدول (3:2) بين الطلاب في سـلوكات التعميم والتأمل ضـمن المجموعات الفرعيـة الثلاث. وأخيراً، يقـارن جدول (4:2) بين السـلوك الوجداني لطلاب المجموعات الفرعيـة الثـلاث. وتهدف الجـداول الثلاثة إلى إتاحة الفرصـة أمام القـارئ للمقارنة بين سلوك الطلاب الموهوبين في حل المسائل (المجموعة الفرعية ب و ج).

جدول 2:2 مقارنة سلوك الطلاب في حل المشكلات في مراحل التوجيه والتنظيم والتنفيذ والتحقق

	المجموعة الفرعية أ –النابغون (Amy, John, Matt & Hanna) (إيمي، جون، هنّا، ومات)	المجموعة الفرعية ب – غير الموهوبين (Bart, Jim , Isabel) بارت وجيم وإيزابيل	المجموعة الفرعية ج– العاديون (Jamie, Heidi) (جامي وهيدي)
التوجه	فهم موقف المسألة على الدوام. تقويم كفاية معطيات المسألة. تحديد فرضيات المسألة. التمييز بين الجملة الاستفهامية والخبرية.	ضعف فهم موقف المسألة وضع الأعداد «المعطاة» في قائمة. صياغة فرضيات للموقف في المسألة المعطاة. تمييز غير واضح بين الجملة الاستفهامية والخبرية.	يسيء فهم موقف المسألة. فهم سطحي لفرضيات الموقف في المسألة المعطاة. عدم التمييز بين الجملة الاستفهامية والخبرية.
التنظيم	التخطيط العام تخطيط متواصل لتحديد «الطريق نحو الأعلى» أو «البدء من نقطة صغيرة	تخطيط شمولي عشوائي/ مبهم	تخطيط مرحلي
التنفيذ	ضبط تقلبات موقف المسألة. تأدية الأفعال المرحلية الصحيحة. مراقبة تقدم الخطط واتساقها على الدوام.	عدم ضبط تقلبات موقف المسألة. تأدية الأفعال المرحلية «غير العادية». مراقبة تقدم الخطط واتساقها دون دقة	عدم ضبط تقلبات موقف المسألة. تأدية الأفعال المرحلية. مراقبة تقدم الخطط واتساقها.

التحقق	تفحص نتائج الأفعال المرحلية. تحقق اتساق النتائج مع الخطط المنفذة. استخدام حالات خاصة في فهم سبب حدوث ظاهرة ما على نحو أفضل.	تناقض في نتائج الأفعال المرحلية. تناقض النتائج مع الخطط المنفذة. استخدام حالات خاصة في تحقق حدوث الظاهرة.	استخدام حالة خاصة في التحقق. استخدام الأمثلة/ اللاأمثلة في التوصل إلى النتائج.

جدول 2: 3 المقارنات بين سلوك الطلاب في التعميم والتفكير

	المجموعة الفرعية أ – الموهوبون (Amy, John, Matt & Hanna) (إيمي، جون، هنّا، ومات)	المجموعة الفرعية ب – غير الموهوبين (Bart, Jim , Isabel) (بارت وجيم وإيزابيل)	المجموعة الفرعية ج– العاديون (Jamie, Heidi) (جامي وهيدي)
التعميم	تحديد أوجه الشبه في بنية المسألة. تحديد أوجه الشبه في حلول المسألة. استخدام القياس المنطقي. تحسين الطرائق حيثما يكون ذلك ملائماً. توسيع مجال الصحة والدقة. تفعيل المبادئ المشتركة.	تحديد أوجه الشبه الظاهرية في بنية المسألة. تناقض في التعبير اللفظي عن أوجه الشبه في حلول المسائل. فرض الترابطات بالقوة بمفاهيم الجبر. توضيح العوائق.	تحديد أوجه الشبه الظاهرية في بنية المسألة. ابتداع أوجه الشبه في حلول المسائل.

التأمل	تخمين الأمثلة الممكنة وغير الأمثلة وتحققها. الربط أو العزو إلى خبرة سابقة. اتخاذ القرار في أثناء التنفيذ والتحقق وبعدهما. التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول. استخلاص أوجه الشبه البنائية في المسائل والحلول على امتداد مدة من الزمن.	التخمين لكن دون تفحص الحدس. ضعف في اتخاذ القرار في أثناء التنفيذ والتحقق. طرح المسألة جانباً بعد الانتهاء منها. استخلاص أوجه الشبه الظاهرية من كلمات المسائل والحلول.	قليل من التخمين أو عدم التخمين. طرح المسألة جانباً بعد الانتهاء منها. عدم القيام بالتجريد

جدول 2: 4 مقارنات السلوك الوجداني

	المجموعة الفرعية أ – الموهوبون (Amy, John, Matt & Hanna) (إيمي، جون، هنّا، ومات)	المجموعة الفرعية ب – غير الموهوبين (Bart, Jim , Isabel) (بارت وجيم وإيزابل)	المجموعة الفرعية ج- العاديون (Jamie, Heidi) (جامي وهيدي)
الوجدان والانفعال	المثابرة الثقة/ انعدام الثقة الفضول إثارة الإحباط يقدّر الاتصال والتواصل الرياضيات بصفتها «طريقة للتفكير»	انعدام المثابرة الثقة/ انعدام الثقة درجة متدنية من الفضول والرضا انعدام الرغبة في الاتصال والتواصل الرياضيات بصفتها «عمليات على الأعداد».	انعدام المثابرة انعدام الثقة درجة متدنية من الفضول الرضا عدم الرغبة في الاتصال والتواصل فكرة مسبقة عن حل المسائل من الكتب المدرسية للمرحلة المتوسطة

الخبرات الرياضية للطلاب الموهوبين

المسألة الأولى: عُلب المشروبات الغازية (الصودا Soda)

بدأت «هنّا» (Hanna) المسألة بإعادة صياغتها باستخدام كلماتها الخاصة، فكتبت: «هنــاك ســتة أنواع من المشــروبات الغازيــة مدرجة في القائمــة، فإذا طلــب أحد الطلاب الحصــول على علبة واحدة منها، فكم طالباً يجب أن يطلب مشــروبات غازية، بحيث يطلب أحــد الأنواع الســتة اثنان مــن الطلاب على الأقل؟ وبعبــارة أخرى، كم طالباً ســيطلب علبة واحدة من المشروبات الغازية، بحيث تُطلب علبة واحدة على الأقل مرتين؟»

كانــت خطــة هنّا في حل المســألة علــى النحو الآتي: «عمــل قائمة بأنواع المشــروبات الغازية الســتة المختلفة، عندئذٍ ســوف تكتب» الطالب الأول، الطالب الثاني.. إلخ لترمز إلى طالب واحد لكل طلب... وهكذا لأنواع المشــروبات الغازية الستة. «وأخيراً تكوّن حلٌّ هنّا من قائمة ضــمت أنواع المشروبات الغازية الســتة، حيث حدّدت طالباً واحداً لكل علبة من أنواع المشروبات الغازية الستة المختلفة، وبعدئذٍ عيّنت الطالب السابع لعلبة الزنجبيل ليرمز إلى الطالب الثاني لواحدة من أنواع المياه الغازية الستة». وتوصلت من خلال هذا العمل «إلى أن الأمر يتطلب سبعة طلاب ليطلبوا الصودا، بحيث تكون علبة صودا واحدة لكل طالب لضمان طلب علبة صــودا واحدة في الأقل، من بين أنواع الصــودا الستة من طالبين على الأقل». وقد دُهش الباحث من صــحائف مذكرات هنّا، حيث أعادت كتابة المسألة بكلماتها وأعدت خطة ونفذتها، وتوقفت عندما تحققت من أن حلها قد لبّى جميع شروط المسألة.

المسألة الثانية: مسألة الأسبرين (Aspirin)

بدأ «مات» (Matt) بحل المســألة حيث كتب: «تتلخص المســألة بالعثور على تسلســل لتناول الأسبرين في ثلاثين يوماً، ومن ثم معرفة هل سيتناول أربع عشرة حبة من الأسبرين في عدد من الأيام المتتالية». لقد فهم هذه المسألة على النحو الآتي: «لا بد من وجود طريقة ما ليتناول الشــخص أربع عشرة حبة من الأسبرين في أي عدد من الأيام المتتالية»، وتحقق حبــات الأســبرين الخمســ والأربعين التي ســيتناولها في غضــون ثلاثين يومــاً. وطلباً لحل

المســألة، تكونت إسـتراتيجية «مات» من إعـداد قائمة بالأيام الثلاثيـن، وكتابة عدد حبات الأسبرين على الجانب الآخر (انظر شكل: 1:2).

بدأ «مات» بتنفيذ خطته بعمل جدول بحيث كتب على أحد جانبيه ثلاثين يوماً، وكتب على الجانب الآخر منه عدد حبات الأسبرين. «سأحاول كتابة حبة دواء واحدة على الأقل في يوم واحد وأكتب حبّتي دواء في بعض الأيام حتى أُكمل الحبات الخمس والأربعين، وأعتقد أن هذه الطريقة سوف تتكلل بالنجاح.» حدّد «مات» حبة دواء واحدة لكل يوم من الأيام الثلاثين، ومن ثم أضاف حبة دواء أخرى إلى الأيام بدءاً من الخامس عشر وحتى التاسع والعشرين. وكتب عندئذٍ قائلاً: «الأمر ممكن، إذ إن أقل عدد من الأيام يستغرقه تناول أربع عشرة حبة أسبرين هو سبعة أيام». لم يفكر «مات» في أي شيء بعد ذلك، ولم يشر إلى حقيقة وجود أي حلول أخرى ممكنة، ويبدو أنه كان مقتنعاً أن الجواب كان سبعة أيام استناداً إلى حله. وعلى الرغم من ذلك، فإن الرواية الآتية تظهر أن «مات» كان على دراية بحلول أخرى للمسألة، إضافة إلى مقدرته على تحديد أوجه الشبه البنيوية في المسألتين الأولى والثانية.

اليوم	حبة الدواء	اليوم	حبة الدواء	اليوم	حبة الدواء
1	1	11	1	21	2
2	1	12	1	22	2
3	1	13	1	23	2
4	1	14	1	24	2
5	1	15	2	25	2
6	1	16	2	26	2
7	1	17	2	27	2
8	1	18	2	28	2
9	1	19	2	29	2
10	1	20	2	30	1

شكل 1:2 تمثيل «مات» لمسألة الأسبرين

الرواية الأولى

الباحث: هل تعتقد أن هذه هي الطريقة الوحيدة للحل؟

الطالب: أعتقد ذلك.

الباحث: إذاً، لا توجد طريقة أخرى للحل.

الطالب: هل تقصد أن هذا النوع فقط من الأعداد، هو الذي يمكن استخدامه؟

الباحث: نعم

الطالب: لا، لأنه يمكنك استخدام زوج من الثلاثيات، أو وضع يوم واحد معها جميعاً، وأما بقية الأيام فيمكنك وضع واحدة فقط.

الباحث: حسناً، كم أمضيت من الوقت في حل المسألة؟

الطالب: أمعنت فيها يومين قبل الحل، وفكرت فيها برهة من الزمن، ومن ثم كتبت المهمتين الأولى والثانية في قاعة الدراسة. وبعد ذلك، عدت إلى البيت، وفي اليوم التالي أمضيت نصف ساعة من الزمن وأنا أفكر في طريقة حلها.

الباحث: أتعني أنك قد أمضيت وقتاً أطول في حل هذه المسألة مقارنة بما سبقتها؟

الطالب: نعم، فقد كانت المسألة الأولى سهلة نوعاً ما.

الباحث: هل ترى ثمة أوجه شبه بين المسألتين؟

الطالب: ما لاحظته هو أنني كنت أمضي قُدماً وأضع واحدة، ومن ثم أضيف أخرى في بضعة أيام، ومن ثم توصلت إلى الإجابة.

الباحث: حسناً.

الطالب: هذا كل ما فعلته في المسائل جميعها (مشيراً إلى مسألة الصودا)، كان ينبغي لأحد الطلاب أن يحصل على علبتين، وبذلك، وضعت اثنتين لأحدهم.

الباحث: وماذا عن المسألة الثانية؟

الطالب: وضعت واحدة منها في كل يوم من الأيام، ومن ثم وضعت حبتين في نصف الأيام.

المسألة الثالثة: مسألة مجموع العدد

كتبت إيمي (Amy) أفكارها عن المسألة المعطاة في صحيفة مذكراتها، قائلة:

تتلخص المسألة في معرفة كيفية حدوث شيء ما. عليّ بأن أفكر كيف يحصل هذا، وأبرهن لنفسي ولكم أن هذا يحصل دائماً. قد يبدو هذا غير ممكن، ولكنه سيحصل دائماً. إنه أمر مثير إلى حدٍّ بعيد، عليك أن تفكر في أن ذلك لا يفيد مع بعض مجموعة الأعداد، ولكنه ينجح مع كل مجموعة من الأعداد وفي كلٍّ منها.

ولكي تبدأ المسألة، فقد دارت خطة إيمي (Amy) حول عمل مجموعة من عشرة أعداد بين الواحد والمئة. عندئذٍ ستعمد إلى استخدام هذه المجموعة؛ لتتوصل إلى طريقتين للحصول على المجموع نفسه، ثم تعمل بعد ذلك مجموعة أخرى، وتستمر في تكرار هذه العملية. وكتبت قائلة: «آمل أن أكتشف النمط، عندئذٍ أستطيع إثبات كيفية حدوث هذا.»

كانت مجموعة «إيمي» الأولى على النحو الآتي:{3، 12, 23, 29, 53, 61, 70, 79, 81, 94} وكان المجموعان: (3+12+79=94) وهو عدد من ضمن المجموعة. وبعبارة أخرى، فإن المجموع الثاني هو (94=94). ومما تجدر الإشارة إليه، أن طريقتها في التوصل إلى هذا كانت عن طريق طرح تسعة وسبعين من أربعة وتسعين لتحصل على خمسة عشر، وبعدها لاحظت أن 15=12+3، ومن هنا، فإن 94=79+12+3.

أما مجموعتها الثانية فكانت على النحو الآتي: {9, 12, 29, 41, 45, 71, 73, 88, 97, 98}، وكان المجموع الذي توصلت إليه هذه المرة على النحو الآتي: (98=41+12+54). وعند هذا الحد، قررت أن تجرب أمراً آخر مختلفاً. إذ ستبدأ بمجموعة من عشرة أعداد، ولكن ستنقحها هذه المرة بطريقة ما، أيّ تغير بعض العناصر أملاً في الحصول على «نتائج مختلفة». وقالت إنها كانت تجرب في هذه المرحلة أملاً في اكتشاف شيء ما. وبدأت بالمجموعة الآتية: « {5, 14, 16, 29, 44, 46, 53, 61, 80, 89}، واخذت تبحث عن طرائق مختلفة للتوصل إلى حل، وبعبارة أخرى، فإن المجموع يساوي عدداً من ضمن

المجموعــة، أو مجموعين يكونان متســاويين. وتوصــلت إلى حلول مختلفــة على النحو الآتي: (80=61+14+5) ؛ (80=29+5+46). عندئذٍ قررت «استبدال» بعض الأعداد و«التوصل إلــى نتائج جديدة»؛ وعليه، اســتبدلت بالأعــداد 80 ,46 ,29 ,14 ,5 أعـداداً أخرى مختلفة. وبـدأت مــع المجموعــة:{89 ,80 ,61 ,53 ,46 ,44 ,29 ,16 ,14 ,5} التي ســمتها المجموعة «الأصــلية»، وغيرتهــا إلــى {89 ,82 ,61 ,53 ,49 ,44 ,21 ,16 ,7 ,6}، وأطلقــت عليها اســم المجموعة «المنقحة». واســتبدلت بالأعداد 82 ،49 ،21 ،7 ،6 الأعداد 80 ،46 ،29 ،14 ،5؛ لترى هــل ســينتج من هذا مجموعة لا تعطــي أي حلول. وعلى الرغم من ذلــك، فقد وجدت مزيداً مــن المجاميع على جناح الســرعة، وهذا ما أثار دهشــتها بأن هــذه الطريقة لا تزال ناجعة. «89=82+7؛ يــا للروعة! لقد توصــلت إلى إجابة صــحيحة في المرة الأولــى» وقررت العثور علــى مزيد مــن المجاميع، وقد نجحــت؛ ومثال ذلك:89=61+21+7، وهو عدد من ضــمن المجموعة المنقحة؛ 44+21=49+16؛ 82 =21+61، و 44=21+16+7. وعندما وصــلت إلى نهاية مسدودة أخرى، قررت تجربة شيء جديد. وكتبت قائلة: «سأضع بعض الأفكار في اختيار الأعداد العشرة.»

وأخيراً، توصــلت إلى مجموعة الأعداد، وكانت على النحو الآتي: {,32 ,16 ,8 ,4 ,2 ,1 64....} «بدأت بالعدد واحد، ثم اختارت العدد اثنين. لم أكن أهدف إل الحصــول على حل آنــذاك، لذا، لم اختر العدد ثلاثة عندئذٍ، واخترت العدد أربعة بدلاً من ذلك؛ لأن 3=2+1، وبذلك يكون الحل قد ظهر فوراً، وواصلت العمل على هذا النسق. سيكون العدد الأكبر الآتي هــو ســبعة؛ لأن 7=4+2+1، لذا، لــم أختر العدد ســبعة، واخترت العدد ثمانيــة بدلاً منه.» اســتمررت بهــذا النمط مع اختيــار الأعداد بكل دقة وعناية، حتى وصــلت إلــى العدد أربعة وســتين، كما لاحظت أنها كانت تضــاعف العدد السابق لتحصــل على العدد الآتي.» لم يكن هنــاك ثمة حل ممكن، ولكن إذا ضــاعفت العدد أربعة وســتين، فســوف أحصــل على العدد مئة وثمانية وعشــرين في الوقت الذي تشــترط فيه المســألة أن تكون الأعداد محصورة بين الواحد والمئة، لذا، تعذر عليّ استخدام العدد مئة وثمانية وعشرين. يتبقى لديّ ثلاثة أعداد أخــرى يتعيــن عليّ إيجادهــا. «إذا انتقيت أي عدد عشــوائي، فانظر ما ســيحدث.» اختارت

(Amy) عـدداً مـن الأعداد العشـوائية بين أربعة وسـتين ومئة، مثل الأعـداد ،68 ,99 ,87 71, 84, 92، وكانـت دائمـاً تجد مجاميع مسـاوية لأعداد من ضـمن المجموعة، منها مثلاً: 78= 46+61+2+1+4، ثـم اختـارت بعد ذلك أعداداً من ضـمن مجموعـة أعدادها التي اختارتهـا بـكل دقـة وعنايـة، مثـل: 29 ,9 ,50 ,45 ,17 ،5، ووجـدت مجاميع مسـاوية لتلك الأعداد، وكان تخمينها بأن أكبر عدد من الأعداد يمكن أن يكون ضـمن المجموعة لا يوصـل إلى حل هو سـبعة أعداد، أي مجموعين متسـاويين. فتوصـلت إلى نتيجة مفادها بأن المرء يسـتطيع اختيار سـبعة أعداد صحيحة دون أن يتوصـل إلى حلول، ولما كانت المسألة تتطلب اختيار عشرة أعداد صحيحة، فإن الحل موجود دائماً.

وخلاصـة القول أن الذهاب بعيداً أعلى من العدد الأكبر، ينجم عنه ظاهرة معينة تفي بشـروط المسـألة. ففي المسـألة الأولى، أدى زيادة عدد الطلاب فوق العدد سـتة إلى طلب الصودا مرتين. وأما في المسألة الثانية، فقد أدت زيادة عدد حبات الدواء على ثلاثين حبة فأكثر، إلى إجبار الشـخص على تناول أكثر من حبة في اليوم، وترتب على ذلك سلسـلة من الأيام المتعاقبة حيث اسـتهلكت أربع عشـرة حبـة دواء تماماً. وفي هذه المسـألة، في حالة العشرة أعداد، فإن قدرة «إيمي» على تكوين مجموعة عظمى من الأعداد لم تتجاوز السبعة، قد اختيرت بدقة وعناية، نجم ذلك الحصـول على مجموعين متساويين عند اختيار عنصر ثامن. وهذه هي النقطة التي جعلت «إيمي» تفكر مليّاً بحلها، وكتبت قائلة: «لما كنت قد حاولت الحصـول على أكثـر الأبدال الممكنة في المجموعـة {64 ,16 ,8 ,4 ,2 ,1،...}، فقد ذكرني ذلك بالمسـألة الأولى عندما حاولت الحصـول على أكبر عدد ممكن من متغيرات الطلبات، حيث حُدّد كل شـخص بعلبة صـودا. وبعد كل هذا، فإن هاتين المسـألتين متشـابهتان.! هل خططت لهذا؟!»

بدا واضـحاً أن إيمي «كانت قد بدأت بتطوير نقطة حدسـية حول التعميم المخفي في المسـائل، أي مبدأ برج الحمام، فقد كانت قادرة على تحديد التشـابه البنيوي في المسـائل الثلاث في أثنـاء المقابلة، وكانت قادرة على التعبير عن مبدأ برج الحمام لفظيّاً».

المسألة الرابعة: مسألة المعارف (الأصحاب)

فهم جون (John) مسألة المعارف (الأصحاب) هذه (Acquaintance Problem The) على النحو الآتي: «أستطيع أن آخذ عشرين شخصاً، وأثبت هل يوجد للشخص نفسه عدد الأصدقاء ذاته، كأي شخص آخر». ولكي يحل هذه المسألة، قال إنه سيعطي أعداداً للعشرين شخصاً، ومن ثم يستخدم إستراتيجية «التخمين والتحقق». ومن أجل حل المسألة، رسم الشكل الآتي (شكل 2:2):

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
210	9	8	7	6	5	4	3	2	1

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1–19	19	18	17	16	15	14	13	12	11

شكل 2:2 تمثيل جون لمسألة المعارف

شرح جون الشكل أعلاه على النحو الآتي: يمثل الصف الأعلى الأشخاص في الغرفة، أي العدد 1 يشير إلى الشخص رقم 1 وهكذا، في حين يمثل الصف الثاني عدد الأصدقاء. مثلاً ووفقاً للجدول، فإن الشخص رقم 1 لديه صديق واحد، والشخص رقم 2 لديه صديقان وهلّم جرّاً. كتب جون قائلاً: «فكرت قليلاً، وقررت هل الرقم 1 يعرف صديقاً واحداً، ومن ثم هل الرقم 2 يعرف صديقين وهكذا. حاولت ألا يكون الصديق نفسه مكرراً مرتين».

وخمن الباحث أن جون قد فكر ملياً في المسألة، قبل أن يقرر المضي في الحل بعدم تحديد العدد نفسه من الأصدقاء للأشخاص في الغرفة. وعند سيره عبر الخطوط ووصوله إلى الشخص رقم (20) في الغرفة، عرف ذلك الشخص؛ لأن الشخص رقم (20) لا يمكنه أن يعرف (20) شخصاً في الغرفة، إذ إنه يمكن أن يعرف شخصاً واحداً في الأقل، أو تسعة عشر شخصاً، ومن هنا سينتهي المطاف بوجود شخصين لهما العدد نفسه من الأصدقاء.

وجد الباحث أن هذه الحجة قوية؛ لأنها تنطبق ضمنيّاً على مبدأ برج الحمام، ولكي نتمكن من التوصل إلى أن شخصين سينتهي بهما الأمر بالعدد نفسه من الأصدقاء، طلب

الباحث إلى جون شرح إستراتيجية حله المسألة، ومن ثم طلب إليه أن يوضح ما إذا كان هناك أي أوجه شبه في المسائل أو حلول المسائل التي تقود في نهاية المطاف إلى توضيح مبدأ برج الحمام، والصورة العامة التي اتسم بها حلّه المسائل الأولى والثانية والرابعة.

وتوضح الرواية الآتية اكتشاف جون لمبدأ برج الحمام.

الرواية الثانية

الطالب: لقد رسمت جدولاً لهم جميعاً، وأدرجت الأشخاص والمجموعات الممكنة جميعها، وحللتها بوضع الأعداد في مكانها الصحيح.

الباحث: إذاً، كيف كان الحل ؟

الطالب: رسمت الجدول، ووضعت قائمة بأسماء الأشخاص، وخمنت العدد لكل شخص على حدة.

الباحث: هل هذا هو الشيء الوحيد المشترك؟

الطالب: نعم، فالمسائل الأولى والثانية والثالثة جميعها تتطلب كمية محددة، مثل الأشخاص أو أنواع الصودا، كأن تشترط وجود عدد محدد يمكن أن يكون ممكناً. وبخصوص هذه المسألة (مشيراً إلى مسألة الأسبرين) يمكن أن تكون الكمية المعينة عشرين.

الباحث: هل تعتقد أن هناك معادلة من نوع ما، أو قانوناً مشتركاً بين هذه المسائل تحدثت عنه في السابق؟

الطالب: هناك ست علب صودا وسبعة أشخاص، وثلاثون يوماً، وخمس وأربعون حبة أسبرين؛ لذا، فإني أجزّئ الأعداد.

الباحث: إذاً، ما الذي يجري؟

الطالب: كان عدد الأشخاص أكبر من عدد علب الصودا، وعدد حبات الأسبرين أكبر من عدد الأيام، فهناك عدد أصدقاء معروفين أكبر من عدد الأشخاص.

الباحث: عدد أصدقاء معروفين أكبر من عدد الاشخاص؟

الطالب: نعم... واحد منهم أصغر.

الباحث: ماذا تعني بالأصغر؟

الطالب: عدد أشخاص أكبر من عدد الأصدقاء، لم يكونوا متساوين أبداً. هناك شيء ما أكبر أو أكثر.

الباحث: كيف يساعدك ذلك كله على حل المسألة؟

الطالب: توضح المسائل شيئاً واحداً في الأقل، وبذلك عرفت أنه لا بد من أن يكون عدد الأشخاص أكبر من عدد علب الصودا.

الباحث: وماذا حدث نتيجة ذلك؟

الطالب: (صمت). (يكتب الأعداد)... يمكن أن تحل المسألة عندئذٍ.

عند هذه النقطة من المقابلة، حدد جون تحديداً صحيحاً أوجه الشبه في بنية المسائل الأولى والثانية والرابعة. وعبّر عن هذا بقوله: إن المسائل جميعها كانت تتطلب كمية معينة، أو هل أن كمية معينة كانت ممكنة؟ لاحظ أنه عمل جدولاً لحلّه المسائل الأولى والثانية والرابعة، وأنه قارن بين كميتين، بحيث كانت إحدى الكميتين «أقل» من الأخرى. وقال أيضاً: إن هذا قد سمح بإيجاد حلول للمسائل، حيث إنه قد أفاد ضمناً منه، الأمر الذي مكّنه من إيجاد حل للمسألة، وأعني مبدأ برج الحمام، فقد اتخذ الباحث قراراً تربويّاً تعليميّاً باستخدام أعداد جون في تسهيل عملية التعبير لفظيّاً عن مبدأ برج الحمام. ومن المهم أن يلاحظ القارئ أن الباحث اتخذ هذا القرار فقط بعد أن صاغ الطالب مبدأ برج الحمام ضمنيّاً بكلماته. وأما فيما يتعلق بحالة جون، فقد بدا ذلك واضحاً بعد تحديده الكميتين اللتين قورن بينهما، حيث إن إحداهما أقل من الأخرى، الأمر الذي أعان على حل المسألة. وكانت هذه طريقته في التعبير عن مبدأ برج الحمام، وسوف يتضح هذا كله للقارئ من خلال الرواية الآتية:

الرواية الثالثة

الباحث: لمّا كنت قد زوّدتني بالأعداد (6, 37, 45, 19, 20)، فإنني أود أن أسألك السؤال الآتي: ماذا لو استخدمت هذه الأعداد للحمام، وتلك الأعداد لبيوتها؟

الطالب: (ضاحكاً) ستكون هناك حمامة زائدة على الدوام.

الباحث: أين؟

الطالب: سيكون هناك اثنتان في بيت واحد.

الباحث: إذن، أخبرني ما الذي يجري هنا؟

الطالب: عندئذٍ سيمكنك أن تضع خمس عشرة حمامة في واحدة، وتضع البقية في الأخرى (مشيراً إلى الأعداد 30 و45). وسيكون هناك أكثر من حمامة واحدة في بعض بيوت برج الحمام.

الباحث: وماذا عن هذين العددين (مشيراً إلى العددين 19 و20)؟

الطالب: أحد بيوت الحمام سيحتوي على اثنتين هنا.

الباحث: حتى الآن لم تخبرني بمعادلتك.

الطالب: (برهة من الصمت). عدد الحمام أكثر من عدد البيوت. دعنا نقول إن س ترمز إلى البيوت، عندئذٍ سيكون عدد الحمام أكثر من عدد البيوت.

الباحث: كيف يمكنك قول ذلك باستخدام الرمز س؟

الطالب: س + 1

الباحث: إذا أنت أشرت إلى أن لديك بيوتاً بعدد س، وحمامات بعدد س + 1، فماذا بعد ؟

الطالب: عندئذٍ سوف تمتلئ البيوت جميعها، وسيمتلئ أحدها أكثر من مرة واحدة. كنت مندهشاً كيف نجح ذلك في المسألة الأخيرة (مسألة المعارف أو الأصحاب)... لقد نجحت.

وهكذا، فقد توصل جون إلى الصورة العامة التي تصف حلّه المسائل الأولى والثانية والرابعة. وفي أثناء رحلته، لاحظ الباحث أن جون قد فكّر ملياً في «معادلة» ممكنة مدة ثلاثة أسابيع. وعلى عكس إيمي (Amy) التي تعثرت في التوصل إلى الصورة العامة في أثناء محاولتها إيجاد حل للمسألة الثالثة، فقد فكر جون تفكيراً واعياً في شيء ما يعين على تحويل المسائل إلى معادلة. لاحظ أن جون كان سريعاً في تعبيره عن مبدأ برج الحمام، وهذا مرده استخدامه الضمني هذا المبدأ في حله ثلاث مسائل من المسائل الأربع.

المسألة الخامسة: مسألة الفرقة الموسيقية (The Band Problem)

لم يفلح أي من الطلاب التسعة في حل مسألة الفرقة الموسيقية. لقد بنت إيمي و«مات» تفسيرات معقولة لإجراء التوافيق والتباديل، لكنهما أخفقا في تطبيق مبدأ برج الحمام على حل هذه المسألة.

ملاحظة: حلول المسائل الخمس موجودة في الملحق ب.

وبهذا ينتهي السرد الوصفي لخبرات حل المسائل للطلاب الأربعة الموهوبين. لقد اكتشفت إيمي مصادفة مبدأ تجاويف برج الحمام بعد حل المسائل الثلاث الأولى، وتمكنت من تطبيقه على حل المسألة الرابعة، في حين تمكن جون من التعبير لفظيّاً عن مبدأ برج الحمام، بعد محاولاته حل المسائل الأربع الأولى، بعد تفكيره مليّاً، وتحديد أوجه الشبه في المسائل ذوات الأرقام الأولى والثانية والرابعة. وأخيراً، تمكن كل من «مات» وهنّا من اكتشاف مبدأ برج الحمام بعد إجراء محاولات على المسائل الخمس بتحديد أوجه الشبه بين المسائل الأولى والثانية والرابعة. وقد كانت إيمي الطالبة الأكثر نجاحاً في المجموعات الفرعية. وقد عدّها كثير من أساتذة الرياضيات في جامعة مجاورة، رائعة رياضيّاً؛ نظراً إلى ابتداعها المجموعة العظمى في محاولتها حل المسألة الثالثة.

النتائج والمضامين

تشير النتائج إلى نجاح كل من الطلاب الأربعة الموهوبين إيمي وجون و«مات» وهنّا في صياغة التعميمات. وعموماً، يكمن الفرق الرئيس بين هؤلاء الطلاب وغيرهم في مراحل

حل المسائل الأربع المتمثلة في: التوجه، والتنظيم، والتنفيذ، والتحقق. ويستثمر الطلاب النابغون قدراً كبيراً من الوقت في محاولة فهم موقف المسألة، وتحديد الفرضيات بوضوح، واستنباط خطة شمولية ذات طبيعة كلية. وعلى الرغم من أن هؤلاء الطلاب لم يتوصلوا إلى حلول عامة للمسائل الخمس البتة، فإنهم عملوا قدماً على نحوٍ مستمر عن طريق البدء بحالات أكثر بساطة تعين على نمذجة موقف المسألة. ولتحقيق ذلك، كانوا يضبطون متغيرات المسألة. وبعبارة أخرى، فقد لاحظوا أن الكميات في المسائل المعطاة لم تكن ثابتة، مثلاً: ضبطت إيمي في المسألة الثالثة المتغيرات عن طريق انتقاء الأعداد الصحيحة في المجموعات بعناية فائقة، ولم يقيدوا أيضاً أنفسهم بمجموعة من عشرة أعداد فقط، بل حاولوا مع مجموعات تحتوي على أقل من عشرة أعداد صحيحة. وطبق هؤلاء الطلاب في أثناء مرحلة التنفيذ من مراحل حل المسألة إجراءات مرحلية (يدويات) باستمرار، وراقبوا تقدمهم. وعند الحصول على نتائج الإجراءات المرحلية، فُحصت لتحقق دقتها واتساقها. وفي مرحلة تحقق المسائل الثلاث الأخيرة، كان هؤلاء الطلاب يستفيدون على الدوام من حالات خاصة للتوصل إلى رؤية تفسر حدوث ظاهرة ما. أما من حيث صياغة التعميمات لهذا الصنف من المسائل، فقد أفلح الطلاب بتحديد أوجه الشبه في بنية ثلاث مسائل فأكثر على نحوٍ صحيح، وكذلك أوجه الشبه في حلولهم. لقد كانوا ماهرين في استخدام القياسات في أثناء توضيحهم وجه الشبه في المسائل، وكانوا قادرين أيضاً على الاتصال والتواصل على نحو فاعل، والتعبير عن المبدأ المشترك الذي اعتقدوا أنه يصف ثلاثاً من المسائل أو أكثر. وفي كثير من الحالات، خصصوا مجموعة فرعية أصغر من مجموعة من الأشياء متضمنة في المجموعة المعطاة.

وقد أظهرت سلوكات التعميم التي أبداها الطلاب الأربعة كلهم كثيراً من أنماط الاتساق، مع كثير من الدراسات القائمة، إذ توصل كروتتسكي إلى نتيجة مفادها أنه كي يتمكن الطلاب من صوغ تعميمات يتعين عليهم الاستخلاص من محتوى معين، وأن يحددوا أوجه الشبه والبنى والعلاقات. وقد نجحت إيمي وجون و«مات» وهنّا في الوصول إلى هذا بدرجات متفاوتة. وتضمن سلوك الطلاب التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول، واستخلاص أوجه الشبه تلك على امتداد مدة من الزمن، وترتّب أيضاً على هذه النتيجة تحقق التخمين،

وهذا يتفق مع ما أشار إليه بياجيه (Piaget, 1971) ودوبنسكي (Dubinsky, 1991) اللذان صوّرا التعميم على أنه عملية «تجريد تأملي». في حين ينظر دوبنسكي إلى التعميم بصفته مزيجاً من الأشياء والعمليات التي تشتمل على درجة عالية من المعرفة الخاصة بالموضوع. وفي هذه الدراسة، كانت المسائل الخمس هي الأشياء، وحلول تلك المسائل الخمس هي العمليات، والصورة العامة التي وصفت مجموعة المسائل والحلول، هي مبدأ برج الحمام.

وأظهر الطلاب النابغون أيضاً سلوكات تفكير أخرى لم يقل الباحث بصراحة في دراسته إنها ساعدت على عملية التعميم. وفي سياق دراسة البحث هذه، فقد لوحظ قدر كبير من سلوك اتخاذ القرار لدى الطلاب الموهوبين في أثناء مراحل التنفيذ وبعدها، وتحقق حل المسألة. يمكن أن يصور اتخاذ القرار على أنه سلوك تفكير «سريع» في أثناء عملية حل المسألة، يوجّه الطلاب إلى الحلول الصحيحة. وهناك سلوك تفكير آخر ظهر في التخمين والحدس بعد محاولة حل مسألة ما. فبعد محاولة الطلاب حل مسألة ما، فإنهم غالباً ما يخمنون، ومن ثم يتابعون تخميناتهم بتفحص الأمثلة المعقولة. لقد كان هذا أسلوباً مميزاً لكتابات إيمي في دفتر مذكراتها، ولوحظت أيضاً هذه السمة لدى الآخرين. مثلاً، قال جون إنه كان يبحث عن معادلة تعين على حل المسائل، وأخيراً توصل إليها بعد حل المسألة الرابعة.

أشار الباحث في وقت سابق إلى وجود فروق بسيطة تتصل بنوعية التعميمات التي كوّنها الطلاب النابغون. فقد كانت إيمي الطالبة الأكثر نجاحاً في هذه المجموعة الفرعية؛ لأنها اكتشفت التعميم بعد المسألة الثالثة، وتمكنت أيضاً من حل المسألة الرابعة باستخدام التعميم الذي كوّنته. بعد ذلك، حاولت تصنيف المسألة الخامسة ضمن الطريقة العامة، لكنها لم تفلح في ذلك. وقد كانت بطريقة أو بأخرى، تعمل في مستوى عالم رياضيات. وسيكون بوسع عالم الرياضيات أن يصور مخطط تعميم إيمي على النحو الآتي: اشتقت طريقة عامة في المرحلة الأولى من المسائل 1 و 2 و 3، ثم صيغت الطريقة بوضوح (برج الحمام)، وعُدّت كياناً قائماً بذاته، وحُللت بنيتها، ثم استخدمت هذه البنية لتضمين نوع مختلف من المسائل (المسألة 4)، دون إجراء أي تغييرات على الطريقة الأصلية

(Skemp, 1986) . وتمكّن أيضاً جون ومات في الجانب المقابل من التوصل إلى التعميم بعد حل المسألتين 4 و 5 على التوالي، ولكنهما أخفقا في تصنيف المسألتين 3 و 5 ضمن التعميم. وفي حالة «حنا»، فقد توصلت إلى فهم حدسي تخميني للتعميم عن طريق استخلاص أوجه الشبه في المسائل 1 و 2 و 4، وعن طريق استبعاد المسألتين 3 و 5 على نحو متعمد من هذه العملية. ولما كان التجريد يُعدُّ فرضية للتعميم (Davis & Hersh, 1981; Davydove, 1990) فإن سلوكات التجريد لهؤلاء الطلاب شبيهة بتلك التي يظهرها علماء الرياضيات، وتعين على نجاح تكوين تعميمات صادقة.

تتسق السلوكات الوجدانية للطلاب الموهوبين في صياغة التعميمات مع دراسات كثيرة بهذه الخصوص (Burton, 1984; Mandler, 1984). ووفقاً ل بيرتون (Burton, 1984) فإن نشاط المعرفة يرسم بوساطة الاستجابات الوجدانية التي يمكن ملاحظتها في أثناء استعراض المراحل الثلاث: **الدخول** (*Entry*) **والهجوم** (*Attack*) **والمراجعة** (*Review*) . وتسمّى المرحلة التي يُتعامل فيها مع المسألة بمرحلة الدخول، وتُثار فيها الدهشة، أو الفضول، أو التوتر بوصفه حاجة وجدانية تُحل من خلال مرحلة الاستكشاف (الهجوم) ، التي تلبي بدورها حاجة المعرفة للتوصل إلى النمط الأساسي، الذي كان في هذه الدراسة مبدأ برج الحمام. وأما في حالة الطلاب الموهوبين، فقد لاحظ الباحث العواطف الإيجابية القوية التي تلازم بناء الأفكار الجديدة غالباً (Glasersfeld, 1987) . وتتسق هذه النتيجة مع الكتابات والدراسات البحثية التي ترى أن جلّ العوامل الوجدانية التي تبرز من الاستجابات العاطفية، يمكن أن تعيق الخطط أو السلوكات المخططة (Burton, 1984; Mandler, 1984, Schoenfeld, 1985) . إضافة إلى ما أظهره الطلاب من دهشة وفضول على مدار المسائل الخمس، فقد أظهروا أيضاً مثابرة رائعة، ونوبات من الإحباط. لقد قدّروا الاتصال والتواصل، وصوروا الرياضيات على أنها «طريقة تفكير».

امتلك الطلاب النابغون الأربعة قابلية طبيعية (Shapiro, 1965) للانتظام في سلوكات حل المسألة وبناء التعميمات. وعلى الرغم من أنهم لم يحظوا بأي فرص للإثراء أو التسريع في أثناء المرحلة المتوسطة من سني الدراسة، فإنهم أظهروا مستوى عالياً من التفكير

التأملي، إضافة إلى الاهتمام بالتوجه والتنظيم في موقف حل المسألة. وعلى العموم، ينبغي لهذه النتيجة أن تحظى بدرجة عالية من الأهمية لدى كلٍّ من المعلمين والمرشدين. ويلاحظ أن الطلاب الموهوبين قد أظهروا فهماً عميقاً، حيث إنهم كانوا قادرين على استخلاص أوجه الشبه، ومن ثم تكوين روابط مفاهيمية صحيحة. وقد أدى الوجدان دوراً رئيساً في كيفية تعاملهم مع موقف المسألة، ولاسيما أن معتقداتهم بخصوص مكونات الرياضيات، قد أثرت في كيفية معالجتهم للمسألة. وربما وجد الطلاب النابغون أن المسألة تأسرهم بما يكفي لدرجة أنها توجِد حاجة وجدانية لديهم؛ ليتوصلوا إلى النمط الأساسي الذي يميزها .(Burton, 1984; Mandler, 1984, Schoenfeld, 1985)

وهكذا، فإذا ما أراد المعلمون أن يكون الطلاب ماهرين في صياغة التعميمات، فإن التحدي الأول والأخير يتمثل في إيجاد فئات متنوعة من المسائل لها حلول عامة، تمكن الطلاب من الوصول إليها وتستحوذ على اهتمامهم. وأخيراً، تشير النتائج إلى مقدرة الطلاب الموهوبين على استخلاص أوجه الشبه في بنية المسائل والأوضاع بطريقة تماثل ما يحدث في الرياضيات، وكذلك تكوين تعميمات رياضية صحيحة وصادقة. وهذا يتطلب من معلمي المرحلة الثانوية إيجاد فرص تعلم تتيح المجال أمام الطلاب الموهوبين في الرياضيات لتطوير مواهبهم واستخدامها.

قائمة المراجع

Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology. Siam Review,* 11, 429–469.

Brownell, W. A. (1942). *The Place And Meaning In The Teaching Of Arithmetic*. Theelementary School Journal, 4, 256–265.

Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning*. Journal Forresearch In Mathematics Education, 15, 35–49.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Hough–ton Mifflin.

Davydov, V. V. (1990). *Type Of Generalization In Instruction*: Soviet Studies In Mathematics Education. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Dienes, Z. P. (1961). *On Abstraction And Generalization*. Harvard Educational Review, 31, 281–301.

Dreyfus,T. (1991). *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (Pp. 25–40). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). *Constructive Aspects Of Reflective Abstraction In Advanced Mathematics*. In L. P. Steffe (Ed.) Epistemological Foundations Of Math–ematical Experience (Pp. 160–187). New York: Springer–Verlag.

English, L. D. (1992). *Problem Solving With Combinations*. Arithmetic Teacher, 40(2), 72–77.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity*. In D. Tall (Ed.). Advanced Math–ematical Thinking (Pp. 42–53). The Netherlands: Kluwer Academic Pub–lishers.

Frensch, P. & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms*. Mahwah, Nj: Erlbaum.

Gardner, M. (1997). *The Last Recreations. New York:* Springer–Verlag.

Glaser, B & Strauss, A. (1977). *The Discovery Of Grounded Theory*: Strategies For Qualitative Research. San Francisco, Ca: University Of California San Fran–cisco.

Glasersfeld, E.Von. (1987). *LearningAs A ConstructiveActivity*. In C. Janvier (Ed.), Problems Of Representation In The Teaching And Learning Of Mathematics (Pp. 3–18), Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics*. Arithmetic Teacher, 28, 14–18.

Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Of A Problem Solving* Strategy By Young Children. Journal For The Education Of The Gifted,13, 115–140.

Kilpatrick, J. (1985). *A Retrospective Account Of The Past Twenty–Five Years Of Researchon Teaching Mathematical Problem Solving*. In E. A. Silver (Ed.) Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives (Pp. 1–16).

Hillsdale, Nj: *Lawrence Erlbaum And Associates*.

Krutetskii, V. A. *(1976). The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children* .(J. Teller, Trans. And J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.

Lester, F. K. (1985). *Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem Solving* . In E. A. Silver (Ed.), Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives (Pp. 41–70). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum And Associates.

Mandler, G. (1984). *Mind And Body: Psychology Of Emotion And Stress* . New York: Norton.

National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics. Reston, Va: Author.

Piaget, J. (1971). *Biology And Knowledge. Edinburgh University Press* .

Piaget, J. (1975). *The Child's Conception Of The World. Totowa* , Nj: Littlefield, Adams.

Polya, G. (1945). *How To Solve It. Princeton, Nj* : Princeton University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving* . New York: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). *Learning To Think Mathematically* : Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics. In D.A. Grouws (Ed.). Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning (Pp. 334–368). New York: Simon And Simon Schuster.

Shapiro, S.I. (1965). *A Study Of Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical* Information. Voprosy Psikhologii, 2, 1–113.

Skemp, R. (1986). *The Psychology Of Learning Mathematics* . Penguin Books.

Sternberg, R. J. *(1979). Human Intelligence* : Perspectives On Its Theory And Measurement. Norwood, Nj: Ablex.

ملحق أ – المسائل

المسألة الأولى

يوجد ستة أبدال لاختيار مشروب الصودا: الكولا، وكولا الحمية، والليمون، والزنجبيل، والشعير، والفراولة.

كم طالباً يجب أن يطلب الصـودا، على أن يكون لكل طالب علبة صـودا، كي نتحقق أن طالبين في الأقل، قد طلبا أحد أنواع الصودا الستة المدرجة؟

المسألة الثانية

يتناول الشـخص حبة أسـبرين واحدة في الأقل مدة ثلاثين يوماً. لنفترض أنه يتناول خمسة وأربعين حبة أسبرين طوال هذه المدة، فهل يمكن أن يتناول أربع عشرة حبة أسبرين تماماً، في تسلسل معين لأيام متتابعة؟ فسر إجابتك.

المسألة الثالثة (مقتبسة من Gardner, 1997)

اختر مجموعة (س) مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة بحيث تكون أقل من مئة.

مثلاً: اختر المجموعة $S = 3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76$

فهناك اختياران مختلفان تماماً من المجموعة (س) لهما المجموع نفسه.

مثلاً، في المجموعة (س)، يمكن أن أختار أولاً 14 و63، ومن ثم أختار 35 و42. لاحظ أن مجموع الاثنين يساوي سبعة وسبعين. (77=14+63؛ 77=35+42).

ويمكنني أيضاً أن أختار أولاً 3 و9 و14، ومن ثم أختار 26. لاحظ أن مجموعهما يساوي 26 (3+9+14=26) و (26=26)

وأيّاً كانت طريقة اختيارك لمجموعة مؤلفة من عشـرة أعداد صـحيحة موجبة أقل من مئة، فسيكون لديك خياران مختلفان محتملان يعطيان المجموع نفسه.

لماذا يحدث هذا؟ برهن على أن هذا يحدث دائماً.

المسألة الرابعة

يوجد عشـرون شخصـاً في الغرفة يعرف بعضهم عدداً من هؤلاء الأشخاص، في حين لا يعـرف بعضـهم الآخر أحـداً. أثبت أنه يوجد شخصـان في الغرفة لهما العدد نفسـه من المعارف.

المسألة الخامسة (مقتبسة من Gardner، 1997)

يتألف المستطيل من صفوف وأعمدة. انظر إلى فرقة موسيقية يسير أعضاؤها على صورة مجموعة مستطيلات، بحيث تكون الصفوف (م) والأعمدة (ن)، ويمكن أن يكون (م) و (ن) أي عدد طبيعي. إذا نظرنا إلى الفرقة الموسيقية من الجانب الأيسر، يلاحظ قائد الفرقة الموسيقية أن بعض أعضاء الفرقة قصار القامة، مختلفون في النسق. يُعالَج هذا الخلل الجمالي بترتيب الموسيقيين في كل صف بحسب الطول من اليسار إلى اليمين، بحيث يكون كل واحد منهم أطول من الشخص الذي يقف عن يساره أو بالطول نفسه (من وجهة نظر قائد الفرقة الموسيقية). وعلى الرغم من ذلك، عندما يستدير قائد الفرقة الموسيقية إلى الأمام، يجد مرة أخرى أن بعض أعضاء الفرقة الموسيقية قصار القامة لا يمكن رؤيتهم؛ بسبب وقوف طوال القامة أمامهم. فيشرع عند ذلك بتغيير ترتيب الموسيقيين داخل عمودهم بحسب أطوالهم، بحيث يكون الأطول قامة في الخلف.

يتردد عند هذه النقطة، في العودة مرة أخرى إلى الجانب الأيسر؛ ليرى نتائج التعديلات التي أجراها بعناية على صفوفه المرتبة. وعلى أي حال، عندما يذهب يفاجأ أن الصفوف لا تزال مرتبة بحسب الطول من اليسار إلى اليمين. إن إعادة خلط النسق داخل الأعمدة بهذه الطريقة لا يلغي الترتيب بحسب الطول في الصفوف. فلماذا يحدث هذا؟ برهن على أن الأمر يكون هكذا دائماً.

ملحق ب – الحلول

المسألة الأولى

حل مسألة الصودا كان الأكثر وضوحاً، إذ يطلب سبعة طلاب الصودا، بحيث يكون أسوأ موقف هو طلب كل واحد من الطلاب الستة الأوائل شراب صودا مختلفاً عن الآخر، لذا، يجبر الطالب السابع على طلب مشروب طُلب سابقاً.

المسألة الثانية

تحل مسـألة الأسـبرين عموماً من خلال افتراض تناول الشخص حبة أسبرين واحدة على الأقل في اليوم. وبناءً عليه، يكون الشـخص قد اسـتهلك ثلاثين حبة أسبرين تماماً في غضـون ثلاثين يوماً، وبذلك يبقى هناك فائض بمقدار خمس عشرة حبة يستطيع الشخص تناولها عشوائيّاً على مدار الثلاثين يوماً.

المسألة الثالثة

يمكـن حل مسـألة مجموع الأعداد علـى النحو الآتي: هنـاك ($2^{10} = 1,024$) مجموعة فرعية من مجموعات الأعداد الصحيحة، ولكن هناك (901) حل ممكن فقط يعبّر عن عدد الأعداد الصـحيحة بين أقل مجموع وأكبر مجمـوع. وبوجود عدد مجموعات فرعية أكبر من المجاميـع الممكنة، يوجـد مجموع واحد في الأقل يقابل مجموعتين فرعيتين في الأقل. ومن هنا، يوجد دائماً اختياران مختلفان تماماً، يعطيان المجموع ذاته.

المسألة الرابعة

يمكـن حل مسـألة المعارف على النحو الآتي: إذا وجد شـخص فـي الغرفة ليس له أي معارف على الإطلاق، فإن كل واحد من الأشـخاص الآخرين في الغرفة يمكن أن يعرف 1 أو 2 أو 3،...أو 18 شخصـاً، أو ألا يكـون له معارف على الإطـلاق. وبناءً عليه، لدينا 19 «حفرة أو موقعـاً» معـدّاً على النحو الآتي: 0, 1, 2, 3,...., 19، وعلينا بتوزيع عشـرين شخصـاً فيما بينها. افترض بعد ذلك، أن لكل شـخص في الغرفة شخصـاً يعرفه. ومرة أخرى، لدينا 19 موقعاً 1, 2, 3,...، 19 وعشرين شخصاً. وهكذا، سيضطر شخصان إلى أن يكون لهما العدد نفسه من المعارف.

المسألة الخامسة

يمكـن إثبات مسـألة الفرقة الموسـيقية بوسـاطة (البرهان بالتناقض). افترض أن الأعمـدة جميعها قد رُتبت، ولكن يوجد هناك صـف فيه الموسـيقي (A) (العمود I) وضـع أمام (أو إلى يسـار) موسيقي قصير القامة (B) (العمود J). ولما كانت الأعمدة قد رُتبت،

بحيث يكون كل موسيقي في القطعة (X) من (A)، وإلى الخلف في العمود I على الأقل بطول (A) نفسه، وكل موسيقي في القطعة (Y) من (B) فصاعداً في العمود «J» ليس أطول من (B)، ولما كانت (A) أطول من (B)، فهذا يعني أن الأعضاء في القطعة (X) أطول من الأعضاء في القطعة (Y). والآن انظر إلى نقطة الوسط، حيث رُتبت الصفوف، وليس الأعمدة. ووصولاً إلى هذه النقطة لا بد من تحريك الموسيقيين من القطعة (C) إلى أماكنهم السابقة على امتداد العمود (I)، والعودة إلى القطعة (Y) إلى أماكنهم عبر العمود (J). ويجب توزيع الأعضاء في القطعتين (C و Y) بين الصفوف $1, 2, \ldots, m$. وبحسب مبدأ برج الحمام، سينتهي المطاف بموسيقيين اثنين في الصف نفسه، لا يمكن أن يأتيا من القطعة نفسها. لذا، فسيكون في بعض الصفوف عضو (C) من القطعة (X)، قبل العضو (D) من القطعة (Y). ولما كانت (C) أطول من (D)، فإن هذا الترتيب يخالف الترتيب التصاعدي الموجود للصفوف. وعلى هذا، تتبع النتيجة البرهان بالتناقض.

مفاهيم البرهان لدى طلاب الصف التاسع الموهوبين

استقصاء التشابه في مناحي الطلاب الموهوبين في الرياضيات وعلماء الرياضيات المختصين

بهارات سريرامان

ملخص

يتعلم طلاب المرحلة الثانوية عادة دراسة البرهان أو البرهان الرسمي واستخدامه ضمن مجال الهندسة الإقليدية. وغالباً ما يستخدم علماء الرياضيات المختصون طريقة المحاولة والخطأ غير الرسمية في حل المسألة، إلى أن يقودهم حدسهم إلى التوصل إلى حقيقة الفكرة. ويُتتبع البرهان الرسمي فقط بعد أن يحصل الاقتناع الحدسي لدى علماء الرياضيات فيما يتصل بحقيقة الفكرة. ولكن، هل يُعدُّ استخدام الحدس في التوصل إلى منطقية الحقيقة الرياضية فريداً لدى علماء الرياضيات المختصين؟ كيف يكوّن الطلاب الموهوبون في الرياضيات حقيقة الفكرة؟ في هذه الدراسة، كُلّف أربعة طلاب من المبتدئين والموهوبين في الرياضيات ممن لم يسبق لهم التعرض للبرهان أو الهندسة في المرحلة الثانوية، بمهمة إثبات صدق أو زيف مسألة هندسية غير عادية، يشار إليها أحياناً بمسألة المثلث المحصور (Circumscribing Triangle Problem). وتتناول هذه المسألة ما يأتي: هل صحيح أن هناك دائرة تحيط بكل مثلث وتمر من خلال كل رأس من رؤوسه؟ ويصف هذا البحث ويفسر العمليات التي يستخدمها الطلاب الموهوبون في الرياضيات في بناء حقيقة، ومقارنة هذه العمليات بتلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون.

وأشـارت النتائـج إلى أن الطلاب الأربعة كانوا قادرين علـى التفكير بمرونة، على نحوما هو مثبت من خلال مقدرتهم على عكس اتجاه العملية العقلية، ومن ثم التوصـل إلى الاسـتنتاج الصـحيح. ويتحقـق هذا البحث من صـدق اسـتخدام أبنيـة كروتتسـكي (Krutesskiian Constructs) ذات العلاقـة بمرونة العمليات العقلية وقابليتها للانعكاس (Reversibility) في تعليم الموهوبين بصفتهما من خصائص الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

مقدمة

ترسـم مبـادئ الرياضـيات المدرسـية والمعاييـر التـي نشـرها المجلـس الأمريكي لمعلمي الرياضـيات، صورة للغرف الصفية التي يضـع فيها الطلاب التخمينات ويصقلونها ويستكشـفونها اسـتناداً إلى الأدلة، واسـتخدام مجموعة متنوعة من الاسـتدلالات وأساليب البرهان، لتأكيد تلك التخمينات أو إثبات بطلانها» (Nctm, 2000, P. 3). يصـور المجلس الطـلاب في مختلف مراحلهم المدرسـية وهـم يتناولون الرياضـيات، بطريقة مماثلة لتلك التـي يسـتخدمها علمـاء الرياضـيات المختصـون. مثـلاً، يُشـجّع المعلمون فـي المراحل الابتدائية الأولى على إيجاد خبرات تعلمية تتيح الفرصة أمام الطلاب لتطوير مهارات تمييز الأنمـاط المعرفية وتصـنيفها، وتحفيز الطـلاب على تبرير إجاباتهم من خلال اسـتخدام الأدلة التجريبية، وسلسـلة قصـيرة من الاسـتدلالات الاسـتنتاجية المسـتندة إلى الحقائق المقبولة سـابقاً. ومـع تقدم الطلاب في المرحلة المتوسـطة، يتوقع منهـم امتلاك خبرات متعددة في صـياغة التعميمات والتخمينـات، وتقويمها وبناء البراهين الرياضـية. وأخيراً، يتوقع من الطلاب في المرحلة الثانوية أن يصبحوا ماهرين في التعامل رسميّاً مع التعريفات والبدهيات والفرضيات، وقادرين على كتابة البراهين.

جاءت التوصيات الواردة في هذه **المبادئ والمعايير** عامة، ويقصد منها أن تنطبق على الطـلاب جميعاً. وعلى الرغم من ذلك، فهنـاك عـدد كبير من البحوث عن تعليم الموهوبين تشير إلى أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يختلفون عن أقرانهم في جوانب كثيرة، من حيث مقدرتهم على التعلم بسـرعة أكبر. مثلاً، يختلف الطلاب النابغون في الرياضيات عن أقرانهم من حيث مقدرتهم على التعلم بسـرعة أكبر، وفضـولهم لفهم الأفكار المفاهيمية.

وقدرتهم على التجريد والتعميم وقدرتهم على معالجة المعلومات وإدارة البيانات، ومرونتهم وقدرتهم على عكس العمليات، وثباتهم وقدرتهم على اتخاذ القرار في مواقف حل المسائل. وقد أظهرت الدراسات التربوية في جامعة ستانفورد أن الطلاب الموهوبين يستطيعون من خلال التعليم إتقان مبادئ الاستدلال والقياس المنطقي الافتراضي، التي تعدُّ متطلبات قبلية للبرهان بدءاً بمستوى الصف الخامس الأساسي.

وقد قاد هذا الأمر الباحث إلى افتراض مفاده أنه قد يكون لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات مفهوم حدسي للبرهان ولدوره في الرياضيات، حتى إن لم يكن لديهم أي معلومات سابقة عن البرهان. وبعبارة أخرى، هل يمتلك الطلاب النابغون في الرياضيات قدرة طبيعية للتوصل إلى البرهان بطريقة مماثلة لتلك التي يستخدمها علماء الرياضيات؟ عادة ما يكوّن علماء الرياضيات اعتقاداً شخصيّاً بخصوص حقيقة الفكرة، ويستخدمونه دليلاً يوجههم نحو طرائق تحليل رسمية لبناء الحقيقة. مثلاً، قد يتوصل عالم الرياضيات بالحدس إلى نتيجة النظرية، ولكنه يدرك أن الاستنتاج ضروري لبناء الحقيقة علانية. وهكذا، فإن الحدس يقنع عالم الرياضيات بصحة الفكرة، في الوقت الذي ينظم فيه الاتجاه نحو مزيد من الطرائق الرسمية، خاصة بناء البرهان لتحقق صدق النتائج علنيّاً.

وهذا يقود إلى الأسئلة الآتية:

1. كيف يتوصل الطلاب النابغون في الرياضيات إلى الحقيقة، بالحدس؟
2. كيف يقنع الطلاب النابغون في الرياضيات أنفسهم، والآخرين، بخصوص حدسهم للحقيقة؟
3. هل تماثل المناحي التي يستخدمها الطلاب النابغون تلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما أوجه التشابه؟

الخلفية النظرية

يرى إب(Epp, 1990) أن نوع التفكير الذي يتبعه علماء الرياضيات في أعمالهم يختلف اختلافاً كليّاً عن الاستدلال الاستنتاجي الراقي المتوافر في متن كتب الرياضيات (ص. 257). وتضع هذه العبارة الطلاب في منظور التحديات التي يواجهونها عندما يتوقع

منهم بناء برهان استنتاجي عند البدء بالهندسة في المرحلة الثانوية للمرة الأولى. وعندما يتحدث أحد ما إلى عالم رياضيات عن اكتشاف في الرياضيات، يعترف علماء الرياضيات باتباعهم خطوات غير منطقية في البراهين (Lambert, 1990)، حيث يجربون التخمينات (Davis & Hersh, 1981; Poincaré, 1984)، ويبحثون عن أمثلة مشابهة (Fawcett, 1938; Polya, 1954) لتساعدهم على الحل، ومع ذلك، فإن النتيجة النهائية لا توفر للطالب رؤية عميقة للصراع المرير من أجل الوصول إلى البراهين.

درس جازان (Ghazan, 1993) تبريرات طلاب المرحلة الثانوية في الهندسة فيما يتصل بوجهات نظرهم عن الأدلة التجريبية والبراهين الرياضية، وأورد النتائج التي توصل إليها في المقابلات المعمقة مع سبعة عشر طالباً في صفوف الهندسة من طلاب المرحلة الثانوية التي تستخدم الأدلة التجريبية. وقد تركز تحليله على الأسباب التي تؤدي بالطلاب إلى تصوير الأدلة التجريبية بصفتها براهين رياضية تماماً كالأدلة. وطلب إلى الطلاب في الجزء الأول من المقابلة أن يقارنوا بين البراهين استناداً إلى قياس الأمثلة والبرهان الاستنتاجي، في حين ركز الجزء الثاني من المقابلة على البرهان الاستنتاجي في الكتاب المدرسي، وحاول توضيح هل يعتقد الأشخاص الذين قوبلوا أن البرهان الاستنتاجي يثبت صحة النتيجة للأشياء جميعها، وفيها ذلك المسائل المعطاة. وطلب إليهم أيضاً التوصل إلى أمثلة مضادة قدر الإمكان. وقد توصلت الدراسة إلى أن لدى الطلاب سبباً مقنعاً يجعلهم يعتقدون أن الدليل (Evidence) هو البرهان (Proof) في عالم المثلثات، حيث تتوافر أدلة كافية لدعم هذا الادعاء. وقد عبّر هؤلاء الطلاب عن شكوكهم في مقدرة البرهان الاستنتاجي على ضمان عدم وجود أمثلة مضادة تدحض البراهين.

انبثق نموذج فان هيلي (Van Hiele, 1986) في التفكير الهندسي من أعمال الدكتوراة لكل من دينا فان هيل-جيلوف وبيير فان هيل (Dina Van Hiele-Gelof & Pierre Van Hiele) في هولندا. يتكون هذا النموذج من خمسة مستويات من الفهم، هي: التصور (Visualization)، والاستقراء (Induction)، والاستنتاج غير الشكلي (Induction With Informal Deduction)، والاستنتاج الشكلي

(Formal Deduction)، وأخيراً البرهان (Proof). وتصف هذه المستويات خصائص التفكير، وسماته في كل مرحلة. ويتسم المستوى الأول بقدرة الطلاب على تمييز الأشكال بمظهرها العالمي، أو رؤية الأشكال الهندسية بصرياً بصورة كلية. يكون بمقدور الطلاب في المستوى الثاني (التحليل) وضع خصائص الأشكال الهندسية في قائمة؛ بحيث تصبح خصائص الأشكال الهندسية وسيلة للتحديد والوصف. ويبدأ الطلاب في المستوى الثالث بربط الخصائص، ودمجها في مجموعات كافية للأشكال الهندسية. أما في المستوى الرابع، فيطور الطلاب سلسلة لفظية من الكلمات لاستنتاج جملة من الأخرى. ويظهر الدليل الشكلي الاستنتاجي أول مرة في هذا المستوى من التفكير، في حين يصبح الطلاب في المستوى الخامس قادرين على تحليل أنظمة الاستنتاج المختلفة والمقارنة بينها. وتعد مستويات فان هيل للتفكير الهندسي متسلسلة أو متتابعة(Sequential) ومتوالية (Discrete)، أكثر من كونها متصلة، وتعد أيضاً بنية المعرفة الهندسية فريدة في كل مستوى ومرتبطة بالعمر الزمني. اعتقد فان هيل أن التعليم يؤدي الدور الأكبر في انتقال الطلاب من مستوى تفكير هندسي إلى المستوى الذي يليه. ورأى أيضاً أنه، دون التعليم، ربما يمكث الطلاب في مستوى معين إلى أجل غير مسمى. لا يتفق الباحث مع ادعاء فان هيل أن المستويات منفصلة ومرتبطة بالعمر الزمني. ويرى أن هذا الادعاء قد يكون صحيحاً للطلاب غير النابغين، ولكن مما لا شك فيه أنه لا ينطبق على الطلاب النابغين في الرياضيات، وسيثبت أيضاً في الفقرة الآتية. وإضافة إلى ذلك، فإن هذا النموذج لا يأخذ في الحسبان النظرة الكلية للقدرة الرياضية، ويقتصر تماماً على عالم الهندسة.

لقد أُجريت تجارب كثيرة في الاتحاد السوفييتي سابقاً في المدة الممتدة من 1970-1950 Ivanistsyna, 1970; Krutestskii, 1976; Menchinskaya, 1959; Shapiro, 1965;) (Yakimanskaya, 1970 على الطلاب النابغين في الرياضيات، وأظهرت أن الطلاب النابغين يمتلكون حصيلة من القدرات لا يمكن ترتيبها في خانات أو تصنيفات ضمن مستويات منفصلة داخل مجالات فرعية ضيقة من الرياضيات كالهندسة الإقليدية مثلاً. وتصف هذه البحوث بدلاً من ذلك، القدرات الرياضية للأطفال النابغين على نحو كلي، حيث تتألف من مكونات تحليلية (Analytic) وهندسية (Geometric) وتوافقية(Harmonic)، وبحثت

في تفضيل الأطفال الموهوبين عادة مكوناً على المكونات الأخرى. يتميز النمط التحليلي بقدرة عقلية رياضية مجردة، في حين يتميز النمط الهندسي بالقدرة العقلية التصويرية، أما النمط التوافقي فيمتاز بأنه مزيج من النوعين الهندسي والتحليلي. مثلاً، لو أعطي الطلاب المسألة نفسها لوجدنا أن طفلاً متفوقاً قد يستخدم المنحى التحليلي، في حين قد يذهب آخر إلى أبعد من المنحى الهندسي. قدم سترنز (Strunz, 1962) تصنيفاً مختلفاً ل «الأنماط» المتصلة بالنابغين في الرياضيات، واقترح النمط التجريبي (Empirical Type) والنمط المفاهيمي (Conceptual Type)، وفي هذا التصنيف يحظى النمط التجريبي بالتفضيل في الحالات التطبيقية والعلاقات والاستنتاجات التي تلاحظ فوراً، في حين يحظى النمط المفاهيمي بالتفضيل في الحالات النظرية والاستنتاجية. وقد لاحظ كروتتسكي أن إحدى سمات الطلاب النابغين في الرياضيات هي القدرة على الانتقال من اتجاه إلى اتجاه معاكس في سلسلة التفكير (أو القابلية للانعكاس)، التي يعمل فيها الطلاب النابغون بسهولة نسبية. أما السياق الذي لوحظت فيه القابلية للانعكاس، فقد كان في التحول من البرهان العادي إلى البرهان بالتناقض (Proof Via Contradiction)، أو عند الانتقال من نظرية إلى ضدها. يعترف الباحث في هذه الفقرة باستخدام القدرة الحدسية لدى الأطفال النابغين. ووفقاً لمعرفة الكاتب، لا توجد دراسات بحثت في طريقة استخدام الطلاب النابغين حدسهم في الرياضيات. وعلى الرغم من ذلك، فإن هناك عدداً محدوداً من الدراسات أجريت على علماء رياضيات، في محاولات لزيادة مدى فهمنا أسلوب استخدامهم للحدس في الرياضيات (Fischbein, 1980; Kline, 1976; Sriraman, 2004).

قال كايلن (Kilne 1976): إن مجموعة من علماء الرياضيات أفادوا بأنهم بدؤوا باستخدام منحى المحاولة والخطأ غير الرسمي بتوجيه من الحدس. وكانت هذه العملية هي التي ساعدتهم على إقناع أنفسهم بصحة الفكرة الرياضية. وبعد القناعة الأولية اتبعوا الطرائق غير الرسمية:

عادة ما يكون المنحى المنطقي لأي فرع من فروع الرياضيات عملية إعادة بناء معقدة ومصطنعة للاكتشافات التي تجري إعادة تشكيلها مرات عدة، ومن ثم تجميعها في نظام

الاستنتاج. عندئذٍ لا تعود البراهين طبيعية أو موجهه بالحدس. ومن هنا، لا يكون بوسع المرء فهمها حقيقة بوساطة التمثيل المنطقي (ص. 451).

اعتقد فيتشبين (Fischbein 1980) أن الحدس يُعدُّ مكوناً أساسيّاً في مستويات البراهين جميعها. وأشار إلى استخدام الحدس بصفته توقعيّاً (Anticipatory)، وقال: «عند محاولة حل المسألة، يشعر المرء فجأة بأنه قد أمسك بالحل، حتى قبل أن يكون بوسعه تقديم تبرير واضح كامل لذلك الحل» (Fischbein, 1980. P. 10).

وأجرى سريرامان (Sriraman 2004) مقابلات مع خمسة من علماء الرياضيات ليحدد السمات النوعية للسلوك الإبداعي. وفي هذه الدراسة، سُئل علماء الرياضيات عن كيفية تكوين الحدس حقيقة الافتراض. وأشار علماء الرياضيات جميعهم في هذه الدراسة إلى أن آخر ما كانوا يلتفتون إليه هو البرهان الرسمي، وذهبوا إلى تكوين الحدس الخاص بالحقيقة عن طريق محاولتهم بناء أمثلة، وأمثلة مضادة (Sriraman, 2004). وبعبارة أخرى، فقد كانوا يتعاملون مع المسألة من ناحيتين؛ بناء أمثلة لتحقق صحتها، والبحث عن أمثلة مضادة تقود إلى إثبات بطلانها، وبذلك يستخدمون منحى الذهاب والإياب في الحدس الواعي (Bell, 1976; Lambert, 1990; Polya, 1954; Usiskin, 1987). يُعد مصطلح عالم الرياضيات المثالي (Ideal Mathematician)، مصطلحاً خرافيّاً أوجده ديفز وهرش (Davis & Hersh 1981) عندما سألهما طالب في قسم الفلسفة: «ما البرهان الرياضي؟»، حيث أجابا بعدد كبير من الأمثلة، مثل: «النظرية الأساسية لهذا، والنظرية الأساسية لذاك... إلخ» وعند سؤاله من طالب الفلسفة، استسلم عالم الرياضيات أخيراً، وكشف السر بقوله: «نادراً ما يستخدم المنطق الشكلي (Formal) في إثبات النظريات، حيث إن الحقيقة الفعلية للمسألة تتمثل في كون البرهان مجرد حجة مقنعة، عندما يصدر محكّمون مؤهلون الحكم عليها» (Hersh, 1993, P.389). وهذا يقودنا مرة أخرى إلى الأسئلة التي طرحت سابقاً على الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

كيف يتوصل الطلاب الموهوبون في الرياضيات إلى تخمين الحقيقة؟ وكيف يقنعون الطلاب أنفسهم وغيرهم بخصوص تخمينهم الحقيقة؟ وهل تماثل المناحي التي يستخدمها الطلاب النابغون تلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون؟

المنهجية

المشاركون

لمّا كان أحد أهداف الدراسة يتمثل في تحديد هل يمتلك الطلاب الموهوبون في الرياضيات مفاهيم حدسية بخصوص البرهان، فقد كان من الأهمية بمكان اختيار طلاب لم يتعلموا أساليب البرهان. لذا، اختير المشاركون الأربعة في هذه الدراسة من المبتدئين في مدرسة ثانوية في الغرب الأوسط من منطقة ريفية واسعة، وكانوا ملتحقين بأقسام مختلفة من الرياضيات المتكاملة (1) (منهاج تموله مؤسسة العلوم الوطنية (National Science Foundation Nsf)، متسق مع معايير المجلس الأمريكي لمعلمي الرياضيات، طُوّر في جامعة ميتشيغان الغربية). وكان الكاتب معلماً لمادة الرياضيات بدوام كامل، ومنسقاً للمتفوقين في هذه المدرسة الثانوية في المنطقة الريفية من الغرب الأوسط. وكان الطلاب الأربعة ملتحقين بالمنطقة نفسها التي توجد فيها المدرسة، وهي تضم صفوفاً من الروضة حتى الصف الثامن K–8، وهي إحدى المدارس الرافدة للمدرسة الثانوية. وقد حددت المنطقة الطلاب النابغين استناداً إلى علاماتهم في اختبار ستانفورد للتحصيل عند (المئين 95)، إضافة إلى ترشيح معلميهم لهم. زوّدت إدارة المنطقة الباحث بهذه المعلومات. ويقدم جدول 1:3 تفاصيل التحصيل للطلاب الأربعة، ويظهر أنهم كانوا في قمة المئين الأول في اختبار ستانفورد للتحصيل.

جدول 1.3 تفاصيل اختبار الطلاب الأربعة

	اختبار ستانفورد للتحصيل (الصف الأول) علامة الرياضيات الخام [أ] (تبدأ من 90)	اختبار ستانفورد للتحصيل (الصف الثامن) علامة الرياضيات الخام [ب] (من 82 بنداً)	الدرجة المئينية (على المستوى الوطني)
جيل	90	82	99
يوري	89	80	99
يوري	89	81	99
سارة	88	80	99

أ) يتكون قسم الرياضيات في الطبعة الثامنة من 90 موضوعاً، وزعت بدروها إلى مواضيع فرعية تقيس فكرة العدد (34)، والحساب (26)، والتطبيق (30).
ب) يتكون قسم الرياضيات في الطبعة التاسعة من 82 موضوعاً وزّعت بدورها إلى مواضيع فرعية تقيس حل المسائل (52) والإجراءات (30).

يضاف إلى ذلك أن معلمي مادة الرياضيات في الصف التاسع هم الذين حددوا هؤلاء الطلاب مع نهاية الفصل الدراسي الأول في المرحلة الثانوية، ورشحوهم لبرنامج النابغين في المرحلة الثانوية. وتؤكد ملفات اختبار التحصيل في الرياضيات، إلى جانب ترشيح معلمي الرياضيات لهم في المنطقة، تفوّق هؤلاء الطلاب الأربعة في الرياضيات.

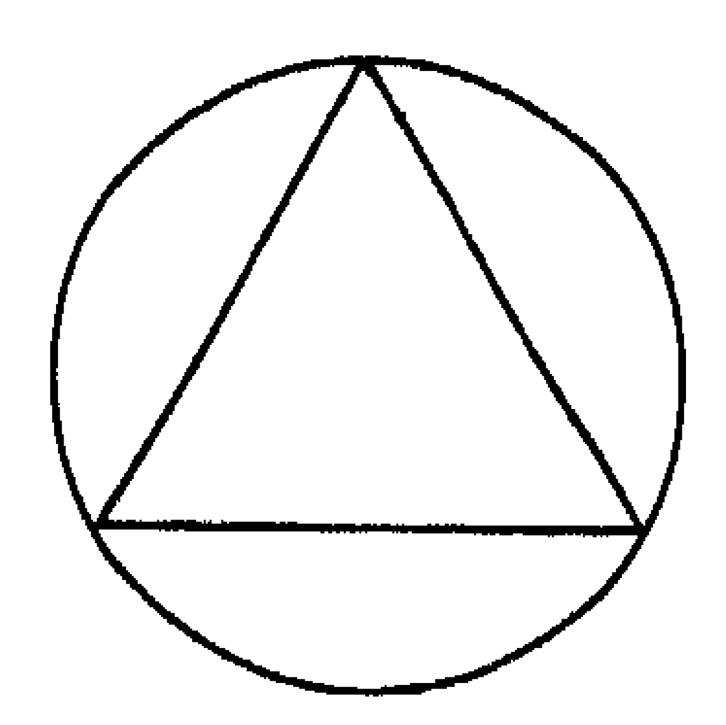
لم يلتحق الطلاب الأربعة بأي من دورات الرياضيات التي يُدرّسها الباحث. وقد دُعوا إلى المشاركة في هذه الدراسة عبر رسالة كتب فيها أن الباحث (منسق النابغين) يرغب في دراسة التفكير الرياضي لدى الطلاب النابغين. وافق الطلاب الأربعة على المشاركة في هذه الدراسة، وإجراء مسح تام لأعمالهم في الرياضيات بدءاً من مرحلة الروضة حتى الصف الثامن، وكذلك الإجابة عن أسئلة محددة حول معرفتهم بالهندسة والبرهان. أشارت المسوح إلى أن دراستهم السابقة في الرياضيات كانت في مادة الجبر مع بعض الإثراء. وأشار الطلاب الأربعة جميعهم إلى دراستهم لتصنيف الأشكال الهندسية استناداً إلى الخصائص في الصفين الرابع والسادس. وذكر أحد الطلاب اهتمامه بالبنى الهندسية، لكنه لم يتلق أي تعليم عن هذا في المدرسة. ولا تشتمل مناهج الصفين السابع والثامن على أي تعليم للهندسة الإقليدية أو البرهان. كان المحتوى الوحيد الذي يتعلق بالهندسة والبرهان على التوالي، عبارة عن وحدة صغيرة تتعلق باستخدام الصيغ؛ لتحديد المساحات السطحية وحجوم الأشكال الهندسية، إضافة إلى وحدة إثرائية حول تكوين معادلات متطابقة في النسبة والتناسب.

المسألة

يشار أحياناً إلى المسألة التي اختيرت لهذه التجربة باسم مسألة المثلث المحصور داخل الدائرة. (Circumscribing A Triangle Problem) وقد أشارت دراسة دقيقة لكتب مدرسية، تُستخدم عادة في المدارس الثانوية، إلى أن هذه المسألة تعدُّ مسألة إثرائية في الهندسة يتناولها المعلمون مع قرب نهاية العام الدراسي. وقد عثر على هذه المسألة في كتب الهندسة التحليلية، حيث إنها يمكن أن تحل باستخدام أدوات التحليل و/أو الجبر.

تنص المسألة على ما يأتي:

انظر إلى المثلث أدناه. تمر الدائرة في كل رأس من رؤوس المثلث.



- هل صحيح أن لكل مثلث دائرة تمر من كل رأس من رؤوسه؟
- إذا كان الجواب نعم (فلماذا؟). وإذا كان الجواب (لا)، فكيف ستتحقق ذلك؟

عُدّت هذه المسألة مناسبة لبحث مطول، وذلك للأسباب الآتية:

1. سهولة طرح المسألة وسهولة فهمها، ولم يعهد أيضاً الطلاب الأربعة مثلها من قبل. وبذلك، فقد كانوا يواجهون مهمة جديدة.
2. تقدم المسألة معلومات بصرية يمكن بناءً عليها التوصل إلى استدلالات خاطئة.
3. يمكن التعامل مع المسألة من وجوه عدة، هي: الجبرية والتحليلية والتجريبية والمنطقية، وبوساطة البناء الهندسي. ومن ثم تعطي فرصة لظهور أنماط مختلفة من الحلول.
4. طرحت المسألة بصورة عامة على الرغم من وجود حالة خاصة في الشكل.

إجراءات جمع البيانات

اتبع أسلوب المقابلة التشخيصية المنسوب إلى بياجيه (Piaget 1975)، الذي يُعدُّ رائد دراسة عمليات التفكير لدى الطلاب. وقد أُجريت مقابلات مع كل طالب على حدة بعد انتهاء دوام المدرسة، استندت إلى المهمة، ودارت حول المسألة المشار إليها آنفاً. وكانت المقابلات مفتوحة بهدف إتاحة الفرصة أمام الطلاب للتعبير لفظيّاً عن عمليات التفكير التي يقومون بها في أثناء حل المسألة. واستغرقت كل مقابلة من المقابلات الأربع التي

أجريت ساعة تقريباً. وقد استجوب الباحث الطلاب مطولاً، وطلب إليهم أن «يفكروا بصوت عال»، حيث سأل الأسئلة الآتية:

1. كيف يمكنك إقناع فرد يعتقد أن العبارة (عكس ما قاله الطالب)؟
2. كيف يمكن للشخص تحديد مركز ونصف قطر الدائرة التي تحيط بالمثلث، أو أحدهما ؟
3. إذا بنى الطالب استدلاله استناداً إلى الشكل المعطى، يُسأل لماذا قام بذلك؟
4. ممَّ يتكون البرهان في الرياضيات؟

طلب إلى الطلاب أن يفسروا تعليلاتهم بتفصيل تام. وسجل الباحث المقابلات على أشرطة، ومن ثم فرّغها كتابيّاً بكل دقة (حرفيّاً)، ودقّق الأخطاء فيها. وقد زوّد الطلاب بنسخة من المقابلة، وطلب إليهم تقديم التوضيحات التي يرونها ضرورية. لم يكن الهدف من ذلك إساءة فهم ما قاله الطلاب أو تفسيره، بل الحصول على مخطوطة مقابلة دقيقة كاملة، وتحقق التوافق بين ما قاله الطلاب وما عنوه. إضافة إلى ذلك، سجل الباحث انطباعاته بعد كل مقابلة مباشرة. وقد تألفت البيانات من أعمال الطلاب، ومخطوطات المقابلات، وملاحظات الباحث.

ترميز البيانات وتحليلها

جرى ترميز البيانات التي جُمعت وتحليلها باستخدام مناحٍ من نظريات مثبتة (Glaser & Strauss, 1977). وبدأت عملية الترميز بقراءة المخطوطة سطراً سطراً، وذكر الكلمات التي تصف العمليات العقلية المستخدمة من الطلاب الأربعة تلقائيّاً. وقد تمثل هدف الترميز بتصوير العمليات بدقة، وبناء الفئات (Strauss & Corbin, 1998). واستقصى الباحث على نحو هادف، الأفعال التي تقابل العمليات، ملاحظاً تطورها من خلال استجابات الطلاب للمسألة. وطبّقت طريقة المقارنة الثابتة للمقارنة بين أفعال الطلاب الأربعة، وتحديد أوجه الشبه في عمليات تفكيرهم على نحو ما هو مبين في البيانات. فبرزت الفئات الآتية نتيجة لترميز البيانات وتحليلها:

برزت فئة التصور (Visualization) عندما عبّر الطلاب تعبيراً متكرراً عن المعلومات البصرية المعطاة، مشيرين إلى أن المثلث المحاط بدائرة كان متساوي الأضلاع. وكان هناك نحو من مئة وثماني كلمات، وأشباه جمل ترددت مثل «يبدو متساوي أضلاع»، تبدو الزوايا والجوانب متساوية»، «يبدو كأنه مثلث تام»، إلخ.

في حين برزت فئة الحدس نتيجة لتردد (137) كلمة تقريباً، مثل: «يبدو أنه صحيح، لا أعرف لماذا؟» «يبدو واضحاً»، «أنا متيقن من وجود طريقة...، » إلخ. وبعبارة أخرى، تشير تلك الكلمات كلها إلى توكيد الدليل الذاتي (Self–Evidence). وقد كان هناك (212) مدونة تقريباً لكلمات تكررت تشير إلى القياس، واستخدام أمثلة محسوسة، قادت إلى إيجاد فئة تجريبية (Empiricism).

وأخيراً، كان هناك (82) ملاحظة تقريباً لتعبيرات تشير إلى عكس العملية في التعامل مع المسألة، مثل: «كيف يمكن وضع النقاط في الداخل...»، «ماذا لو بدأت بالدائرة...» إلخ، قادت إلى فئة القابلية للانعكاس (Reversibility). وبذلك، تم الآن تحديد الفئات الأربع.

التعريفات

- **التصور (Visualization)**: العملية التي يعمل الطلاب من خلالها استنتاجات عن طريق تحويل الصور أو تفتيشها (Hershkowitz, 1989).
- **التجريبية (Empiricism)**: تشير إلى الاستخدام المتكرر للأمثلة التي تقدم أدلة مطابقة أو (غير مطابقة) بهدف دعم صحة الفكرة. وتتضمن أيضاً استخدام مقاييس محددة لعمل الاستنتاجات (Chazan, 1993; Polya, 1954; Strunz, 1962).
- **الحدس (Intuition)**: المزاج الوجداني المرتبط بالإمساك بالحل في أثناء محاولة حل المسألة «قبل أن يستطيع الشخص أن يقدم تبريراً كاملاً وواضحاً لذلك الحل.» (Fischbein, 1980; Kline, 1976). ويشتمل أيضاً على التعليل غير الرسمي، واستخدام المصطلحات اليومية، وتذكر الأمثلة التجريبية لأغراض التبرير (Poincaré, 1984; Polya, 1954).

- **القابليـة للانعكاس (Reversibility)**: العمليــة (أو القــدرة) علــى التحول من سلســلة تفكير مباشر إلى سلسلة معاكســة، أي القدرة على عكس العمليات العقلية (Krutestskii, 1976). وتشتمل هذه القدرة على حل المسألة، أو التفكير في حلها بطرائق مختلفة.

الصدق

اســتخدم الباحث إستراتيجية تبادل الذاتية أو البين- ذاتية ((Inter-Subjectivity (Rubin & Babbie, 1997)) بالطلــب إلى زميل لــه؛ لتحليل البيانات الواردة في المقابلات باســتخدام أســلوب الترميز الذي طُوِّر. فرمّز زميله وحلّل ســتّاً وثلاثين شــريحة عشــوائية من بيانات المقابلات، وتوصــل إلى النتيجة ذاتها التي توصــل إليهــا الباحث. وأما ما يتعلق بشــرائح البيانات التي رمّزها الزميل وحده، فقد كان هناك توافق بنســبة 93% بخصــوص العمليات التي تشير إلى التصور، ونسبة 91% للتجريبية، و 92% للحدس، و 96% إلى القابلية للانعكاس. وتقدم هذه البيانات دليلاً على تلبية الباحث متطلبات صدق نتائج البحث.

النتائج

قدمت النتائج في المقام الأول تحت الفئات التي برزت نتيجة لترميز البيانات وتحليلها. وظهرت الفئات التي اســتخدمت بصــفتها عمليات في بناء «البرهان»، في التصور والحدس والتجريب والقابلية للانعكاس. وقدم الباحث مســارات الطلاب نحو «البرهان» على صــورة جدول يلخص الأنماط في كل فئة. وتبع ذلك تفسير وتعليق موسعان عن الأنماط التي لوحظت وتبين تماثلها مع المناحي الرياضية المستخدمة من علماء الرياضيات المختصين. وأخيًرا، بنى الباحث صــدق النتائج باســتخدام التثليث بالنظرية (Triangulation By Theory)، وتطبيق تفســيرات متنوعة من دراســة البيانات المتوافرة، واختيار أكثرها معقولية لتوضيح نتائج البحث وتفسيرها.

توصــل الطلاب الأربعة جميعاً إلى نتيجة مفادها أن الجملة الرياضــية كانت صــحيحة لكل مثلث من خلال عملية الاستقراء المبنية على التجربة والخطأ. بدأت عملية إثبات الجملة بالحدس أن الجملة كانت صــحيحة بالنســبة إلى المثلث المتســاوي الأضلاع فقط (استناداً

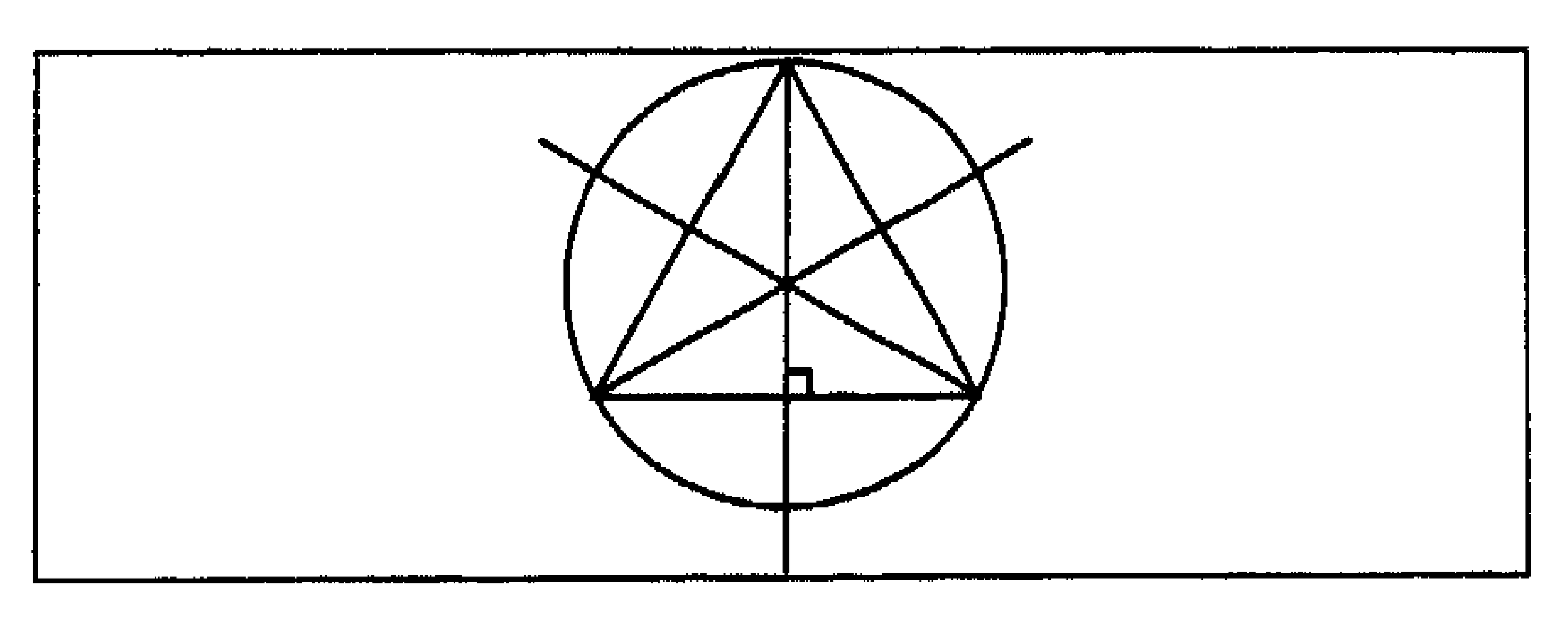
إلى المعلومات البصــرية). وبعدئذٍ، أكد الطلاب هذه الحقيقة للمثلثات متســاوية الأضــلاع ببناء المركز حدسـيّاً، وصياغة أمثلة مضــادة؛ لإثبات صحة تخمينهم أن الجملة كانت خطأ بصــورة عامة. وأخيراً، أثبتوا صــحة الجملة عن طريق قلب تفكيرهم على نحوٍ كبير. يظهر الشكل (1:3) الصورة الكاملة لهذه العملية.

التصور

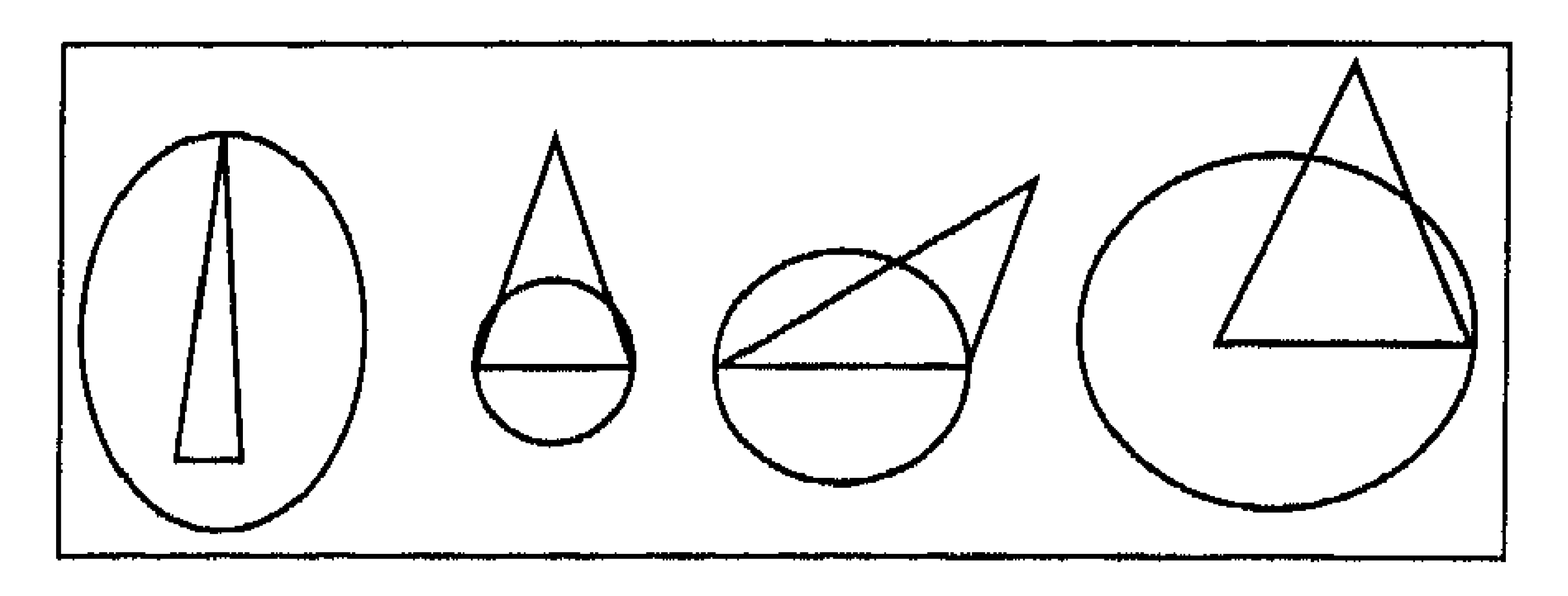
لعب التصــور دوراً مهمّاً في عملية إثبات مصــداقية الجملة الرياضية وصحتها. وأصر الطــلاب الأربعــة كلهم على أن المثلث متســاوي الأضــلاع؛ لأنه بدا هكــذا. وعلى الرغم من أن الجملة ســألت بوضــوح: هــل يمكن إحاطة كل مثلــث بدائرة، فإن الطلاب لم يســتطيعوا تجاهل الشكل المرئي، وقادهم ذلك إلى التخمين بأن الجملة الرياضية المعطاة تنطبق على المثلثات متســاوية الأضلاع فقط أو مثلثات «خاصة». ويقدم الجدول(2:3) أمثلة على تصور الطلاب لتخميناتهم، استناداً إلى المعلومات البصرية.

الحدس

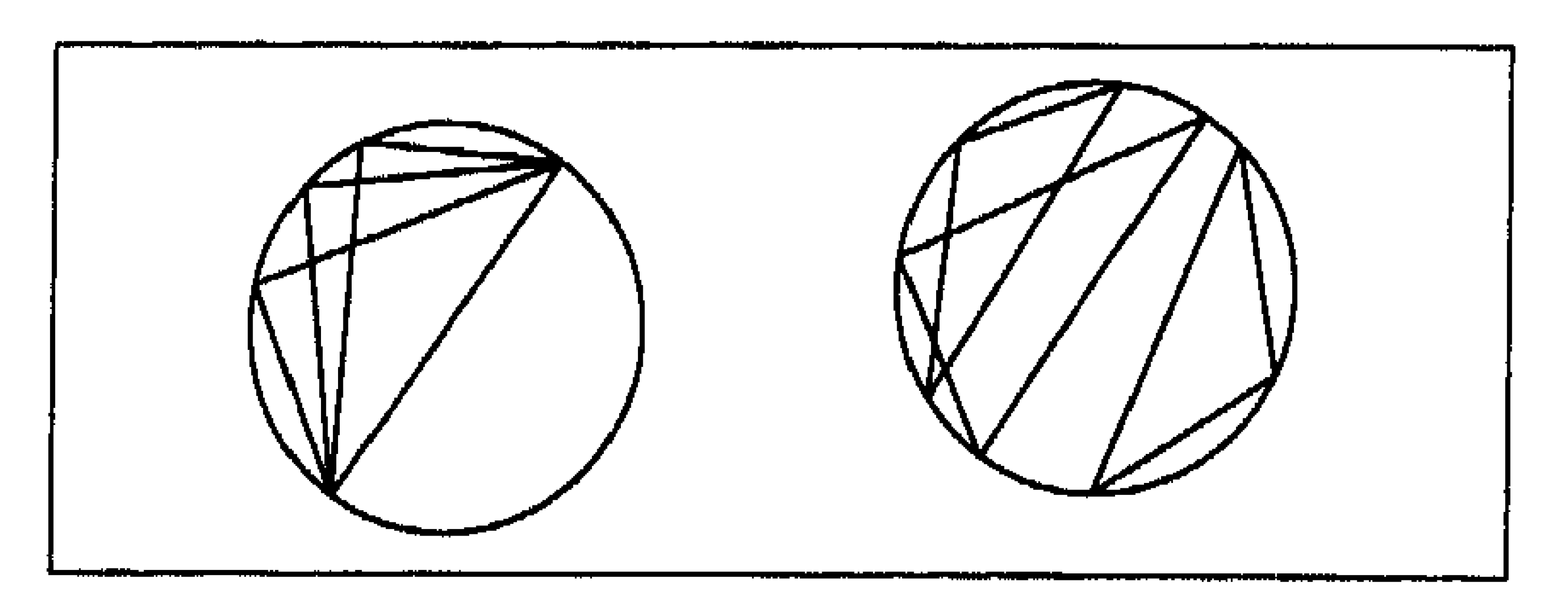
انساق الطلاب الأربعة وراء حدسهم الأولي بانطباق العبارة فقط على المثلثات متساوية الأضلاع. وقد تمكن ثلاثة منهم من تحديد البناء الصحيح لتحديد مركز الدائرة المحيطة بالمثلث متساوي الأضلاع. وقد كان ذلك رائعاً؛ لأنه لم يسبق لهم أن تعلموا بناءً كهذا. وعلى الرغم من ذلك، فقد قادهم حدســهم إلى اكتشاف البناء. ومما تجدر ملاحظته أنه لم يكن لــدى الطلاب مســطرة أو فرجار، حيث عُملــت الهياكل جميعها يدويّاً (انظر الشــكل 1:3). يقدم الجدول 3 :3 لمحة سريعة عن حدس الطلاب المستخدم في بناء مركز الدائرة.



بناء حدسي لتحديد مركز الدائرة المحيطة بالمثلث متساوي الأضلاع



علل ابتكرها الطلاب لمخالفة العبارة المعطاة



قلب العملية العقلية (البدء بدائرة أولاً)

شكل (1،3) نماذج من نتائج المقابلات

جدول 2،3 الرؤية خير برهان

الفئة	أمثلة على العملية	الطالب
التصور	ينجح هذا عند استخدام المثلثات متساوية الأضلاع فقط (مشيراً إلى الشكل الذي يشبه المثلث متساوي الأضلاع).	جيل
	لديك الآن مثلث متساوي الأضلاع. يبدو كأنه مثلث واحد في الأقل.	يوري
	ينجح هنا لأنه مثلث متساوي الأضلاع.	كيفن
	يبدو كأنه مثلث متساوي أضلاع بمسافات متساوية.	سارة

جدول 3، 3 يتطابق مركز الدائرة مع المثلث متساوي الأضلاع... أنا متيقن

الفئة	أمثلة على العملية	الطالب

الحدس	أرسم الخطوط العمودية التي تمر من خلال نقاط المنتصف، وعندما أصل إلى المركز يمكن أخذ المسافة من أحد الرؤوس بوصفها نصف قطر، ومن ثم أصلها. يبدو ذلك صحيحاً.. لا أدري لماذا؟	جيل
	أرسم ارتفاع زاوية لكل جانب في المثلث، حيث تتقاطع... يبدو واضحاً أن هذا سيعطي المركز.	يوري
	أعرف أن هناك ثمة طريقة ما للقيام بذلك. من الواضح أن هناك طريقة ما لعملها.	كيفن
	سوف أرسم المثلث متساوي الأضلاع، والخط العمودي، وخطّاً عموديّاً آخر، وحيث يتقاطعان يكون المركز.	سارة

التجريبية

سُئل الطلاب هل ينطبق البناء الذي توصلوا إليه على المثلثات متساوية الأضلاع فقط؟ الأمر الذي قادهم إلى بناء أمثلة مضادة (انظر الشكل 1:3) لإثبات حدسهم أن العبارة تنطبق فقط على المثلثات متساوية الأضلاع، وأنها كانت غير صحيحة بوجه عام. يقدم الجدول (4:3) لمحات عن هذه العملية التجريبية في بناء أمثلة مضادة استخدمها الطلاب الأربعة.

القابلية للانعكاس

عند هذه المرحلة، كان كل واحد من الطلاب الأربعة مقتنعاً إلى حد ما، أن العبارة كانت غير صحيحة بوجه عام. ومن الجدير بالذكر أنهم لم يكونوا تواقين للالتزام بالقول أن الجملة كانت خاطئة على الرغم من الأمثلة المضادة التي بنوها. أراد الطلاب تجريب منحى مختلف، الأمر الذي يقدم دليلاً على مرونتهم في التفكير، وهي سمة من سمات الطلاب النابغين في الرياضيات (Krutetskii, 1976). يبين (الجدول 5:3) أوجه الشبه في قلب الطلاب تفكيرهم على نحوٍ كبير، عن طريق البدء بدائرة عشوائية أولاً بدلاً من المثلث. وبقلب مسار تفكيرهم، كانوا قادرين على إقناع أنفسهم أن الجملة كانت صحيحة.

جدول 3،4 انظر إلى هذه المثلثات الغريبة كلها

الفئة	أمثلة على العملية	الطالب
التجريبية	إذا كان لديك مثلث كهذا (ارسم مثلثاً غير متساوي الأضلاع).. فلا يمكنك إيجاد دائرة تمر من خلال هذا المثلث، وستكون أشبه بالشكل البيضوي.	جيل
	لا يمكنك استخدام الارتفاع دائماً في تحديد المركز. دعني أرسم مثلثا آخر.	يوري
	وإذا أخذت مثلثا آخر مختلفاً فعندئذٍ لن ينجح ذلك. إليكم هذا المثلث وهو لا يصلح لهذا الغرض.	كيفن
	نعم، حاول رسم دائرة حول المثلثات الأخرى، مع أن ذلك لن ينجح.	سارة

جدول 3،5 دعنا نبدأ بالدائرة أولاً!

الفئة	أمثلة على العملية	الطالب
القابلية للانعكاس	انتظر قليلاً...أعتقد أنها كانت صحيحة. يمكنك دائماً رسم دائرة، ومن ثم رسم مثلث بداخلها. (يرسم مثالاً) يمكنك رسمه ما دام داخل الدائرة.	جيل
	لقد وجدت بناءً جديداً، ما الذي يمنعني من تثبيت النقطة المركزية في مكان آخر؟ أستطيع أن أثبت النقطتين في مكان آخر (يرسم حبالاً)، ومن ثم أختار النقطة الثالثة. نعم، الجملة صحيحة	يوري
	دعني أجرب شيئاً آخر. سوف أرسم مثلثاً غريباً حقّاً، وسأجعله يبدو على النحو الآتي (يرسم مثلثاً غير متساوي الأضلاع منفرج الزوايا). هل سينجح ذلك؟ ولكن إذا حدّدت النقاط الثلاث هذه على الدائرة، يبدو أن الأمر سينجح...نعم! يمكنك تحديد النقاط دائماً، ومن ثم ترسم المثلث.	كيفن

سارة أحاول التفكير هنا (يمزق محبطاً الورقة). ماذا لو تتبعت الدائرة وحددت النقاط؟ (صمت) نعم، أحاول النظر إلى المثلث بالعين المجردة، وأعتقد...أنه بصرف النظر عن أي نوع من المثلثات التي أرسمها، إذا كان بوسعي رسم دائرة أولاً، يجب أن أفعل ذلك أولاً، ومن ثم أرسم أي مثلث داخلها (يجرب أمثلة أخرى). يجب أن أرسم الدائرة أولاً. نعم، هذا صحيح، إنها جملة صحيحة.

التفسير والتماثل

في الجداول والأشكال السابقة، أُعيد بناء أوجه الشبه في مسارات الطلاب نحو «البرهان. ويؤكد الباحث أن عمليات التفكير للطلاب الأربعة تظهر تماثلاً رائعاً بالعمليات التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون كما سيظهر في هذا الجزء. ينظر إلى الرياضيات غالباً على أنها نشاط إيجاد العلاقات، التي يستند بعضها إلى الصور البصرية (Casey, 1978; Presmeg, 1968). أدت الصورة المقدمة للطلاب الأربعة مباشرة إلى تكوين المعلومات الأولية للتخمين أن المثلث المعطى كان متساوي الأضلاع. وهذا بدوره قاد إلى السؤال المتعلق بتحديد مركز الدائرة المحيطة، وأدى أيضاً إلى اكتشاف الطلاب أن مركز الدائرة يتطابق مع نقطة تقاطع الأعمدة المنصّفة للقواعد. من الأهمية بمكان أن تدرك أنه من المستحيل التوصل مباشرة إلى كيفية إيجاد الطلاب (وكذلك علماء الرياضيات) الصور، وعلى الرغم من ذلك، يمكن دراسة الطريقة التي يستخدمون فيها الصورة من إجراءاتهم المتبعة في حل مسألة بعينها (Inhelder & Piaget, 1971). وغالباً ما رأينا بصفتنا يافعين، الأطفال وهم يعملون أشياء غريبة عند تعاملهم مع مهمة رياضية. ونحن أحياناً ما نرى ردود فعل لمعلمين يصورون أعمال الطالب الحدسية على أنها غريبة (Kamii & Declark, 1985). وينعكس هذا النوع من ردود الفعل انعكاساً أكبر على عجز المعلمين عن تصور الأشياء من منظور الأطفال. لذا، فعندما يقرأ شخص البرهان المجرد يكون في موقفٍ مشابهٍ؛ لعدم القدرة على تصور البرهان من المنظور الإبداعي لعالم الرياضيات، وعدم إدراكه الصور التي يستخدمها عالم الرياضيات في إيجاد البرهان. وقد تمكّن الطلاب الأربعة من تحديد السمات (أضلاع متساوية وزوايا متساوية) التي عدّوها

مهمة لتكوين التخمين الأولي بخصوص صحة الجملة المعطاة (Hersh-Kowitz, 1989). وبعبارة أخرى، يعمل الشكل عمل نقطة مرجعية بصرية تحفز عملية البرهان الرياضية.

يتخذ علماء الرياضيات الحدس دليلاً لإقناع أنفسهم بصدق الفرضية (Burton, 1999; Kline, 1976; Sriraman, 2004). بدأت عملية البرهان للطلاب الأربعة بالحدس المستند إلى أن الجملة صحيحة فيما يتعلق بالمثلثات متساوية الأضلاع. وقد فسر الباحث هذا بصفته إجراءً حدسيّاً لتخصيص الجملة الرياضية المعطاة للمثلثات متساوية الأضلاع. وغالباً ما يتصف التفكير الرياضي بالعمليات الأربع، وهي: التخصيص (Specializing)، والتخمين (Conjecturing)، والتعميم (Generalizing)، والإقناع (Convincing) (Burton, 1984; Burton, 1999)، فعندما لجأ الطلاب إلى التخصيص والتخمين بأن المسألة صحيحة فيما يخص المثلثات متساوية الأضلاع، سألهم الباحث هل يعني ذلك أن الجملة تنطبق على المثلثات جميعها. وقد قاد هذا إلى منحى شبه تجريبي للإثبات (Ernest, 1991; Lerman, 1983) يحاول الطالب من خلاله بناء تعليلات رياضية (Mathematical Pathologies) (Lakatos, 1976) (الشكل 1:3)، على صورة مثلثات تناقض الفرضية المعطاة. وتظهر العملية شبه التجريبية مرة أخرى، أوجه شبه بارزة لوجهة نظر التفكير المقدمة من فيلسوف الرياضيات المشهور، إيمري لاكاتوس (Imre Lakatos)، التي يصور الرياضيات فيها على أنها نموذج من الاحتمالات خاضع للتخمين والبرهان والدحض. وبعبارة أخرى، تُصوّر الرياضيات بصفتها معرفة ثابتة مطلقة غير قابلة للتغيير، ولكنها تخضع للعملية العلمية المتمثلة في مراجعة الفرضية الأولية وتنقيحها باستمرار. وبحسب وجهة النظر هذه في علم الرياضيات، ليس هناك ثمة نظرية أو برهان يتسم بالكمال، بل هناك إمكانية تنقيح واردة على الدوام. وتعد العملية شبه التجريبية في بناء العلل التي استخدمها الطلاب الأربعة سمة مشتركة بين علماء الرياضيات عند محاولتهم إيجاد حل للمسائل. وتؤدي العلل إلى إعادة النظر في المسألة، وتنقيح الفرضيات أو الافتراضات.

قادت العملية شبه التجريبية التي استخدمها الطلاب الأربعة إلى التخمين المعدل الذي يفيد أن الجملة ربما كانت خاطئة عموماً. ومع ذلك، لم يكونوا ميالين عند هذا التخمين للاعتراف أن الجملة كانت خاطئة، على الرغم من الأمثلة المضادة التي كانوا قد بنوها. وهناك سمة مشتركة تجمع بين علماء الرياضيات المختصين، وهي انكبابهم على حل المسألة مدة طويلة من الزمن، وإذا لم يحدث أي انفراج، فغالباً ما يهدأ علماء الرياضيات ويؤجلون التفكير في الحل. وبعبارة أخرى، يتركون المسألة في مرحلة حضانة أملاً في حدوث انفراج في نهاية المطاف. وهذه هي وجهة النظر الجشتالتية (Gestalt) في التفكير الرياضي. وغالباً ما يصف علماء الرياضيات المرحلة هذه على أنها المرحلة التي «تتحدث فيها المسألة معك The Problem Talks To You». ويؤكد الباحث أن هذا حدث بطريقة مصغّرة مع الطلاب الأربعة، إذ بعد مضي ساعة كاملة من الوقت مع المسألة، وضعوا أقلامهم وتعاملوا مع المسألة بصمت وهدوء بضع دقائق. ومما يلفت النظر، سيطرة عمليات قلب التفكير على هؤلاء الطلاب (جدول 5:3). وهناك كثير من التفسيرات لهذه العملية، حيث يمكن تصوير التفكير الرياضي الاستبصاري والإبداع بصفتهما عملية صنع قرار غير خوارزمية. فقد تكون القرارات التي يتخذها علماء الرياضيات ذات طبيعة تباعدية، ودائماً ما تشتمل على خيار حاسم. ومن المثير، أن علماء الرياضيات يصورون أحد الجوانب المهمة من مهنتهم، على أنه عملية اتخاذ قرار غير خوارزمية في هذا العصر الذي أصبح فيه استخدام قوة الحوسبة في التبصر في النتائج، طريقة تتسم بالمصداقية. لقد كانت تلك المرحلة هي الأكثر توتراً وإحباطاً للطلاب الأربعة، حيث حدث النشاط المفاهيمي، وظهر على صورة إشراق أيّ قرار أو خيار يقلب بنية المسألة.

ومن الشائع بين علماء الرياضيات أن ينكبّوا على حل مسألة هذا اليوم، ومن ثم على نقيضها في اليوم اللاحق، أو ينكبوا على المسألة نفسها بالطريقتين للتوصل إلى رؤية. وتصور هذه العملية الانعكاسية جانباً من جوانب المرونة في التفكير، وسمة من سمات الطلاب النابغين في الرياضيات، وترتبط ارتباطاً كبيراً بمنحى الذهاب والإياب الذي يستخدمه علماء الرياضيات عند معالجتهم المسألة.

وبعد أن يكون الطلاب قد أقنعوا أنفسهم بأن الجملة صحيحة للمثلثات جميعها، سُئلوا كيف يمكن إقناع الآخرين بهذه الحقيقة. وبعبارة أخرى، فقد سُئل الطلاب عن الطرائق التي سوف يستخدمونها لإثبات الحقيقة علناً. ومن الواضح أن الطلاب الأربعة جميعاً كانوا يعرفون حدسيّاً أن مثالاً مضادّاً واحداً يكفي لإثبات بطلان الجملة، وعلى الرغم من ذلك، فإن إثبات الحقيقة اشتمل على مزيد من العمل، وتطلّب دليلاً جوهريّاً. اعتمد الطلاب على الأدلة التجريبية لشرح الحقيقة، وكانوا مقتنعين بأن الأمثلة البصرية المتعددة كانت كافية لإقناع الآخرين بصحة الجملة. وبعبارة أخرى، فقد كان البرهان بالنسبة إليهم هو التفسير والإقناع (Bell, 1976; Kline, 1976). وعموماً، فإن هذه النظرة تعدُّ طبيعية جدّاً للبرهان حتى بين علماء الرياضيات المختصين. وتمثل النظرة المنطقية الشكلية للإثبات موضوعاً مثيراً لدراسة المنطق... ولكنها ليست صورة صادقة للبرهان الرياضي الواقعي (Hersh, 1993, P. 391). لقد كانت وجهات النظر التي عبّر عنها الطلاب الأربعة عن دور البرهان معقدة بالنسبة إلى الطلاب في الصف التاسع. وأظهرت مرة أخرى تماثلاً في وجهات النظر التي يظهرها علماء الرياضيات المختصون وبعض فلاسفة الرياضيات. وسوف يستخدم الباحث بعض الاقتباسات في توضيح هذا الأمر للقارئ:

> أنا أبحث عن أمثلة تدعمها وأخرى لا تدعمها. سأبحث عن أمثلة تدحض الجملة، وبخلاف ذلك فسوف أضيع وقتي سدى... فالبرهان توضيح مكتوب أو أمثلة توضيحية استناداً إلى أشياء سابقة أعتقد أنها صحيحة (يوري).

يحمل هذا الاقتباس من كلام «يوري» تماثلاً مذهلاً لوجهة نظر البرهان التي عبر عنها أحد علماء الرياضيات المختصين، وهو محلّل بارع:

> في البداية تتولد لديّ فكرة أن شيئاً ما بحسب طريقة معيّنة، يجب أن يكون صحيحاً، وبعد ذلك أبدأ بمحاولة إثباته، وفي خضم معركة البرهان أواجه بعض الصعاب، وعندئذٍ أقول: هل أستطيع أن أبني مثالاً من هذه الصعاب؟ وإذا واجهتني صعاب في بناء المثال...عندئذٍ أقول: هل يمكن وضع هذه الصعاب في هذا البرهان الذي تعرفه ؟ وبذلك أبدأ بالتفكير، وأتحرك ذهاباً وإياباً، وعادة ما يتولد لديّ اعتقاد في بعض المسارات الضيقة أن شيئاً ما بحسب هذه الطريقة يجب أن يكون صحيحاً. ولا يكون الحدس دائماً صحيحاً، ولكنه صحيح بما يكفي في كثير من الأحيان...

وأنا قادر على إثبات شيء ما أشك في صحته (اقتباس من عالم رياضيات محترف من كتاب (Sriraman, 2004).

ويظهر أيضاً الاقتباس الآتي من أقوال «كيفين» أوجه شبه مذهلة لفرضية لاكاتوس (Lakatos, 1976) في الرياضيات، بصفتها عملية تطور متواصلة لتخمين البرهان والتفنيد:

يمكن العثور دائماً على حالة لا يمكن أن تنجح معها أي طريقة. ولكي تثبت أن شيئاً ما صحيح، حتى كما في العلوم، قد يكون لديك نظرية يمكن أن تنجح، ولكنك لا تستطيع أن تجزم أنها ستنجح على الدوام... لم تثبت أن شيئاً ما صحيح. يمكنك أن تأخذ مجموعة كبيرة من الحالات وترى إن كانت ستنجح، وبعد ذلك تُقبل عموماً على أنها صحيحة... ما لم يأت أحد ما ويثبت بطلانها. هناك أشياء كان يُعتقد أنها صحيحة على مدى مئتي عام، وسوف يأتي أحد ما بحالة تثبت بطلانها.

لا تنمو الرياضيات غير الشكلية وشبه التجريبية من خلال زيادة منتظمة في عدد النظريات الثابتة غير المشكوك فيها، ولكن عبر التطورات المتواصلة من التخمينات بوساطة التأمل والنقد ومنطق البرهان والدحض (Imre Lakatos (1976), *From Proofs and Refutations*).

وأخيراً، فإن استخدام البراهين البصرية، من قبل الطلاب، لإقناع الآخرين بحقيقة الجملة وصحتها، قد عُرف تاريخيّاً في الرياضيات الهندية. والاقتباسات الآتية من أقوال سارة توضح هذا التماثل:

أعتقد أن بوسعك البدء بمثل هذه الصورة البصرية، ثم حصر الحجج وصوغها على صورة كلمات. أتذكر أني في مرات كثيرة بدأت الحل بصريّاً، أنظر وأعمل فقط، وتمكنت من صياغته على صورة إثبات...(ضاحكة)، وأحياناً لم أكن أفهم المقصود. فمثلاً، لو كنت أعرف أن الحل صحيح، لما كان يتعين عليّ أن أتعقب ست عشرة خطوة لإثباته. إن طريقة فهم الحل بالأمثلة البصرية يبدو أكثر فاعلية.

تأثرت الرياضيات في أوروبا عموماً بالرياضيات اليونانية، في حين وضعت الرياضيات الهندية، على الرغم من تأثرها بالرياضيات اليونانية والعربية، تقليداً فريداً... حيث لم يكن ثمة تناقض بين البرهان البصري والحساب العددي من ناحية، وبين البرهان عن طريق الاستنتاج من ناحية أخرى (Almeida, 2003).

وخلاصة القول أن مفهومنا المتوارث للإثبات الدقيق ليس منحوتاً في الرخام. وسوف يستطيع الناس تعديل ذلك المفهوم، ويسنح للحساب الآلي، والبرهان الرقمي، والخوارزميات الاحتمالية،

إذا مـا تبين لهـم أنها ذات فائدة. ومن ثم، فنحن نضـل طلابنا إذا تعاملنا مـع البرهان الدقيق بصـفته محرّمات (مقتبس من قبل ألميدا؛ التعبير الأصـلي مذكور فـي هيرش، (Hersh, 1993, P. 395).

التثليث من ناحية النظرية والآثار

في هذه الدراسة، أُعطيت مهمة إثبات صحة جملة أو بطلانها لأربعة من طلاب الصف التاسع الموهوبين في الرياضيات ممن لم يسبق لهم أن تعلموا الإثبات أو الهندسة الإقليدية رسميّاً. وقد وثّق الباحث الإستراتيجيات التي استخدمها الطلاب في بناء «البرهان» ورمّزها وحلّلها. وتبيّن للباحث أن هؤلاء الطلاب قد اعتمدوا على التصـور والتجريب، مسـتخدمين الأمثلة والأمثلة المضـادة أو التخمين الواعي إضـافة إلى القابلية للانعكاس بهدف التوصل إلى الحقيقة. وقد اهتدت هذه العملية كلها بحدسهم القوي على نحو ما هو ثابت من قدراتهم على صـياغة التخمينات، واسـتنباط بنى لإثبات صـحة تخمينهم الأولي بخصوص المثلثات متسـاوية الأضـلاع. ومن الجدير بالذكر، أنه على الرغم من أن الطلاب الأربعة قد واجهوا أدلة غير مطابقة على صـورة مثلثات «غريبة»، بدت كأنه لا يمكن رسـم دوائر حولها، فإنهم لم يرغبوا في القول ببطلانها حينئذٍ. إن من السـهل القول إن هناك شـيئاً خاطئاً اسـتناداً إلى مثال مضـاد ضـعيف كما نلمسه في هندسـة المرحلة الثانوية، في حين يتطلب القول إن عبارة ما في الرياضـيات صـحيحة، الاقتناع بأن المسألة تحتمل حالات كثيرة غير محدودة. وقد كان الطلاب النابغون الأربعة على دراية بهذا الفرق، في حين يعتقد جل طلاب المرحلة الثانوية في الهندسـة عكس ذلك، ويعتقدون صـحة الجملة لشـكل معيّـن (Mason, 1996; Senk, 1985).

يـدرك علماء الرياضـيات عمومية الجملة عـن طريق التمييز بين «البحث السـريع أو التصـفح بعجالـة» (Looking Through) و«التدقيـق فـي» (Looking At). يُعدّ «البحث السـريع أو التصـفح بعجالة» مشـابهاً للتعميم من خلال الخاص، في حيـن يماثل «التدقيق في» تخصـيص (تحديد) حالة خاصـة من الحالة العامة. ويحضـرني مثال مبسط سبق أن استشـهد به ماسـون (Mason, 1996)، يرتبط بدرس هندسـة في المرحلة الثانوية عندما

يرسم المعلم مثلثاً (معيّناً) على السبورة، ويقول إن مجموع زوايا المثلث يساوي 180 درجة. وغالباً ما يُركز في هذه الحالة على الحقيقة التجريبية، أي 180 درجة. حقيقة الجملة مخفية في أن المثلث غير مُعرّف، ويرى الطالب الذي يبحث من خلال هذه الجملة العام في الخاص، ويدرك أن جوهر الجملة يكمن في ثبات مجموع الزوايا في المثلثات جميعها. ويشمل «النظر من خلال» إدراك سمة الثبات في المجال الضمني للعمومية» . وقد استطاع الطلاب النابغون الأربعة النظر من خلال الجملة المفترضة في المسألة، وإدراك سمة الثبات، وهذه تعدُّ إحدى مزايا علماء الرياضيات المختصين. وكان الطلاب النابغون على دراية بالفرق بين إقناعهم أنفسهم وإقناع الآخرين. وقد بدا ذلك واضحاً عندما أشاروا إلى أن إقناع الصف يتطلب تنظيم الأدلة المقنعة، ومن ثم بناء حجة بطريقة متماسكة. لقد أظهروا مرونة في التفكير في المسألة بطرائق متباينة، وهذا جلي من الطريقة الفذة التي عكسوا بها إستراتيجيتهم ليستنتجوا أن الجملة كانت صحيحة (Krutetskii, 1976).

أمّا فيما يتعلق بتصنيف سترنز (Strunz, 1962) لأنماط النبوغ الرياضي، فقد أظهر الطلاب النابغون الأربعة تفضيلاً للعلاقات والاستنتاجات المباشرة، ولكنهم كانوا يدركون أن إثبات العبارة يتطلب الحالات المحتملة جميعها.

وإذا ما استخدم المرء التصنيف الكلي للباحثين السوفييت، فإن تفوق الطلاب الأربعة في الرياضيات يُعدُّ نمطاً من الأنماط المتماسكة، أيّ مزيجاً من الأنماط التحليلية والهندسية. لقد كانوا قادرين على استخدام تمثيلهم التصوري في استقراء صحة العبارة بصورة تحليلية.

وأخيراً، لقد أظهر الطلاب النابغون قدراً كبيراً من التماسك والمثابرة، وتمسكوا بالمسألة حتى اقتنعوا تماماً بالنتيجة التي توصلوا إليها. وكانت طريقة البرهان التي طبّقوها في هذه الدراسة مختلفة تماماً عن المنحى المنطقي الموجود في البرهان في جُلّ الكتب المدرسية، ويشبه إلى حدٍّ بعيد الطريقة التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون. وقد أظهرت العمليات التي استخدمها هؤلاء الطلاب النابغون في الرياضيات في إثبات صحة

الجملة تماثلاً كبيراً بطريقة علماء الرياضيات المختصين على نحو ما أشرنا في الجزء السابق.

يمكن القول باختصار إن المنحى المنطقي يُعدُّ إعادة بناء مصطنع للاكتشافات التي جرى دمجها عنوة في أي نظام استنتاج، وبذلك يضيع الحدس الذي وجّه عملية الاكتشاف في هذه العملية. ويظهر الأثر هنا في أن كثيراً من المعلمين يستخدمون المنحى المنطقي في الإثبات داخل غرفة الصف، ومن ثم يكبتون حدس الطلاب النابغين وطرقهم الطبيعية في التفكير في المسألة. قد يدرس هؤلاء الطلاب الأربعة في نهاية المطاف الهندسة من وجهة نظر حدسية في السنة الثانية من البحث، استناداً إلى معايير تتوافق ومساق الرياضيات المتكاملة (Integrated Mathematics) التي تُعرّف الهندسة من خلالها من منظور الحدس والاستقراء في سياق التحويلات. وضمن هذا التسلسل، تزداد الحاجة إلى البرهان الشكلي على نحوٍ تدريجي. وعلى الرغم من ذلك، فقد واجه الطلاب النابغون الملتحقون بدورة الرياضيات دراسة الهندسة الإقليدية والبرهان الاستنتاجي، الذي حرمهم من استخدام غرائزهم الطبيعية في إثبات الحقيقة على نحو ما يفعل علماء الرياضيات. يظهر التضمين فيما يتعلق بتربية الموهوبين في تطوير مناهج رياضيات تتيح فرصاً للطلاب النابغين لتطوير حدسهم بخصوص البرهان، والإفادة من المهام الرياضية الصعبة الجديرة بالاهتمام التي تستحق العناء.

محددات الدراسة

كان مجتمع هذه الدراسة من الطلاب المبتدئين الملتحقين بأقسام مختلفة للرياضيات المتكاملة في مدرسة ثانوية ريفية. فمن الناحية الديمغرافية، كان الطلاب جميعاً من اللون الأبيض، وينتمون إلى الطبقة الوسطى، وقد مروا بالخبرة التعلمية نفسها من الروضة حتى الصف الثامن. وكان لدى الطلاب الأربعة جميعاً تطلعات دراسية عالية جدّاً، وكانوا ينوون دراسة مساق الرياضيات المتكاملة الرابع، ومساق تسريع في التفاضل والتكامل في وقت واحد في السنة الدراسية الأخيرة. وتمتع هؤلاء الطلاب بميل إيجابي نحو الرياضيات، وتكللت جميع تجاربهم السابقة في الرياضيات بدرجة كبيرة من النجاح. لم يتعرض هؤلاء

الطلاب لبناء البرهان الرياضي من قبل، ولم يدرسوا أيضاً الهندسة بصورة رسمية. ويمكن أن تعزى نتائج هذه الدراسة إلى السمات الفريدة لفئة الدراسة والمسألة المحددة المختارة وتصميم المقابلة. وقد أظهرت العمليات التي استخدمها الطلاب النابغون في الرياضيات في بناء البرهان ومفاهيم الحدس المتصلة به، تشابهاً بالعمليات التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون. وإن الأمر يتطلب مزيداً من البحث على مستوى بداية المرحلة الثانوية؛ لكي نتمكن من تعميم هذه النتائج على الطلاب الموهوبين في الرياضيات ممن يلتحقون بالمرحلة الثانوية، ولديهم الخبرة ذاتها في المدرسة المتوسطة. فمن المعقول جدّاً تكرار هذه التجربة بأنماط مشابهة من المسائل مفتوحة النهاية التي تتطلب إثبات صحة الجمل الرياضية أو بطلانها.

يرى الباحث أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يمتلكون الميول الحدسية الطبيعية لعلماء الرياضيات. لذا، على مجتمع العناية بالموهوبين بذل جهد للتوصل إلى فهم أكثر عمقاً لهذه الميول؛ بهدف تطوير منهاج للمرحلة الثانوية ومناحي تدريس تنمّي هذه المواهب الطبيعية وترعاها.

قائمة المراجع

Almeida, D. (2003) *Numerical And Proof Methods Of Indian Mathematics For The Classroom* . Mathematics In School, 32(2), 7–10.

Bell, A. W. (1976). *A Study Of Pupils' Proof Explanations In Mathematical Situations* .Educational Studies In Mathematics, 7, 23–40.

Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology* . Siam Review, 11, 429–469.

Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning* . Journal Forresearch In Mathematics Education, 15, 35–49.

Burton, L. (1999). *The Practices Of Mathematicians : What Do They Tell Us About Comingto Know Mathematics?* Educational Studies In Mathematics, 37(2), 121–143.

Casey, E. S. (1978). *Imaging: A Phenomenological Study* . Penguin Books.

Chang, L. L. (1985). *Who Are The Mathematically Gifted Elementary School Children?* Roeper Review, 8(2), 76–79.

Chazan, D. (1993). *High School Geometry Students' Justification For Their Views Ofempirical Evidence And Mathematical Proof*. Educational Studies In Mathematics, 24, 359–387.

Corbin, J., & Strauss, A. *(1998). Basics Of Qualitative Research*. Thousand Oaks, Ca: Sage.

Diezmann, C., & Watters, J. (2003). The Importance Of Challenging Tasks For Mathematically Gifted Students. Gifted And Talented International, 17(2), 76–84.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). The Mathematical Experience. New York: Hough–ton Mifflin.

Dubinsky, E. (1991). *Constructive Aspects Of Reflective Abstraction In Advanced Mathematics. In L. P. Steffe (Ed.) Epistemological Foundations Of Math–ematical* Experience (Pp. 160–187). *New York: Springer–Verlag*.

Epp, S. S.(1990): *The Role Of Proof In Problem Solving.* In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking And Problem Solving. (Pp. 257–269). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy Of Mathematics Education*. The Falmer Press.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity*. In D. Tall (Ed.). Advanced Mathe–matical Thinking (Pp. 42–53). The Netherlands: Kluwer Academic Publish–ers.

Fawcett, H. P. (1938). The Nature Of Proof. New York: Teachers College, Columbia University.

Fischbein, E. (1980, August). *Intuition And Proof*. Paper Presented At The 4Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathemat–ics Education, Berkeley, Ca.

Frensch, P., & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving*: Principles And Mechanisms. Mahwah, Nj: Erlbaum.

Glaser, B., & Strauss, A. (1977). *The Discovery Of Grounded Theory: Strategies For Qualitative Research*. San Francisco: University Of California San Francisco.

Goldberg, A., & Suppes, P. (1972). *A Computer Assisted Instruction Program For Exercises On Finding Axioms*. Educational Studies In Mathematics, 4, 429–449.

Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics*. Arithmetic Teacher, 28(6), 14–17.

Hadamard, J. W. (1945). *Essay On The Psychology Of Invention In The Mathematical Field*. Princeton University Press.

Heid, M. K. (1983). *Characteristics And Special Needs Of The Gifted Student In Mathematics.* The Mathematics Teacher, 76, 221–226.

Hersh, R. (1993). *Proof Is Convincing And Explaining. Educational* Studies In Mathematics, 24, 389–399.

Hershkowitz, R. (1989). *Visualization In Geometry—Two Sides Of The Coin*. Focüs On Learning Problems In Mathematics, 11, 61–76.

Hoyles, C. (1997). *The Curricular Shaping Of Students' Approaches To Proof*. For The Learning Of Mathematics, 17(1), 7–16.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1971). *Mental Imagery In The Child*. Basic Books Inc.

Ivanitsyna, E. N. (1970). *Achieving Skill In Solving Geometry Problems*. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), Soviet Studies In The Psychology Of Learning And Teaching Mathematics (Vol. 4). *Stanford: School Mathematics Study Group*.

Johnson, M. L. (1983). *Identifying And Teaching Mathematically Gifted Elementary School Children*. Arithmetic Teacher, 30(5), 25–26; 55–56.

Kamii, C., & Declark, G. *(1985). Young Children Re–Invent Arithmetic*: Implications Of Piaget's Theory. New York: Teachers College Press, Columbia University.

Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Of A Problem Solving Strategy By Young Children*. Journal For The Education Of The Gifted, 13, 115–140.

Kline, M. (1976). *Nacome: Implications For Curriculum Design*. Mathematics Teacher, 69, 449–454.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children. (J. Teller, Trans. And J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs And Refutations. Cambridge, Uk*: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). *When The Problem Is Not The Question And The Solution Is Not The Answer*: Mathematical Knowing And Teaching. American Educational Research Journal, 27, 29–63.

Lerman, S. (1983). *Problem–Solving Or Knowledge Centered*: The Influence Of Philosophy On Mathematics Teaching. International Journal Of Mathematics Education, 14(1), 59–66.

Manin, Y. I. (1977). *A Course In Mathematical Logic, New York*: Springer–Verlag.

Mason, J. (1996). *Expressing Generality And Roots Of Algebra*. In N. Bednarz, C.Kieran, &L. Lee (Eds.), *Approaches To Algebra (Pp. 65–86)*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K.(1982). *Thinking Mathematically*. London: Addison– Wesley.

Menchinskaya, N. A. (1959). *Psychology Of The Mastery Of Knowledge In School. Moscow*: Apn Press. National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics. Reston, Va: Author.

Piaget, J. (1975). *The Child's Conception Of The World. Totowa, Nj*: Littlefield, Adams.

Poincaré, H. (1948). *Science And Method. New York*: Dover.

Polya, G. (1954). *Mathematics And Plausible Reasoning*: Induction And Analogy In Mathematics (Vol.1). Princeton, Nj: Princeton University Press.

Presmeg, N. C. (1986). *Visualization And Mathematical Giftedness*. Educational Studies In Mathematics, 17, 297–311.

Rubin, A., & Babbie. E. *(1997) Research Methods For Social Work (3Rd Ed.)*, Pacific Grove, Ca: Brooks/Cole Publishing Company.

Senk, S. (1985). *How Well Do Students Write Geometry Proofs?* Mathematics Teacher, 78, 448–456.

Shapiro, S. I. (1965). *A Study Of Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical Information*. Voprosy Psikhologii, No. 2.

Sheffield, L. J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students*. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Sriraman, B. (2002). *How Do Mathematically Gifted Students Abstract And Generalize Mathematical Concepts*. Nagc 2002 Research Briefs, 16, 83–87.

Sriraman, B. (2003A). *Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations*. The Journal Of Secondary Gifted Education, Xiv(3), 151–165.

Sriraman, B. (2004). *The Characteristics Of Mathematical Creativity*. The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.

Strunz, K. (1962). *Pدdogogische Psychologie Des Mathematischen Denkens*. Heidelberg: Quelle & Meyer.

Suppes, P., & Binford, F. (1965). *Experimental Teaching Of Mathematical Logic In The Elementary School*. The Arithmetic Teacher, 12, 187–195.

Usiskin, Z. P. (1987). *Resolving The Continuing Dilemmas In School Geometry*. In M. M. Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.) Learning And Teaching Geometry, K–12: 1987 Yearbook (Pp. 17–31). Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure And Insight*. Orlando, Fl: Academic Press.

Wallas, G. (1926). *The Art Of Thought*. New York : Harcourt Brace.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.

Yakimanskaya, I. S. (1970). *Individual Differences In Solving Geometry Problems On Proof*. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.). Soviet Studies In The Psychology Of Learning And Teaching Mathematics (Vol. 4), Stanford: School Mathematics Study Group.

ملاحظات

تشير سارة إلى تمارين في النسبة والتناسب التي تعطي تتابع خطوات وصولاً إلى التماثلات الأساسية.



هل الموهبة والإبداع في الرياضيات مترادفان؟

تحليل نظري لهذين المفهومين

بهارات سريرامان

ملخص

يفترض المرء أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات في مرحلة الروضة وحتى الصف الثاني عشر (K-12) الذين يجري تصنيفهم بوساطة اختبارات خارج المستوى[1] (Out Of Level)، هم أيضاً طلاب مبدعون في أعمالهم. ويكوّن علماء الرياضيات «المبدعون» مجموعة فرعية صغيرة في ميدان الرياضيات التخصصية (Professional Mathematics). إذ لا تعني الموهبة في الرياضيات عند هذا المستوى الإبداع بالضرورة، ولكن مما لا شك فيه أن العكس صحيح. هل يعد مصطلحا النبوغ والإبداع مترادفين في مجال الرياضيات؟ طُوّر مفهوما الإبداع والموهبة في الرياضيات من خلال تركيب وتحليل الكتابات العامة المتعلقة بالإبداع والموهبة وتحليلها. وفي هذا الإطار يُقارن بين مفهومي الإبداع، والنبوغ في مستويات الـ(K-12)، والمستويات الاحترافية بهدف وضع مبادئ، ونماذج «تحقق أقصى قدر ممكن» من التوافق بين هذين المفهومين. وتُناقش كذلك علاقة هذه النماذج بمستوى الروضة-الصف 12، ومستويات الاحتراف مع الأخذ في الحسبان

1) يستخدم مصطلح يشير إلى ممارسة تقييم طالب باستخدام اختبار طور الطلاب في متسوى آخر (غالباً في مستوى ورأس أقل). ولكن يستخدم المصطلح انضمامه الاختبارات المتحررة من المستوى والتي يمكن أن تستخدم للكشف عن المواهب في اللغة والرياضيات.

الاعتبارات العملية الخاصة بغرفة الصف. ويوسع هذا البحث نطاق الأفكار التي قدّمها يوسيسكين (Usiskin, 2000) على نحوٍ كبير.

مقدمة

غالباً ما ينظر إلى الرياضيات بصفتها مجالاً مقتصراً على علماء الرياضيات المختصين. أما كلمة الإبداع، فتعد «ضبابية» وتخضع لكثير من التفسيرات. والسؤال الآن هو: ماذا يعني الإبداع في الرياضيات؟ هل هو مجرد اكتشاف نتيجة أصيلة؟ وإذا كان الأمر كذلك، فهل يصبح الإبداع عندئذٍ مجالاً مقتصراً على علماء الرياضيات المختصين؟ وهل يعدُّ اكتشاف الطلاب نتيجة أو إستراتيجية رياضية معروفة مسبقاً عملاً إبداعيّاً؟ في هذا السياق، يرى علماء رياضيات بارزون من أمثال جاك هادمرد (Jacques Hadamard, 1945) وجورج بوليا (George Polya, 1954) أن الفرق الوحيد بين عمل علماء الرياضيات والطلاب النابغين هو مجرد فرق في الدرجة. أيّ أن كلاًّ منهم يعمل بما يتوافق ومستواه، وعلينا بأن ندرك أن الطلاب قادرون على أن يكونوا مبدعين. وعموماً، فإن وجهة النظر هذه تبدو جلية لمعلمي الطلاب النابغين في الرياضيات، الذين يتوقعون من طلابهم أن يظهروا سمات الإبداع. وبعبارة أخرى، هل يعني اختيار الطلاب بصفتهم متفوقين في الرياضيات، أن يكونوا كذلك مبدعين فيها؟ وهل يعني النبوغ الرياضي الإبداع في الرياضيات؟

يرى كاجاندار (Kajander, 1990) أن الإبداع حتى بين الموهوبين في الرياضيّات الذين يظهرون سمات إبداعية كالتفكير التباعدي (Divergent Thinking)، يكون عبارة عن نوع خاص من أنواع الإبداع، ولا يمت بالضرورة للتفكير التباعدي بصلة (ص. 254). وتتضمن هذه الجملة السؤال الآتي: هل الإبداع في الرياضيات يقتضي ضمناً الموهبة. مما لا شك فيه، أن هذه الجملة صحيحة على مستوى بحوث الرياضيات، إذ بوسع المرء أن يجادل بسهولة في أن علماء الرياضيات المختصين الموهوبون، استناداً إلى حقيقة حصولهم على شهادة الدكتوراه في الحقل، وأنهم أيضاً ذوو فاعلية في مجال البحث العلمي. وعلى الرغم

من ذلك، حتى عند هذا المستوى، فإن علماء الرياضيات المختصين يصنفون حفنة صغيرة فقط من زملائهم على أنهم «مبدعون» بمعنى الكلمة (Usiskin, 2000).

قد تساعد هرمية يوسيسكين ذات المستويات الثمانية على توضيح درجات الموهبة والنبوغ فيما يتصل بعلماء الرياضيات. وقد وضع هذه الهرمية لتصنيف الموهبة الرياضية التي تتراوح بين مستوى (صفر – 7). حيث يمثل مستوى صفر (انعدام الموهبة) في هذا التسلسل الهرمي الطلاب اليافعين الذين يعرفون القليل جدّاً من الرياضيات، في حين يمثل المستوى الأول (مستوى الثقافة) اليافعين الذين لديهم معرفة أولية بالأرقام بصفتها جزءاً من الاستخدام الثقافي، وتماثل معرفتهم الرياضية معرفة طلاب الصفوف من السادس حتى التاسع. ومن الواضح أن نسبة كبيرة جدّاً من الناس العاديين تقع ضمن المستويين الأول والثاني.

وهكذا، يتوزع بقية مجتمع الموهبة في الرياضيات ضمن المستويات الثاني إلى السابع على أساس الموهبة الرياضية. ويمثل المستوى الثاني طلاب صفوف الشرف (الإحلال المتقدم) للمرحلة الثانوية القادرين على التخصص في الرياضيات الذين يصبحون في نهاية المطاف معلمي رياضيات في المرحلة الثانوية. يمثل المستوى الثالث «الطلاب الرائعين» الذين يكونون من بين من يحصلون على علامة من 750–800 في اختبار التحصيل المدرسي 1 أو الذين يأتون في المركز الرابع أو الخامس في اختبار المقررات المتقدمة (Advanced Placement AP) في التفاضل والتكامل. يتمتع هؤلاء الطلاب بقدرات القيام بعمل الخريجين المبتدئين في الرياضيات. ويمثل المستوى الرابع (الطالب الاستثنائي) الطلاب الذين يتميزون في مسابقات الرياضيات، ويقبلون في المخيمات الصيفية للعلوم/الرياضيات و/أو الكليات بسبب موهبتهم. إن هؤلاء الطلاب قادرون على بناء البرهان الرياضي ومناقشة علماء الرياضيات في الرياضيات. ويمثل المستوى الخامس علماء الرياضيات المنتجين. وعلى الرغم من أن وصف يوسيسكين لهذا المستوى غامض ومبهم، فإن المرء يستطيع أن يستدل على أنه يمثل الطلاب الذين أتموا درجة الدكتوراه في الرياضيات بنجاح، أو علوم أخرى ذات صلة بالرياضيات، وأنهم قادرون أيضاً على الكتابة والنشر في هذا الحقل. أما المستوى السادس فهو «المنطقة التي أُجيزت» أو

أُجمع عليها (The Ratified Territory) في مجال علماء الرياضيات المتميزين الذين تقدموا بمجالهم إلى الأمام بإنجازات بارزة؛ ومثل هؤلاء العلماء تجدهم في كل زمان، في مختلف المجالات التي يعملون فيها. وهؤلاء هم زملاء رجل الأعمال ألفرد سلون (Alfred P. Sloan) الذين كانوا الأفضل ضمن فئتهم العمرية في الولايات المتحدة. وأخيراً، يمثل مستوى السابع العظماء في جميع العصور؛ الفائزين بجوائز الحقل في الرياضيات 2. ويقتصر هذا المستوى على العمالقة أو العباقرة أمثال ليونارد يولر (Leonard Euler)، وكارل فريدرك جوس (Karl Friedrich Gauss)، وبيرنهارد ريمان (Bernhard Riemmann)، وسرينيفازا رامانوجان (Srinivasa Ramanuja)، وديفيد هيلبرت (David Hilbert)، وهنري بوانكريه (Henri Poincaré).

ويلاحظ أن علماء الرياضيات المختصين ظهروا في المستوى الخامس في هرمية يوسيسكين للموهبة الرياضية ذات المستويات الثمانية، في حين ظهر علماء الرياضيات المبدعون في المستويين السادس و السابع. وبناءً عليه، فإن الإبداع في الرياضيات في المجال الاحترافي يشير إلى النبوغ والموهبة الرياضية، ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً. أما الطلاب الموهبة والنبوغ في الرياضيات فقد جاؤوا في المستويين الثالث والرابع في هذا التصنيف الهرمي للموهبة الرياضية. وتتلخص النقطة التي ركز عليها يوسيسكين في أن هؤلاء الطلاب يمتلكون إمكانات التقدم عبر المجال الاحترافي (المستوى الخامس) بوجود المساندة التدريسية والوجدانية الملائمة عندما ينتقلون من مرحلة الروضةإلى الصف الثاني عشر ثم إلى الجامعة.

الدافع لهذا البحث

تشير دراسات كثيرة مثل (Gramond, 1994; Davis, 1997; Smith, 1966; Torrance, 1981)، إلى أن السمات السلوكية للأفراد المبدعين تتعارض في كثير من الأحيان مع السلوك المقبول في المدارس الرسمية. فمثلاً، عادة ما يترتب على السلوك السلبي، مثل اللامبالاة بقوانين غرفة الصف وإظهار السأم والسخرية والنشاط المفرط، إجراءات تأديبية بدلاً من التدخلات الوجدانية الملائمة. وأما الطلاب الذين يمتثلون

لقواعد السلوك، فإنهم يميلون في الأغلب إلى إخفاء قدراتهم العقلية لأسباب اجتماعية، وينظرون إلى موهبتهم الأكاديمية بصفتها مصدراً للحسد. يزخر التاريخ بكثير من الأمثلة لأشخاص مبدعين، وصفوا بالمصطلحات الدارجة بالمنتكسين (Deviants). وقد أورد بروور (Brower, 1999) ما يربو على خمسين مثالاً لكتّاب مشهورين ومبتكرين وعلماء وفنانين وممثلي مسرح ممن أودعوا السجن بسبب مخاوف المجتمع من أفكارهم القادرة على إحداث تحولات جذرية في التفكير العام.

وغالباً ما يكون التبرير الجماعي لكبت الإبداع في مستويات مرحلة الروضة إلى الصف الثاني عشر تحت غطاء فعل ما يعتقد أنه لمصلحة معظم الطلاب، والتعلل بحجة «العدالة والإنصاف»، هذا المفهوم الذي يُساء استخدامه، والتستر وراء خطط المناهج وأهداف التحصيل المدرسي وما إلى ذلك. وقد أثار إقرار قانون «عدم إهمال أي طفل» (No Child Left Behind, Nclb) تحت ستار «العدالة والإنصاف»، جدلاً كثيراً حول ما يجب فعله مع الطلاب النابغين والمبدعين في غرفة الصف. وقد بلغ هذا الجدل الحد الذي وصف فيه مارشاك (Marshak, 2003) دعوة قانون «عدم إهمال أي طفل» إلى المساءلة استناداً إلى الاختبارات المقننة لمهارات القراءة والكتابة والحساب التقليدية التي يثمّنها المجتمع الصناعي، بالخطوة العملاقة للوراء، أي إلى أربعينيات القرن الماضي. وقال أيضاً: بعيداً عن المهارات «التقليدية» الثلاث (القراءة والكتابة والحساب)، فإن هناك كثيراً من المهارات الأخرى، مثل حل المشكلات والتفكير الإبداعي، تعدُّ ضرورية للنجاح في المجتمعات العالمية في القرن الحادي والعشرين، وقد كان هناك انتقاد مستمر من جهات كثيرة، ومنها مؤسسات التعليم العالي، للقيود المبالغ فيها التي يفرضها الأكاديميون على الالتحاق بفروع الدراسة، إضافة إلى «الاتجاهات الغربية الضيقة والمتأصلة» (Crème, 2003, P. 273). ويلقى مثل هذا النقد صدى خاصّاً في عالم الرياضيات، لا سيما في مستوى مرحلة الروضة- الصف الثاني عشر، حيث نادراً ما يُشجَّع الطلاب النابغون من غير العرق الغربي، على التعبير بأساليب رياضية معقولة قد تكون مألوفة لهم من ثقافاتهم. ويُعلّمون تبني الاتجاهات الغربية بدلاً من ذلك. وخلاصة القول أن الدراسات تشير إلى أن النبوغ في الأغلب يكون مرتبطاً بالانصياع للتقاليد السائدة، في حين يُصوَّر الإبداع على أنه

سلعة مهمشة يرعاها ويغذيها بعض المعلمين، ولكنه لا يحظى بالتشجيع في العادة. وعلى أي حال، يبدو أن هناك انفصاماً بين قيمة الإبداع في مستوى الروضة–الصف الثاني عشر وقيمته في المجالات المهنية، وهذا ما يجعلنا نفكر ملياً في كيفية تلافي هذا الانقسام. وقد ناقشنا هذه القضية في الفصل الحالي تحت سؤال: ماذا عن حل المسائل؟

يلاحظ أن المسائل التي يعالجها علماء الرياضيات مليئة بالشكوك وعدم اليقين. وعلى الرغم من ذلك، فإنه نادراً ما تقدم غالبية مناحي المناهج الدراسية والتدريسية للطلاب وجهة النظر المفتوحة هذه عن الرياضيات. وفي الحقيقة، نادراً ما تستخدم الممارسات الصفية ومناهج الرياضيات المسائل المطروحة مفتوحة النهاية، ولا تسمح أيضاً للطلاب باستخدام مدة زمنية طويلة في التعامل مع تلك المسائل، أو التعامل معها على نحوٍ مستقل.

والجانب المشجع في هذه الأجواء، هو أن عملية حل المشكلات في دروس الرياضيات قد حظيت بتركيز زائد، منذ انطلاق المجلس الوطني لمعلمي معايير الرياضيات (The Original National Council of Teachers of Mathematics Standards, 1989). وعلى الرغم من ذلك، وبعد مرور مدة طويلة، فقد أصبح حل المشكلات شعاراً عقائدياً وذريعة يُحتج بها كأنه الدواء الشافي لعلاج علل المناهج. ويدعم هذا القول نتائج الدراسات المتعلقة بحل المشكلات. مثلاً، وصف شوينفيلد (Schoenfeld, 1993) في دليل البحث عن تعليم الرياضيات وتعلّمها (*The Handbook For Research On Mathematics Teaching And Learning*)، كيف أصبح حقل تعليم الرياضيات في الولايات المتحدة عرضة للتقلبات طوال عشر سنوات تقريباً، متأرجحاً بين المهارات الأساسية وحل المشكلات. وقد أعرب عن تفاؤله باستمرار الحركة التي أشار إليها كثيرون في ذلك الوقت ب «عقد حل المشكلات» في تعليم الرياضيات. وعلى الرغم من ذلك، ومنذ نشر الدليل في عام 1993، «فقد بشّر التركيز العام على الاختبارات المصيرية (High Stakes Tests) بالعودة غير المأمونة للمهارات الأساسية» (Lesh & Sriraman, 2005, P. 501).

إضافة إلى ذلك، دعنا ننظر إلى الحقائق الآتية: حظي نمط بوليا الاستكشافي لحل مسائل الرياضيات (Polya– Style Problem Solving Heuristics)، – مثل ارسم صورة،

اعكس العملية، ابحث عن مسألة مشابهة، أو حدد المعطيات والأهداف، بتاريخ طويل من المناصرة بصفة هذه القدرات مهمة لتطور الطلاب (Polya, 1945). ولكن ماذا يعني أن تفهم هذه الإستراتيجيات؟ من الواضح أن لمثل هذه الإستراتيجيات قوة وصفية. أي، غالباً ما يستخدم الخبراء مثل هذه المصطلحات عند تقديم توضيحات لسلوكهم، بعد حلهم فعلاً المسائل، أو لسلوكات الأشخاص الآخرين الذين يلاحظونهم في أثناء حلهم هذه المسائل. ولكن، هناك أدلة قليلة على أن العمليات العامة التي يستخدمها الخبراء في وصف سلوكاتهم السابقة في حل المسائل، يمكن أن تمثل وصفات لتوجيه الخطوات الآتية للمبتدئين في أثناء الجلسات المتواصلة لحل المسألة. ويوجد أيضاً لدى الباحثين الذين يجمعون البيانات عن حل المسائل، نزعة طبيعية للتدقيق في البيانات المتوافرة لهم من منظور نماذج بدهية لحل المسائل. وعلى الرغم من القيمة الكبيرة لمثل هذه الطريقة، فإننا نتساءل: هل يزيد هذا المنحى فعلاً من تقدم بحوث حل المسائل؟ وإذا ما تفحص المرء تاريخ بحوث حل المسائل، فقد مرت مناسبات مهمة جدّاً أدرك فيها الباحثون وجهة النظر الاستكشافية (Heuristic View) المقيدة لحل المسائل التي توفرها الأدوات الحالية لبحوث حل المسائل، ونجحوا في إعادة تصميم النماذج القائمة بعمليات أكثر وصفاً. وعلى الرغم من ذلك، تبقى لدينا مشكلة وهي أن العمليات الوصفية أشبه ما تكون بمسميات لفئات كبيرة من المهارات أكثر من كونها مهارات بحد ذاتها. وبناءً عليه، ففي محاولات الذهاب إلى ما وراء «القوة الوصفية» (Prescriptive Power) لتحويل هذه العمليات إلى «قوة توجيهية» أكبر (Prescriptive Power)، فقد عمد الباحثون والمعلمون إلى وسيلة تقوم على تحويل كل «عملية وصفية» إلى قائمة أكبر من العمليات الأكثر تقييداً، ولكنها في الوقت ذاته أكثر وضوحاً. وعلى الرغم من ذلك، فإذا ما اعتُمد هذا المنحى، فإن معظم ما يعنيه فهم هذه العمليات سوف يشتمل على معرفة وقت استخدامها. لذا، فلا بد من إدخال قوانين الترتيب الأعلى (Higher Order) ومبادئه الإدارية التي تحدد متى وكيف ستستخدم عمليات الترتيب الأدنى (Lower Order) التوصيفية.

إن المعضلة الواضحة التي تبرز في هذه القوائم القصيرة للعمليات الوصفية، هي أنها بدت عامة جدّاً لتكون ذات معنى. ومن جهة أخرى، تميل القوائم الطويلة للعمليات التوجيهية

إلى التعدد، بحيث تصبح معروفة وقت استخدامها من خلال فهمنا لها. وزيادة على ذلك، فإن إضافة المزيد من القوانين والمعتقدات فوق المعرفية يؤدي فقط إلى مضاعفة هاتين الصعوبتين الأساسيتين. وبعد مرور هذه المدة الطويلة على نشر كتاب شونفيلد، أفاد ليستر وكيلي (Lester & Kehle (2003، في مراجعة واسعة أخرى للدراسات، بوجود تقدم ضئيل في بحوث حل المشكلات، وقالا إن ما يمكن أن يقدمه منحى حل المشكلات للمدارس لا يزال قليلاً. أي أن على حقل تعليم الرياضيات أن يذهب إلى «ما هو أبعد من تسلسل خطوات العملية والوثائق المرمّزة» في منهجيات وطرائق البحوث، و«نماذج الأداء الحاسوبية البسيطة القائمة على الإجراء» لتطوير طرائق لوصف حل المسألة، من حيث النظم المفاهيمية التي تؤثر في أداء الطلاب (Silver, 1985, P. 257). وهكذا، فإن استخدام حل المسألة في غرفة الصف يثير تساؤلات كثيرة عن هدفه وفعاليته.

الإبداع في الرياضيات: ندرة التعريفات المحددة بالمجال في الرياضيات

بعد هذه المقدمة عن الموهبة والإبداع ومدلولاتهما في المجتمع، سوف نركز اهتمامنا بصورة أكثر تحديداً وعمقاً على مجال الرياضيات؛ بهدف إيجاد تعريفات مناسبة لهذين المصطلحين. لقد استخدمنا الدراسات الموجودة في استقصاء المعاني الكثيرة، وتحديد ملاءمتها وعلاقتها بمستوى مرحلة الروضة- الصف 12 ومستوى المختصين. تتسم معظم التعريفات الحالية للإبداع في الرياضيات الموجودة في مؤلفات الرياضيات وكتب تدريسها، بأنها ضبابية أو مربكة ومحيرة. وربما يعود سبب وجود هذا الغموض إلى صعوبة وصف هذا المفهوم المعقد. فمثلاً، عُرِّف الإبداع في الرياضيات عبر استخدام مجازات متنوعة، مثل القدرة على التمييز والاختيار، والتمييز بين الأنماط المقبولة وغير المقبولة، والانهماك في اتخاذ قرار بطريقة لاخوارزمية (Non-Algorithmic). وأن الدراسات المتعلقة بالطلاب المبدعين رياضيّاً في مرحلة الروضة-الصف 12 يكتنفها أيضاً الغموض والضبابية. لقد ارتبطت القدرة الرياضية الاستثنائية في هذه المرحلة (مستوى 4 للموهبة) بمتلازمة آينشتاين the Einstein syndrome، ومتلازمة أسبيرجر The Asperger Syndrome. تتميز متلازمة آينشتاين بالقدرة الرياضية الاستثنائية مع تأخر في تطور النطق، في حين

توصف متلازمة أسبيرجر بأنها اضطراب الطيف الذي يمتاز «بضعف شديد في التفاعل الاجتماعي المتبادل، والانغماس في اهتمامات ضيقة أو الهوس بموضوع معيّن...وأحياناً انعدام الرشاقة/ عدم الاتزان الحركي» (Clumsiness James, 2003, P. 62). وتستدعي قلة التعريفات المحددة للإبداع في الرياضيات في مؤلفات الرياضيات وكتب تدريسها، الابتعاد عن الرياضيات المحددة بالمجال إلى الكتابات العامة عن الإبداع بهدف بناء تعريف ملائم.

الإبداع: تعريفات عامة في علم النفس/علم النفس التربوي

يمكن العثور على كثير من التعريفات في الكتابات العامة. فقد استخدم كرافت (Craft, 2002) مصطلح «إبداع الحياة الواسعة» (Life Wide Creativity) في وصف السياقات المتعددة للحياة اليومية التي تتجلى فيها ظاهرة الإبداع. في حين وصف باحثون آخرون الإبداع على أنه استجابة «البقاء أو التكيف» (Survival Or Adaptive) الطبيعية للبشر في بيئة دائمة التغير. وأشار كرافت إلى ضرورة التمييز بين الإبداع اليومي، مثل ارتجال وصفه من «الإبداع الاستثنائي» الذي يؤدي إلى تحولات جذرية في جسم المعرفة في مجال محدد. ومن المقبول عموماً أن أعمال «الإبداع الاستثنائي» يمكن الحكم عليها فقط من خبراء ضمن مجال المعرفة المحدد. فمثلاً، يمكن الحكم على برهان أندرو وايلز (Andrew Wiles) لنظرية فيرمات الأخيرة (Last Theorem) من عدد قليل من علماء الرياضيات ضمن مجال فرعي محدد جدّاً لنظرية الأعداد (Number Theory)[1].

---

1) تقول نظرية الأعداد Number Theory إنه لا توجد ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، A و B و C And، تحقق المعادلة $an + bn = cn$، حيث n أكبر أو تساوي 2. في عام 1637، اعتقد الفرنسي بيير فيرمات (Pierre De Fermat) أنه حصل على برهان، وذكر ذلك في تعليق على كتاب ديوفانتيس عالم الرياضيات الذي عاش في مدينة الإسكندرية في العام 250 ق.م، لكنه قال إنه لا يستطيع أن يكتب البرهان لضيق الهامش. وبعد ذلك مات فيرمات وسميت هذه النظرية بنظرية فيرمات الأخيرة. حاول أعظم رياضيي العالم برهان نظرية فيرمات بلا جدوى، وهكذا ظلت تلك المسألة دون حل أكثر من 350 عاماً. وفي نهاية المطاف، جاء عالم الرياضيات الإنجليزي أندرو وايلز (Andrew Wiles) الذي جعل حلم حياته حل نظرية فيرمات، حيث قضى سبع سنوات في حلها، وأعلن ذلك في عام 1993، لكن جاء من اكتشف وجود خطأ في البرهان، مما اضطره إلى قضاء عام آخر لتصحيح هذا الخطأ- المراجع

ويمكـن للمـرء أن يجد، علـى نحوٍ أكثر تحديداً، فـي مجال علم النفس التربوي عدداً مـن التعريفات للإبـداع. مثلاً، ارتـأى ويسـبيرج (Weisberg, 1993) أن الإبداع يقتضـي اسـتخدام عمليـات المعرفـة العادية والنتائـج في النتاجات الأصـيلة غير العاديـة. وزيادة على ذلك، عرّف سـتيرنبيرج ولوبـارت (Sternberg & Lubart, 2000) الإبداع أنه القدرة علـى إنتاج عمل أصـيل غير متوقـع، يكون مفيداً وسـهل التكيف. في حيـن تفرض تعريفات أخـرى متطلـب التجديـد أو الابتـكار أو الشـذوذ والغرابـة (Novelty, Innovation Or Unusualness) في الإجابة عن أي مسألة (Torrance, 1974). وعرّف كثير من نظريات التجميع (Confluence Theory) الإبداع على أنه التقاء المعرفة والقدرة وأسلوب التفكير والمتغيـرات الدافعية والبيئية، وتطـور أفكار المجال المحدد التي ينجـم عنها منه نتاجات إبداعية. مثلاً، ارتأى شيكزنتميهالي (Csikszentmihalyi 2000) أن الإبداع أحد الطفرات التـي تنجم عن التفاعل المناسـب بين الفرد والمجال والحقل. وأخيـراً، قدم بلاكر وبيغيتو (Plucker And Beghetto, 2004) تعريفاً تجريبيّاً للإبداع استناداً إلى نتائج مجموعة من الدراسـات التجريبية في الحقل، حيث عرّفا الإبداع بصـفته «تفاعلاً بين القدرة والعمليات التي يسـتطيع الفـرد أو الجماعة من خلالها تقديم مُخرج أو منتـج يتميز بالجدة والفائدة، على نحو ما هو محدد ضمن بعض السياقات الاجتماعية» (ص. 156).

تطبيق التعريفات العامة للإبداع على الرياضيات

لا يتوقع المرء عادة عملاً إبداعيّاً غير عادي على مسـتوى مرحلة الروضة-الصف 12. وعلـى الرغـم من ذلك، فمـن الممكن أن يقدم الطلاب رؤى جديدة في مسـألة رياضـيات، أو تفسـيراً جديداً أو تعليقاً أو شـرحاً لدراسـة أو عمل تاريخي. ومما لا شـك فيه أن الطالب في هذا المسـتوى يكون قادراً على الإتيان بشـيء أصـيل. ويمكن أن يؤدي تركيب التعريفات المتعددة للإبداع إلى تعريف عملي للإبداع في الرياضـيات في كلا المستويين- المختصين ومسـتوى مرحلة الروضة-الصف 12. ويمكن أن يعرّف الإبداع في الرياضيات على المستوى

الاحترافي ب (أ) القدرة على إنتاج عمل أصيل يوسع المعرفة على نحوٍ كبير و/أو (ب) ذلك الذي يفتح الطريق لأسئلة جديدة لعلماء الرياضيات الآخرين.

مثلاً، قاد بحث هويت (Hewitt, 1984) عن حلقات الدوال المتصلة إلى احتمالات وأسئلة جديدة غير مكتشفة في حقل التحليل وعلم المكان «الطوبولوجيا» (Topology)، وتناولها علماء الرياضيات الآخرون عقوداً عدة. وخير إيضاح معاصر على تأثيرات بحث هويت بعيدة المدى، هي أن تبحث عن عنوان البحث على «جوجل» لترى أن ما يزيد على مئة وعشرين ألف مشاهد يبحثون عنه.

ومن جانب آخر، يمكن أن يعرّف الإبداع في الرياضيات على مستوى مرحلة الروضة-الصف 12 أنه: (أ) العملية التي ينجم عنها شيء جديد غير عادي، و/أو حل/حلول مذهلة لمسألة ما أو مسائل مشابهة و/أو (ب) صياغة أسئلة جديدة، و/أو احتمالات تتيح النظر في مسألة قديمة من زاوية جديدة تتطلب التخيل والتصور (Einstein & Inheld, 1938; Kuhn, 1962). ويلاحظ أن الجزء الثاني يشبه تعريفات الإبداع في الرياضيات الاحترافية إلى حدٍّ بعيد.

وتشير البحوث أيضاً إلى أن الأفراد المبدعين في المستويين الاحترافي ومستوى مرحلة الروضة-الصف 12 يميلون إلى إعادة صياغة المسألة أو البحث عن مسألة مشابهة. وأنهم أيضاً يختلفون عن أقرانهم من حيث كونهم مفكرين مستقلين إلى حدٍّ بعيد، وميالين إلى المثابرة، والتأمل كثيراً.

الظروف التي تعزز الإبداع في الرياضيات على المستوى الاحترافي

بعد أن أصبح لدينا تعريفات عملية للإبداع في الرياضيات، فمن الطبيعي أن نستكشف الظروف التي يظهر فيها الإبداع. ولتوضيح الظروف التي تعزز ظهور الإبداع على الصعيد الاحترافي، أجرى سريرامان (C Sriraman, 2004) دراسة نوعية مع خمسة من علماء الرياضيات المختصين المبدعين المشهورين، هدفت إلى التوصل

إلى فهم أفضل للظروف التي بموجبها يظهر الإبداع في الرياضيات. تحدّث علماء الرياضيات الخمسة عن عمليات التفكير المتضمنة في ابتكار الرياضيات. وأشارت النتائج إلى أن العملية الإبداعية لعلماء الرياضيات قد اتبعت بصورة عامة نموذج الجشتالت ذا المراحل الأربع المتمثلة في الإعداد والحضانة والإشراق والتحقق *preparation–incubation–illuminationverification*. وتبيّن أيضاً أن عمليات التفاعل الاجتماعي والتصور والاستدلال والحدس كانت من بين خصائص الإبداع في الرياضيات. ومن الخصائص الأخرى التي أسهمت في إنتاج بحثهم، إتاحة الوقت لهم في الكليات لمتابعة البحوث وحرية الحركة والإغراء الجمالي للرياضيات، إضافة إلى الحافز على حل المسائل وما يترتب عليه من نتائج هائلة في عالم الواقع. وقد تحدث علماء الرياضيات الخمسة جميعهم مطولاً حول لحظة «أها» أو «وجدتها» (Eureka)، التي منحتهم رؤية جديدة للمسألة قادتهم إلى بناء البرهان بنجاح.

النبوغ الرياضي

كشفت دراسة تركيبية لأدبيات البحوث عن النبوغ الرياضي وسمات التفكير الرياضي أن الباحثين عرّفوا مفهوم الموهبة الرياضية من حيث قدرة الفرد في العمليات الرياضية مثل: (أ) القدرة على استخلاص البنى الرياضية وتعميمها وفهمها؛ (ب) القدرة على إدارة البيانات؛ (ج) القدرة على إتقان مبادئ التفكير المنطقي والاستنتاج؛ (د) القدرة على التفكير القياسي والتجريبي، ومناقشة المسائل ذات الصلة؛ (هـ) المرونة والقدرة على قلب العمليات والأفكار الرياضية ؛ (و) المعرفة البدهية بالبرهان الرياضي؛ (ز) القدرة على اكتشاف المبادئ الرياضية على نحوٍ متسق؛ (ح) القدرة على اتخاذ قرارات في مواقف حل المسائل؛ (ط) القدرة على تصور المسائل أو العلاقات أو كلّ منها؛ (ي) القدرة على استنتاج السلوك الذي يستخدم لفحص صحة البنية الرياضية أو بطلانها؛ (ك) القدرة على التمييز بين المبادئ التجريبية والنظرية؛ و (ل) القدرة على التفكير المعاود أو المتردد (Recursive Thinking)

إضافة إلى ذلك، ارتبط النبوغ على الدوام بالقدرة على التعلم بوتيرة أسرع (Chang, 1985; Heid, 1983). تعد معظم العمليات الرياضية المدرجة أعلاه ذات سمة معرفية، وتُدرس في أثناء مرحلة الروضة-الصف 12. وتجدر ملاحظة أن كثيراً من هذه الدراسات تشتمل على أدوات مستندة إلى مهمة تحديد المفاهيم/ الأفكار الرياضية التي تعرض لها الطالب بعض الشيء. وهناك ملاحظة أخرى لا تقل أهمية عن سابقتها، وهي أنه على الرغم من أن كثيراً من هذه السمات تؤدي دوراً مهمّاً، وتعد أيضاً ضرورية في الرياضيات الاحترافية، فإنها ليست كافية لإظهار الإبداع جليّاً. وبعبارة أخرى، كي تؤدي دور عالم رياضيات محترف (المستوى 5)، وتبتكر رياضيات جديدة، فإن هناك قدرات أكثر أهمية من غيرها. وعند اتخاذ القرارات المحددة، تؤدي القدرة على التجريد والتعميم والاستدلال وبناء المبادئ النظرية والتفكير المعاود دوراً مهمّاً في ابتكار الرياضيات على المستوى الاحترافي. وتؤدي أيضاً عمليات الاستدلال، وبناء المبادئ النظرية، والتفكير التكراري دوراً حيويّاً في كيفية ابتكار الرياضيات الجديدة. ويمكن تصوير هذه العملية ببساطة على النحو الآتي: يحاول عالم الرياضيات التطبيقي أن يبتدع نماذج رياضية تحاكي العالم الفعلي، في حين يميل عالم الرياضيات البحتة إلى استخدام هذه النماذج ليرى تأثيراتها. وفي أثناء عملية النمذجة، تواجه عالم الرياضيات التطبيقي بعض الأوضاع المادية، فيحاول تحديد المبادئ الأساسية، في حين يتراجع عالم الرياضيات إلى الوراء، ويستخلصها ليحصل على وضع تدوم فيه هذه المبادئ الأساسية، ويرى الآثار المترتبة على ذلك. ويعمل عالم الرياضيات البحتة الذي يتعامل مع الآثار بطريقة رسمية؛ ليتبين ما ينطبق منطقيّاً على هذه المجموعة المعينة من الفرضيات، دون أن يلقي بالاً أيكون هذا النموذج مناسباً أم لا.

حاول واسون وجونسون- ليرد معرفة هل يكون الشباب اليافعون قادرين على تقدير التبعات المنطقية عند إعطائهم مجموعة من الافتراضات. وقد اهتم الباحثان على وجه الخصوص بتحديد السياقات التي قادت اليافعين 3 إلى التوصل إلى استنتاجات مضللة. ووفقاً لرأي واسون وجونسون- ليرد، فإن الفرد الراشد (The Rational Individual) هو القادر فقط على عمل استدلالات؛ وقد لا يكون راشداً بأي معنى آخر للكلمة (ص. 2). ونظراً إلى أن عملية الاستدلال يمكن أن تقود إلى تعميمات رياضية (Mathematical

Generalizations) ، فقد درس الباحثان كيفية اكتشاف الراشدين القوانين العامة، بإعطائهم تجارب منظمة تحتوي على فرضية، وطلبا إليهم أن يقرروا عناصر البرهان ذات الصلة باختبار هذه الحقيقة. وهكذا، فقد استقصى الباحثان طريقة اكتشاف الراشدين القوانين، بوضع تجارب بنيوية يصار بموجبها إلى «عرض الموضوعات بفرضية، وعليهم أن يقرروا بنود الأدلة ذات الصلة باختبار هذه الحقيقة. لقد صُممت التجارب لاستقصاء ميل الأفراد إلى تقديم حلول غير متسرعة استناداً إلى دليل مطابق» (ص. 202). وتوصل الباحثان إلى كثير من النتائج المثيرة. أولها، ميل أفراد العينة إلى التوصل إلى استدلالات مضللة عند تقديمها مع عبارت توكيدية مثبتة. ونتيجة أخرى، تمثلت في أن معظم أفراد الدراسة كانوا ميّالين إلى محاولة تحقق التعميمات بدلاً من محاولة إثبات بطلانها. وزيادة على ذلك، فقد لاحظ الباحثان أن محتوى المواد التي أُجري عليها الاستدلالات، كان مهمّاً. حيث عمد أفراد الدراسة إلى إجراء تحويلات غير مشروعة (Illicit Conversions)، وكانوا متحيزين إلى التحقق عند مصادفة مادة ذات طبيعة مجردة، مثل المسائل الرياضية حول فضاء عدد أبعاده «ن» (N-Dimentional Space) الذي يمكن تمثيله بالرموز فقط. وعلى الرغم من ذلك، عندما كانت المادة ملموسة، وتوصل أفراد الدراسة إلى تحديد روابط متنوعة بينها، فقد عمدوا إلى إيجاد روابط فرضية بين الحقائق ثم قياسها. وبعبارة أخرى، يختلف سلوك الاستدلال الرياضي عن سلوك الاستدلال اليومي العادي، وأن الأفراد النابغون في الرياضيات ماهرون في الربط المنطقي الصحيح بين الأفكار المجردة بطريقة مختلفة عن الأفكار اليومية. وقد درس فيجوتسكي (Vygotsky, 1962, 1978) هذا التمييز بين المفاهيم اليومية (أو التجريبية) المجردة (أو النظرية) في بحثه الاستقصائي حول تكوين المفاهيم، وتابع أيضاً دافيدوف (Davydov, 1988, 1990) هذا الموضوع لاحقاً.

استكشف فيجوتسكي في البداية مفهوم التعميمات العلمية في أثناء تقصيه كيفية تكوين المفهوم، وميز بين نوعين من المفاهيم، وأعني المفاهيم العفوية أو اليومية، والمفاهيم العلمية والنظرية. أما دافيدوف (Davydov, 1988)، الذي واصل هذا البحث في تكوين المفاهيم، فأكد أن الفرق المهم بين المفاهيم اليومية (التجريبية) والمفاهيم

النظريــة يتمثل في طريقة تكوينها. وفقاً لرأي دافيدوف، يتمثل الفرق بين المفاهيم اليومية والمفاهيم النظرية أيضــاً في نــوع التجريد الذي يتعامل معه المــرء؛ أي التجريد التجريبي مقابل التجريد النظري، إذ يشتمل الأول على مقارنات سطحية لفهم أوجه الشبه والاختلاف، في حين يشتمل الآخر على مقارنات بنيوية. وهكذا، تتطلب التعميمات التجريبية استخلاص أوجه الشــبه بين مجموعة من الأشــياء التي قد تمثل بذاتها وظائف وبنى متفاوتة. وقد ذكر دافيدوف، مثلاً، أن مفهوم الاســتدارة (Roundness) يمكن استخلاصه من مفهوم الطبق (Dish) أو العجلة (Wheel) وهلّم جرّا. وعلى الرغم من ذلك، لا يُظهر مفهوم الاســتدارة المحتوى الموضــوعي الفعلي الــذي يمثل مركز النقاط على بعد مســافة محددة من النقطة الثابتــة. ولا يكون هذا المحتوى واضــحاً من مجرد شــكل الاســتدارة ومظهرهــا. وقد ادعى دافيدوف أن اســتثمار التعميم التجريبي المفيد فقط في تكوين المفاهيم اليومية غير كافٍ لصياغة التعميمات النظرية التي تميز الرياضيات. وبعيداً عن سلوك الاستدلال في الأوضاع النظرية، فإن التفكير الرياضــي يتميز أيضــاً ب «التفكير المعاود» وهو مصطلح استعير من عمليات معالجة البيانات الحاسوبية.

ووفقاً لرأي فاتايل (Vatile, 1989) ، تُعد المعاودة النموذج الذي عالج البشر بموجبه المســائل. ويقول كيرين وبيري (Kieren And Pirie, 1991) إن التفكير المعاود عبارة عن مجــاز ملائــم» للتدقيق في الظاهرة المعقدة كليّاً من منظور معرفة الشــخص للرياضــيات وفهمــه لها». (صــ. 79) . وقد دعم المؤلفان هــذا الادعاء بإثبات أنه يوجد في مســار حياة الأطفال ذوي المرجعية الذاتية عدد من «الاحتمالات السلوكية». وبناءً عليه، لما كان الأطفال ذوي مرجعيــة ذاتية، فإن المعاودة في الطبيعة تُعد إحدى وســائل المعرفة لديهم، إذ تتكوّن معرفتهم من خلال «الأفعال الفكرية التي تقتضــي أن تكــون المدخلات نتائج أفعال التفكير السابقة» (ص. 79) . ونظراً إلى أن الأطفال ذوو مرجعية ذاتية، فإن إحدى الوسائل المعرفية الرئيسة لديهم تكرارية بطبيعتها، وتتكوّن معرفتهم «من خلال الأفعال الفكرية التي تقتضي اســتخدام نتائج أفعال التفكير السابقة بصفتها مدخلات» (ص. 79) . ويرتبط هذا الجانب المعرفي بالرياضــيات بصــورة خاصــة؛ لأن بناء المعرفة والفهم الرياضــيين عملية حيوية ترتبــط فيها معرفة المرء الحالية والفهم المبني عليها بالمعرفة الســابقة. وقد حلّل كيرين

وبيري المعاودة في أفعال الطلاب وأفكارهم في خبرة حل المشكلات. وقد طرحا «مسألة المصافحة» المشهورة: «كم عدد المصافحات المطلوبة في صف عدد طلابه خمسة وثلاثون طالباً، بحيث يصافح كل شخص في الغرفة كل شخص مرة واحدة فقط؟»

إحدى إستراتيجيات الحل التي استخدمتها إحدى المجموعات تمثلت أولاً في تخصيص المسألة التي تشمل ثلاثين شخصاً إلى مسألة تشمل المجموعة كلها. وابتكر الطلاب إستراتيجية بحيث يوضع الأشخاص في صفوف، ويصافح الشخص الأبعد عن الباب بقية الاشخاص جميعاً، ويبلغ آخر شخص يصافحه بعدد المصافحات، وبعد ذلك يغادر الغرفة. ثم يكرر الشخص الثاني الأبعد عن الباب العملية نفسها، ويغادر الغرفة، وبعد تكرارات عدة، يجمع آخر شخص عدد المصافحات؛ أي: 1 +.....+ 32 + 33 + 34، ويغادر الغرفة. لاحظ أنه يمكن تعميم الحل السابق بسهولة لحالة واحدة على أشخاص عددهم «ن» . وتتمثل إحدى نتائج هذه الدراسة في عدم اكتراث معظم الطلاب بحساب الحل لخمسة وثلاثين شخصاً، حيث إنهم ابتكروا إستراتيجية ناجحة لهذا الغرض.

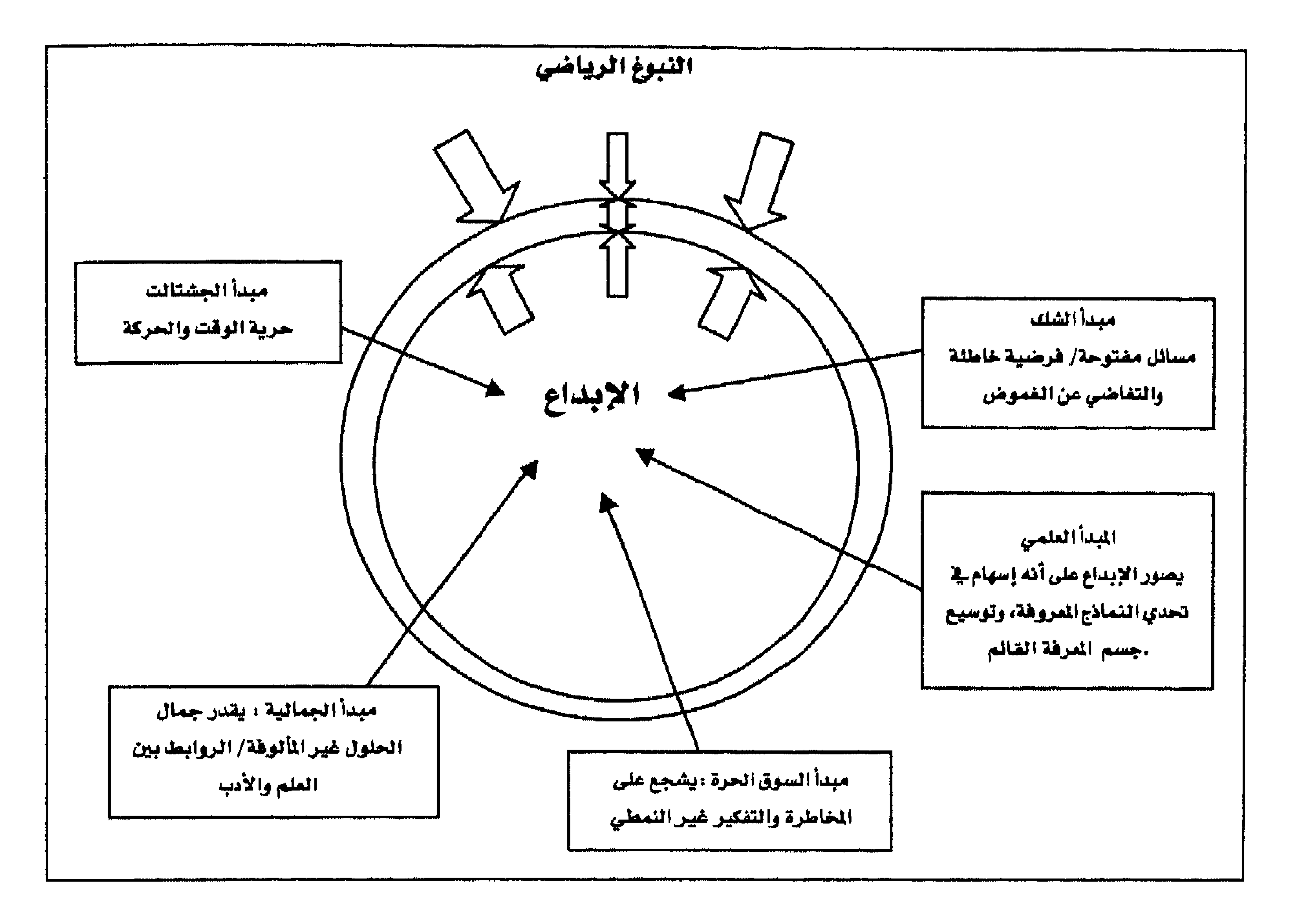
وتدل حقيقة أن المسألة لم تُحل بأي صورة، على أن الطلاب ارتأوا أن حلها لا يختزل إلى إجابة أو نتيجة حالة خاصة، بل «يتطلب» بنية تلك الحالة الخاصة أو يستخدمها. وتحوي «بنية» هذه الحالة الخاصة فكرة رياضية جوهرية صحيحة (سلسلة مصافحات غير متكررة) ، إضافة إلى شكل يمكن وصفها إجرائيّاً من خلاله.

تصور الباحثان هذه البنية المعاودة بيانيّاً بصفتها مثلثاً من الأنشطة، يشتمل على التخصيص وإيجاد النتائج، ومن ثم التعميم من خلال التفسير وتحقق الصدق. وتعد عملية التخصيص لحالات معينة والتخمين، ومن ثم التعميم بوساطة التفسير، وتحقق الصدق، سمة شائعة بين الطلاب النابغين في الرياضيات. وتظهر هذه العملية أيضاً أوجه الشبه بخصوص كيفية تفسير علماء الرياضيات المختصين النتائج في حقلهم ونقلها (Sriraman, 2004c).

مناقشة للصفوف من الروضة حتى الصف الثاني عشر: الآثار والتوصيات

توضح المناقشات السابقة أنه على الرغم من امتلاك الطلاب النابغين في الرياضيات الخصائص المعرفية المطلوبة للعمل على المستوى الاحترافي، فإن بعض السمات المعرفية تعدُّ أكثر أهمية من غيرها. ويقتضي هذا الهرم استخدام مسائل تستدعي استخدام مستوى عالٍ من الاستدلال وابتكار/اكتشاف المبادئ والتفكير المعاود.

وتشير مناقشة الإبداع في الرياضيات إلى أن كثيراً من خصائصه التي يصفها علماء الرياضيات بصفتها جوانب ذات قيمة كبيرة في مهنتهم، مثل حرية اختيار المسائل ومتابعتها في وضع تعليمي، وحرية الحركة المطلوبة في أثناء العمل، ومعرفة الفرق بين التعلم والإبداع، والإغراء الجمالي للرياضيات وفاعلية التحرك نحو حل مسائل ذات آثار عالمية هائلة، قد تكون على درجة عالية من الصعوبة لتحاكي غرفة الصف التقليدية. ويوضح الشكل(1:4) نموذجاً يشتمل على استخدام المبادئ الخمسة لتحقيق أقصى قدر ممكن من الإبداع بين النابغين في الرياضيات في مستوى الصف الثاني عشر. لقد لخصت خمسة مبادئ عامة مستمدة من الدراسات حول الإبداع في الرياضيات التي يمكن تطبيقها في غرفة الصف يوميّاً لزيادة إمكانية تفتّح الإبداع في الرياضيات في غرفة الصف.



شكل 4:1 تناغم الإبداع والنبوغ في مستوى الصف الثاني عشر

المبادئ الخمسة الشاملة للارتقاء بالإبداع

كما هو واضح من الشكل 1:4، فقد سُمّيت المبادئ الخمسة الشاملة التي برزت من تركيب دراسات تعزيز الإبداع في الرياضيات وتحليلها، على النحو الآتي: (أ) مبدأ الجشتالت، (ب) المبدأ الجمالي، (ت) مبدأ السوق الحرة، (ث) المبدأ العلمي، (ج) مبدأ الشك.

مبدأ الجشتالت (The Gestalt Principle): صور عالما الرياضيات البارزان هادمرد (Hadamard) وبوانكريه (Poincaré) الإبداع على أنه عملية يجري فيها عالم الرياضيات خيارات بين الأسئلة التي تقود إلى الفائدة مقارنة بتلك التي لا تقود إلى جديد. لقد تأثر هذان العالمان بعلم نفس الجشتالت في زمانهما، ووصفا الإبداع في الرياضيات بصفته عملية تتكون من أربع مراحل، هي: الإعداد، والحضانة، والإشراق، والتحقق (Wallas, 1926). وعلى الرغم من أن علماء النفس انتقدوا نموذج الجشتالت في الإبداع؛

لأنه يعزو جزءاً واسعاً من الإبداع «المجهول» إلى محركات اللاشعور في أثناء مرحلة الحضانة، فإن كثيراً من الدراسات التي أجراها علماء الرياضيات أكدت على الدوام صحة هذا النموذج (Burton, 1999A, 1999B; Davis & Hersh, 1981; Shaw, 1994; Sriraman, 2004c). وقد ظهر في هذه الدراسات جميعها، أن الفرد بعد أن يتناول حل المسألة مدة من الوقت (الإعداد) دون حدوث أي انفراج، فإنه يطرح المسألة جانباً ويبدأ بالتفكير في مسألة أخرى، فتقود مدة الحضانة هذه إلى رؤية حل المسألة، ثم إلى لحظة «وجدتها! أو أها!» أو «اليوريكا» من الإشراق. ولا شك في أن جل الناس قد مروا بهذه اللحظة السحرية. وعلى الرغم من قيمة مفهوم الجشتالت القديم هذا، فإنه يعاني الإهمال والتجاهل في غرفة الصف. وقد اكتشف كروتتسكي (Krutetskii, 1976) أن الأطفال النابغين في الرياضيات، قد مروا ببهجة الفرح الناجم عن الاكتشاف؛ هذا الفرح «الذي» يشتمل على شعور بالرضا من معرفة الصعاب التي تُغلّب عليها، وأن جهود المرء نفسها قد حققت الهدف (ص. 347). وهذا يقتضي أن يشجع المعلمون الطلاب النابغين في الرياضيات على التعامل مع مسائل ذات صعوبة ملائمة على مدار مدة ممتدة من الوقت، وبذلك يوجدون فرص اكتشاف الرؤية، والبصيرة والمرور بخبرة نشوة لحظة اليوريكا.

المبدأ الجمالي (The Aesthetic Principle): غالباً ما تحدّث علماء الرياضيات عن الإغراء الجمالي لوضع نظرية «جميلة» تجمع الأفكار المتباينة بعضها مع بعض، أو تربط بين الأفكار من مجالات الرياضيات المختلفة، أو تستخدم أسلوب إثبات غير نمطي (Birkhoff, 1956, 1969; Dreyfus & Eisenburg, 1986; Hardy, 1940). وتعدُّ نظرية ويدربيرن (Wedderburn Theorem)، التي تعدُّ حلقة القسمة المنتهية مثالاً على توحيد أفكار عشوائية؛ لأن البرهان يشتمل على الجبر والتحليل المركب ونظرية الأعداد. وإن حجة كانتور (Cantor) أيضاً المتعلقة بلا معدودية مجموعة من الأرقام الحقيقية، غالباً ما يستشهد بها بصفتها مثالاً لأسلوب الإثبات الرياضي الذكي وغير النمطي. وقد شبّه عالم الرياضيات الإنجليزي المشهور هاردي (G.H. Hardy, 1940) عالم الرياضيات المحترف بالفنان، فهو كالفنان صانع أنماط في عالم الأفكار المجردة. ومما قاله:

«إن عالم الرياضيات كالرسام أو الشاعر، فهو صانع أنماط. وإذا ما كانت أنماطه أكثر ديمومة من أنماطهم، فمرد ذلك إلى أنها مصنوعة من الأفكار...يجب أن تكون أنماط عالم الرياضيات، كأنماط الرسام أو الشاعر، جميلة؛ ويجب أن تتناغم الأفكار كالألوان أو الكلمات بعضها مع بعض. الاختبار الأول هو الجمال: لا مكان للرياضيات البشعة في العالم». (P.13)

أظهرت الدراسات الحديثة التي أجريت في أستراليا وألمانيا على طلاب المرحلتين المتوسطة والثانوية، أن الطلاب كانوا قادرين على تقدير «الجمال» في الحلول البسيطة للمسألة الرياضية المعقدة، إذ وجد برنكمان (Brinkmann, 2004) أن ذوي التحصيل المتدني أيضاً يقدرون الكفاح من أجل التوصل إلى الرؤية التي تفتح باب الحل للغز الرياضي. وارتأى بارنز (Barnes, 2000) أن اختيار المعلم مسألة من واقع الحياة، و«الإخراج المسرحي» الدقيق للحظة الاكتشاف، يُعدّان عنصرين حاسمين في نقل صورة محببة للرياضيات إلى غرفة الصف.

مبدأ السوق الحرة (The Free Market Principle): يخاطر علماء الرياضيات المختصون كثيراً عندما يعلنون إثباتاً لمسألة رياضية طال حلها كثيراً، إذ غالباً ما يضع علماء الرياضيات سمعتهم على المحك إذا ما اكتُشف خلل ما في برهانهم. مثلاً، تعرّض إعلان لويس دي برانغيس (Louis De Brangs) لبرهان فرضية ريمان (Riemann) لتفحص دقيق من الخبراء[4]. وقد قاد هذا الأمر لاحقاً إلى تجاهل ادعائه للبرهان اللامع لحدسية بيبرباخ (Bieberbach Conjecture). وقد انتبه مجتمع الرياضيات في الغرب لبرهان لويس لتخمين بيبرباخ فقط، عندما دعمت مجموعة مشهورة من علماء الرياضيات في الاتحاد السوفييتي برهانه. وفي الجانب المقابل، تقبّل مجتمع الرياضيات ادعاءات رامانوجان (Ramanujan) البدهية المتعددة التي تفتقر إلى الإثبات على نطاق واسع، بسبب دعم عمالقة لها من أمثال هاردي (G.H. Hardy) وليتيل وود (J.E. Littlewood)، ويتمثل تأثير هذه الحكايات من علماء الرياضيات المختصين في غرفة الصف بتشجيع المعلمين الطلاب على المخاطرة. فعلى وجه الخصوص، يتعين عليهم تشجيع الطلاب الموهوبين/المبدعين على عرض حلولهم المسائل الرياضية في المسابقات، أو اللقاءات

الطلابية المفتوحة، سواء كانت إقليمية أو على مستوى الدولة، متيحاً لهم فرصة اكتساب الخبرة في الدفاع عن أفكارهم عند تفحص أقرانهم لها بكل دقة.

المبدأ العلمي (The Scholarly Principle) : يتعين على معلمي مرحلة الروضة- الصف الثاني عشر أن يتبنوا فكرة الانحراف الإبداعي (Creative Deviance)[1] خلال إسهامهم في بناء جسم المعرفة الرياضية، ويتعين عليهم أيضاً أن يكونوا مرنين ومنفتحين على المجالات البديلة التي يستخدمها الطلاب في حل المسائل. وإضافة إلى ذلك، ويتعين عليهم أن يوجدوا بيئة صفية مناسبة، ويشجعوا الطلاب على الحوار والتدقيق في مصداقية المناحي المستخدمة من الطلاب والمعلمين الآخرين في حل المسائل. ويتعين عليهم أيضاً تشجيع الطلاب الموهوبين على تعميم المسألة و/أو الحل، إضافة إلى افتراض مجموعة من المسائل المماثلة في سياقات أخرى. إذ تساعد إتاحة الفرص للطلاب على افتراض المسائل وفهمها وتصميمها، ومساعدة الطلاب على التمييز بين المسائل الرياضية وغير الرياضية، والمسائل القوية من الضعيفة، والمسائل القابلة للحل من غير القابلة للحل. إضافة إلى ذلك، يمكن استثمار التفكير المستقل عن طريق تقديم فرص للطلاب لاستقصاء حالات المسألة دون أي تعليمات صريحة (English, In Press; Sriraman & English, 2004) . ويُشجَّع المعلمون أيضاً على الانتظام في تسريع المنهاج وتكثيفه؛ حتى يصل الطلاب الموهوبون في الرياضيات إلى المفاهيم المتقدمة بسرعة تعينهم على الارتقاء بالنشاط العلمي المستقل. ولّدت الدراسة الطولية للشباب ذوي النضج المبكر في الرياضيات (Study Of Mathematically Precocious Youth – Smpy) التي بدأتها جوليانا ستانلي (Julian Stanley) وجون هوبكنز (Johns Hopkins) عام (1971)، كمية كبيرة جدّاً من البيانات التجريبية جمعت على مدار ثلاثين عاماً، نجم عنها كثير من النتائج عن أنواع المناهج والتدخلات الوجدانية التي تعزز من متابعة الدورات المتقدمة في الرياضيات، وقد أنتج على

---

1) يُعرّف علماء الاجتماع الانحراف بالسلوك الذي ينتهك القوانين والتقاليد الصريحة والضمنية السائدة في المجتمع. ويشير مصطلح الانحراف عادة إلى السلوك غير المشروع. أما أن يكون الانحراف إبداعيّا فعندما يطرح الفرد أفكاراً جديدة ويرفض الانصياع للقوانين السائدة. فما الذي سيحدث، مثلاً، عندما يطرح أحد الموظفين، فكرة جديدة ويطلب تنفيذها لكن مديره يطلب إليه التخلي عن الفكرة. قد يلجأ الموظف إلى تجاهل تعليمات المدير ويطبّق الفكرة بطريقة غير قانونية، وهذا ما يسمّى الانحراف أو التمرد الإبداعي deviance creative– المراجع

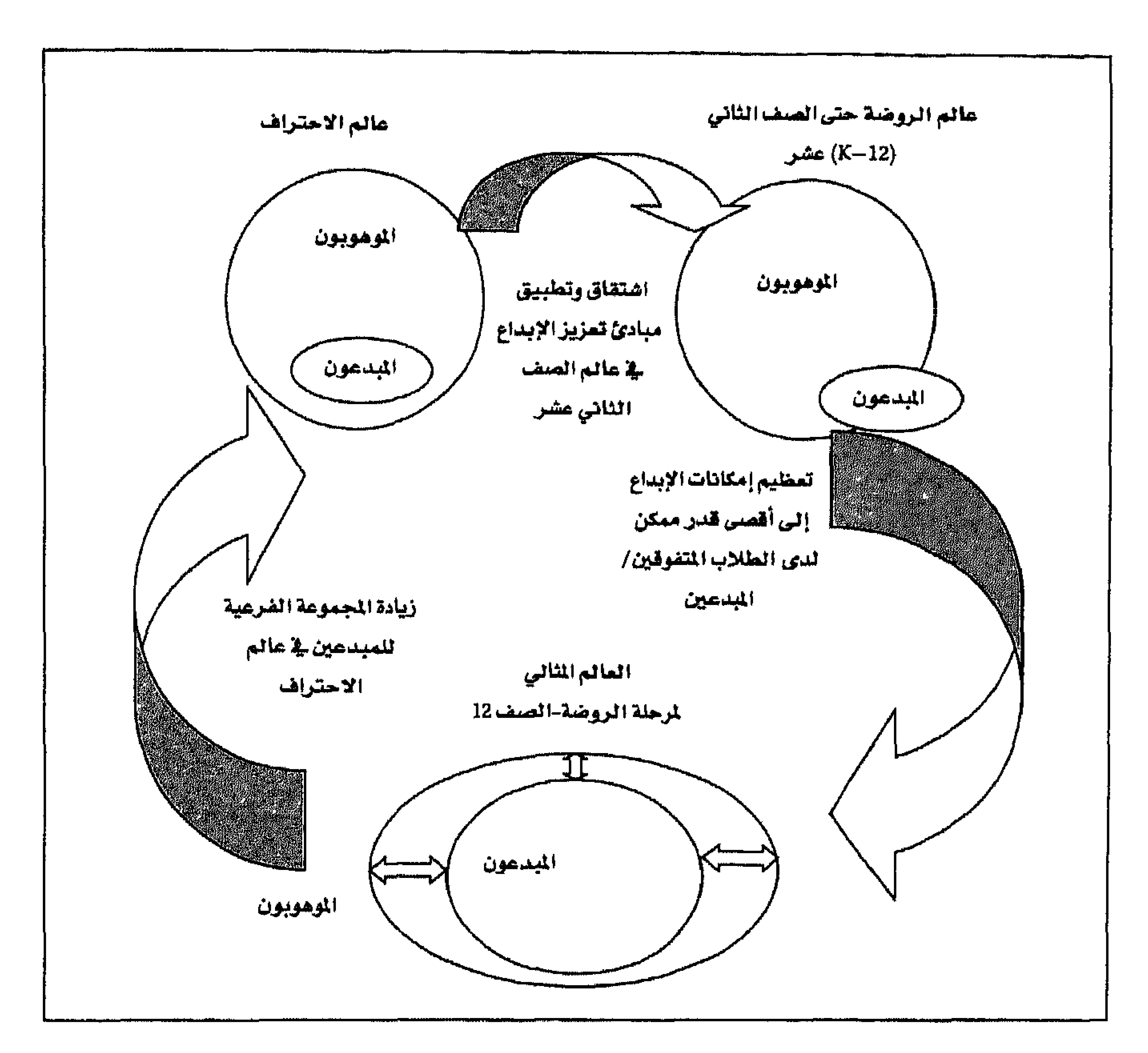
إثرهـا ما يربو على مئتين وخمسـين ورقة بحثية قدمت دعمـاً تجريبيّاً متميزاً تتعلق بفاعلية تسريع منهاج الرياضيات وتكثيفه (Benbow, Lubinski, & Sushy, 1996).

مبدأ الشك (The Uncertainty Principle): تُعدّ الرياضيات، على المستوى الاحترافي، مليئة بالشك والغموض كما اتضح من الاقتباسات المقدمة سابقاً. يتطلب الإبداع، بعكس التعلم، أن يتعرض الطلاب للشك إضافة إلى صعوبة ابتكار الرياضيات. وتتطلب هذه القدرة من المعلم تقديم دعم وجداني للطلاب الذين يعانون الإحباط إذا لم يقدروا على حل مسألة صعبة. وينبغي لك تعريض الطلاب دوريّاً لأفكار من تاريخ العلوم والرياضيات التي تطورت عبر قرون من الزمن، واستنفدت جهود أجيال من علماء الرياضيات إلى أن توصلوا إلى حل المسألة في نهاية المطاف. سيفيد استثمار هذه السمة في النهاية الطلاب الموهوبين في الرياضيات في المسار الاحترافي. ففي عام (1992)، طوّر كيسوتر (Kiesswetter) ما يسمى بنموذج هامبورج (*Hamburg Model*) في ألمانيا الذي تركز تركيزاً أكبر على إتاحة المجال أمام الطلاب الموهوبين في الرياضيات للمشاركة في نشاط طرح المسائل، يتبع ذلك مرحلة استكشاف للإستراتيجيات المجدية وغير المجدية في حل المسائل المطروحة. وقد استحوذ هذا المنحى على جوهر الطبيعة الاحترافية للرياضيات، حيث تؤدي المهمة الأكثر صعوبة في الأغلب إلى صياغة النظرية (Theorem) صياغة صحيحة. وعلى النقيض من ذلك، تميل بعض النماذج الموجودة داخل الولايات المتحدة كالنماذج المستخدمة في مركز الشباب الموهوبين (Centre For Talented Youth) إلى التركيز على تسريع تعلم المفاهيم والعمليات من المنهاج العادي، وبذلك تُعِدُّ الطلاب لدورات متقدمة ضمن الرياضيات (Barnet & Corraza, 1993).

وبعد عرض المبادئ الخمسة التي تحقق أقصى قدر ممكن من الإبداع في غرفة الصف من مرحلة الروضة - الصف 12، سأعرض النموذج (شكل 2:4) الذي يستحوذ على الجوهر الأساس لهذا البحث، ويوضح العلاقة والتوافق لبنى النبوغ والإبداع في الرياضيات بين مستوى الروضة - الصف 12 والمسارات الاحترافية للرياضيات.

النموذج المفاهيمي

يوضح النموذج المقدم في الشكل(2:4) الطبيعة النشطة للعلاقة بين الإبداع في الرياضيات والنبوغ الرياضي، ويوضح أيضاً إمكانات جسر الهوة بين مستوى الروضة وحتى الصف الثاني عشر، والمسارات الاحترافية للرياضيات. يوضح مستوى الروضة حتى الصف الثاني عشر الموجود في أعلى يسار الشكل، أن الإبداع في الرياضيات يظهر في «هامش» المجموع العام للطلاب الموهوبين في الرياضيات. وفي الجانب المقابل، يوضح العالَم الاحترافي للرياضيات أن الرياضيات سلعة نادرة. والسؤال المطروح الآن، كيف يمكن جسر الهوة بين هذين العالَمين المنفصلين - الاحتراف والإبداع؟ يشير النموذج إلى إمكانية جسر الهوة بين هذه المسارات المنفصلة للرياضيات الاحترافية، وغرفة صف رياضيات في مستوى الروضة حتى الصف الثاني عشر، عبر مزيد من التركيز للإرتقاء بالقدرة الإبداعية لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات في غرفة الصف «المثالية». ويمكن تحقيق ذلك من خلال تطبيق المبادئ الخمسة (شكل 1:4) التي ينجح في استخدامها علماء الرياضيات المبدعون في غرفة الصف في مستوى الروضة وحتى الصف الثاني عشر. ومما لا شك فيه أن البيئة الصفية، ولا سيما تلك التي تضم طلاباً متفوقين رياضيّاً، التي تكون فيها مبادئ الجشتالت والسوق الحرة والعلمية والشك جزءاً من العملية التعليمية، تزيد من إمكانية الإبداع إلى أقصى حدٍّ ممكن بين الموهوبين في الرياضيات. وتساعد الزيادة في الإبداع هؤلاء الطلاب وهم يشقون طريقهم إلى مرحلة ما بعد الثانوية، ومرحلة إجراء البحوث في الرياضيات، أو ينتقلون من المستوى الرابع إلى الخامس أو السادس. ومن الجدير بالذكر أن التقدم نحو المستوى السادس يزيد من المجموعة الفرعية لعلماء الرياضيات المبدعين.



شكل 2،4 تحقيق أقصى قدر ممكن من التوافق بين الإبداع والنبوغ

وعلـى الرغم من أن النمـوذج المفاهيمي ثلاثي تكاملـي (Triadic) في طبيعته، فإنه يختلف عن النماذج العامة التي اقترحها رينزولي (Renzulli, 1978–1986) وسـتيرنبيرج (Sternberg, 1997)، من حيث إنه يوضـح العلاقة بين الإبداع والنبوغ في مجالات محددة من الرياضيات. ويحتوي النموذج على عناصر مفهوم رنزولي ثلاثي الحلقات للتفوق، ووجهة نظر سـتيرنبيرج الثلاثية للتفوق. يشـير مفهوم رينزولي ثلاثي الحلقات إلى أن النبوغ تفاعل بين القدرات التي هي أعلى من المعدل، والسـلوك الملتـزم بالتركيز على المهمة، والإبداع. يتميز عالم الرياضـيات الاحترافي (المسـتوى 5) بقدرات رياضـية فوق المعدل بين علماء الرياضـيات، والالتزام بالبحث. ومع ذلك، يبقى الإبداع في الرياضـيات عند هذا المستوى سـلعة بعيدة المنال تظهر بين مجموعة ضـئيلة من مجموع علماء الرياضـيات. يمكن توكيد مفهوم رنزولي للالتزام بالمهمة في العالم المثالي لمرحلة الروضـة– الصف 12 تحت مبدأ

الشك، الذي يرى أن المسائل الصعبة تستغرق وقتاً طويلاً ونضالاً مضنياً حتى تُحل. وترى وجهة نظر ستيرنبيرج الثلاثية في الإبداع أن الأفراد الموهوبين يمتلكون مزيجاً متفاوتاً من النبوغ التحليلي والتركيبي (الإبداعي) والعملي. وقد لقيت وجهة النظر هذه صدى خاصّاً في عالم الرياضيات، إذ يمتلك علماء الرياضيات (المستوى 5) المنتجون في مجال بحوثهم مستوى عالياً من القدرات التحليلية والعملية، حيث تظهر القدرات العملية في اختيار مسائل يمكن حلها ونشرها. ويمتلك أيضاً علماء الرياضيات المبدعون (المستويان 6 و 7) مستويات أعلى من قدرات التركيب، مقارنة بعلماء الرياضيات في المستوى 5، من حيث إن البحوث التي ينشرونها تفتح آفاقاً جديدة للبحث لدى علماء الرياضيات الآخرين. وخير مثال على ذلك البحث الذي قام به «هويت» (Hewitt) عام (1948). وربما تجري مقايضة هذه المستويات العالية من قدرات التركيب بمستويات أقل من القدرات العملية. مثلاً، غالباً ما يعمد علماء الرياضيات في (المستويين 7/6) إلى ترك البرهان في المنتصف، أو حتى أنهم يهملون نشر أعمالهم أحياناً.

هناك كثير من الأمثلة في تاريخ الرياضيات التي تظهر فيها مثل هذه النزعات بين علماء الرياضيات المبدعين جدّاً. مثلاً، ترك عالم الرياضيات الهندي سرينفازا رامانوجون (Srinivasa Ramanujan, 1887–1920)، مذكرات كتبت بخط اليد مليئة بالنظريات غير المثبتة، التي لا تزال تسهم في التوجهات الخصبة لنمو نظرية الأعداد التحليلية والدوال الإهليجية (Elliptic Functions) والسلاسل اللانهائية (Infinite Series) والكسور المستمرة (Continued Fractions). واسهمت أيضاً قائمة ديفيد هيلبيرت (David Helbert, 1900) المكونة من ثلاث وعشرين مسألة، التي قدمها لعلماء الرياضيات في المؤتمر الذي عقد عام 1900 في باريس، في ظاهرة نمو الرياضيات، والاتجاه الخاص الذي نمت فيه (Rowe & Gray, 2000). ولا تزال فرضية «ريمان» مسألة مفتوحة تعكس آثاراً عميقة على مجالات كثيرة من الرياضيات. وخير مثال حديث على هذا، هو مثال بول إردوس (Paul Erdos) وهو عالم رياضيات معاصر عبقري غامض، اشتهر بإعطاء علماء الرياضيات الآخرين تخمينات، و/أو مسائل بتلميحات وحلول جزئية أو دون حلول. وقد اتّسم علماء الرياضيات الذين حلوا تلك المسائل وكتبوا النتائج، باللطف حيث أدرجوا اسم

إردوس بصفته مشاركاً في تأليف بحوثهم. وفي الحقيقة أن زملاء إردوس في التأليف أعطوا لأنفسهم رقماً أسموه (إردوس رقم 1، Erdos Number 1)، وأطلق علماء الرياضيات الذين شاركوهم في البحوث على أنفسهم (إردوس رقم 2، Erdos Number 2) وهكذا.

يمكن أيضاً رؤية وجهة نظر ستيرنبيرج الثلاثية للموهبة في النموذج في الشكل 4 :2. ولكي نزيد إمكانات الإبداع في الظهور إلى حدها الأقصى في حصة الرياضيات، يمكن أن يشجع المعلمون الطلاب المبدعين رياضيّاً على المشاركة في تقديم رؤاهم التركيبية في الربط بين المسائل المتنوعة مع بقية الطلاب في الصف (Sriraman, 2004a). ويمكن أيضاً استخدام الأمثلة التاريخية في التفكير التركيبي (Synthetic Thinking) في الرياضيات، التي يبدو كأنها تربط الأفكار والمفاهيم المتنوعة في الصف، لإضفاء مزيد من الإيضاح على قوة هذه الرؤى وقيمتها. تحوي المبادئ العلمية والسوق الحرة والجمالية على جوانب من وجهة نظر ستيرنبرغ الثلاثية في النبوغ.

وتشتمل المبادئ الخمسة على أفكار لباحثين متنوعي الثقافات، يمكن أن تعزز الإبداع بوجه عام عن طريق ربط مفاهيم الآداب والعلوم بالرياضيات وبالعكس. وتتمثل السمات المشتركة لمئات الباحثين متنوعي الثقافات (قدامى ومعاصرين)، كما حلّلها روبرت روت- بيرشتاين (Root-Bernstein 1989, 1996, 2000, 2001, 2003) وآخرون غيره، في: (أ) التفكير الهندسي البصري و/أو التفكير في المبادئ الهندسية، (ب) الانتقال المتكرر في وجهات النظر (ج) التفكير في التشبيهات (Analogies) (د) الوعي المعرفي أو معرفة قيود المجال، (هـ) الاهتمام باستقصاء المفارقات التي غالباً ما تظهر التفاعل بين اللغة والرياضيات والعلوم، (و) الاعتقاد بموسى أوكام (Occam's Razor)، أو الاعتقاد أن الأفكار البسيطة السهلة أفضل من المعقدة، (ز) الاعتراف بدور المصادفة (ح) النزعة نحو التأثير في الجدول الزمني (Sriraman, 2005).

موسى[1] أو مقص أوكام (Occam's Razor) مبدأ وضعه الإنجليزي وليام الأوكامي (1288-1347)، من الأمثلة الحديثة التي ساقها روت- بيرشتاين، مدى تأثير لوحات الرسام الهولندي ماوريتس كورنيليس إيشر (Escher Maurits Cornelis) المستوحاة رياضيّاً، في الفيزيائي الرياضي البريطاني روجر بنروز (Roger Penrose)، الذي زار أحد معارض الفنان في العام 1954. وبتحفيز من الزوايا التي رسمها إيشر في بعدين وبدت مستحيلة، بدأ بنروز بإيجاد أشيائه المستحيلة، مثل المثلث «المستحيل» الشهير الذي يظهر مثلثاً ثلاثي الأبعاد ينعطف إلى الأمام وإلى الخلف ببعدين. وكتب روت - بيرشتاين عن ذلك:

> «عرض روجر بنروز المثلث على والده ليونيل بنروز Lionel S. Penrose وهو عالم أحياء اشتغل بالفن، واخترع السلّم المستحيل (Impossible Staircase) الذي يبدو فيه السلّم بصورة حلزونية إلى الأعلى وإلى الأسفل في آنٍ معاً، وبعث بنسخة منه إلى إيشر، الذي طور الجوانب الفنية للسلم المستحيل بطرق باتت مشهورة حتى يومنا هذا.» (ص. 274).

ومن التأثيرات المشهورة لفن إيشر في الرياضيات مسألة التبليط (Tiling Problem) الدورية واللادورية (Periodic And Aperiodic) التي اشتهرت بوساطة روجر بنروز ومارتن جاردنر (Martin Gardner)، وساعدت دارسي خصائص البلورات (Crystallographers) على فهم بنية كثير من السبائك المعدنية اللادورية (Root-Berstein, 2003).

الطبيعة المتغيرة للرياضيات

يتمثل الجانب المهم الآخر في هذه المناقشة في السؤال المتصل بالتوازن بين الرياضيات البحتة والتطبيقية. حيث تشير الدراسات إلى أن طبيعة الرياضيات ذات الصلة بهذا العصر قد تغيرت كذلك. وعلى الرغم من الجذور الغنية والقديمة، فقد ارتأى ستين (Steen, 2001) أن على علماء الرياضيات في زماننا هذا أن يدينوا بالعرفان إسهامات الباحثين في فروع المجالات المعرفية الخارجية كالأحياء والفيزياء والمال والعلوم

1) وينص على أن: أبسط الفرضيات هي أصحها. ويعتمد المبدأ على أن شرح أي ظاهرة يجب أن يقوم على أقل عدد من الفرضيات من خلال ترك أي فرضية لا تؤثر في الظاهرة أو النظرية أو تشرحها- المراجع

المعلوماتية والاقتصاد والتربية والطب وما إلى ذلك، الذين استخدموا الرياضيات بنجاح في إيجاد نماذج كان لها تطبيقات عميقة ومؤثرة في عالمنا هذا. وفي الواقع أن حقل الرياضيات نجم عن هذه الدراسات البينية متعددة التخصصات، والتطبيقات التي انبثقت عنها وازدهرت مع بزوغ القرن الحادي والعشرين.

ومع ذلك، فإن حل المسائل على نحو ما هو مطبّق في غرفة الصف لا يشتمل على هذا المنحى البيني متعدد التخصصات ونمذجة ما يحصل في العالم الحقيقي. أما في المرحلة الجامعية في الولايات المتحدة، فيتركز الاهتمام بصورة متزايدة على الإسراع في إعداد طلاب اليوم في المجالات المناسبة للمستقبل. ويعلق «ستين» على ذلك قائلاً: يعتمد علم الأحياء على البيانات والحساب والنماذج اعتماداً كبيراً، فقد أصبحت أقرب إلى الرياضيات في كل جانب من جوانبها (ص. Xi). وفي هذا السياق، يمول مجلس البحوث الوطني ومؤسسة العلوم الوطنية الجامعات على نحو كبير للبدء ببرامج دكتوراة متعددة التخصصات (Interdisciplinary Doctoral Programs) تجمع بين الرياضيات وغيرها من العلوم، بهدف تأهيل علماء ماهرين في تحويل الحقائق إلى «رياضيات». وعادة ما تكون الرياضيات في المرحلة الثانوية بوابة للعبور إلى عالم الموضوعات الرياضية الواسع العميق. ومع ذلك، لا تزال معظم مناهج الرياضيات التقليدية تعامل بالمعالجة التقليدية للرياضيات، مقارنة بالمنحى النموذجي والمنحى متعدد التخصصات المستخدم في العالم الحقيقي. وقد اشتكى شيفيلد، بينيت، بيريوزابل، ديرموند، ووير ثيمر (Sheffield, Bennett, Berriozabal, Dearmond, And Wertheimer, 1995) من عدم إحداث تغيير كثير في مناهج الرياضيات منذ ذلك الحين، وأشاروا إلى أن الطلاب النابغين في الرياضيات كانوا الأقل إفادة من التغيير، وغير قادرين على استخدام موهبتهم التي يمكن تصويرها على أنها مورد اجتماعي ثمين للمحافظة على القيادة في عالم متغير تقنيّاً. وزيادة على ذلك، تفيد رياضيات المرحلة الثانوية أيضاً بصفتها حارساً على بوابة الدراسات المتقدمة في كثير من المجالات (Kerr, 1997).

ويمكن القول أن التعامل التقليدي مع الرياضيات له أثر قليل أو معدوم في الأنشطة المستندة إلى نمذجة تتطلب القدرة على التواصل والعمل بروح الفريق. إضافة إلى ذلك، فقد حالت الرياضيات التقليدية تاريخيّاً بين الطالبات المتفوقات ومتابعة أربع سنوات من رياضيات المرحلة الثانوية. ويصعب معالجة مثل هذا العجز في مستوى الجامعة، ويترتب عليه وجود عدد قليل من الطلاب القادرين على العمل بمستوى الخريجين في الحقول متعددة التخصصات، مثل البيولوجيا الرياضية والمعلوماتية الحيوية (Steen, 2005). وفي ضوء ذلك، يمكن لأي عالم تربوي يقرأ التاريخ أن يتنبأ بأثر كرة الثلج أو دورة اللّوم (Cycle Of Blaming) لعدم الإعداد الكافي في المرحلة الثانوية مروراً بالمرحلة المتوسطة وانتهاءً بالمرحلة الابتدائية، وهذا يعني أن علينا أن نعمل من الأسفل إلى الأعلى. أي، يتعين علينا البدء من مراحل الدراسة المبكرة بدراسة النظم المعقدة التي تحدث في واقع الحياة. وأشار ليش وكابوت وهاميلتون (Lesh, Kaput And Hamilton, 2006) إلى تلك المشروعات، كالتي تقدمها جامعة بيردو (Purdue University) للمساواة بين الجنسين في مشروع الهندسة، التي تقاس فيها قدرات الطلاب وتحصيلهم باستخدام مهمات صُمّمت لتحاكي واقع الحياة في حل المسائل. وقالوا إن كثيراً من أوجه الفهم والقدرات التي تبرز في هذه المشروعات بصفتها أساسية للنجاح، لا يُركز عليها في الكتب المدرسية أو الاختبارات التقليدية. وإن ما يثير الدهشة، أن هؤلاء الطلاب ينحدرون من مجتمعات ممثلة بنسبة ضئيلة جدّاً، ولا سيما الإناث والأقليات العرقية، في مجالات تؤكد على الرياضيات والعلوم والتقانة، وهم محرومون بسبب عدم تعرُّف قدراتهم في السابق (Lesh & Sriraman, 2005A, 2005B; Sriraman, 2005).

وهكذا، فقد يكون من المفيد بصورة أكثر أن ينتظم الطلاب في أنشطة استنباط نماذج تعرضهم لنظم حياة واقعية معقدة بدلاً من التركيز على استنباط حل المسائل. وهناك احتمال كبير أن يتابع الطلاب الموهوبون في الرياضيات النظم المفاهيمية الرياضية الناجمة عن هذه الاستقصاءات، من حيث تطبيقاتها على وجه التحديد، إضافة إلى كونها توجِد أفكاراً بدهية يمكن اكتشاف النظريات من خلالها، وهذا يماثل تماماً ما يفعله علماء الرياضيات الحقيقيون (Sriraman & Strzelecki, 2004).

ملاحظات ختامية

ختاماً، لا يقتصر هدف مجتمع تعليم الموهوبين على ضمان تحقيق الطلاب الموهوبين في الرياضيات قدراتهم ليصبحوا علماء رياضيات منتجين وعمليين، بل يشمل التحقق أيضاً من عدم إهمال الطلاب المبدعين في الرياضيات من بين الموهوبين فيها، فقد يكون هؤلاء في المحصلة هم الطلاب القادرين على التقدم بهذا الحقل إلى الأمام من خلال طرائقهم ورؤاهم غير العادية وغير التقليدية. وفي نهاية المطاف، يؤدي أثر الفراشة (Butterfly Effect) الناجم عن إهمال إحدى هذه القدرات لدى طلاب المستوى 6 (علماء الرياضيات المبدعين) في غرفة الصف، إلى التأثير فعلاً في حياة آلاف الطلاب من المستوى 5 (علماء الرياضيات المنتجين). والحالة التي توضح هذه التأثيرات بعيدة المدى لأثر الفراشة هذا يتمثل في قائمة مسائل هيلبرت الرياضية (Hilbert,1900) التي عززت كلاً من الرياضيات البحتة والتطبيقية، وكذلك ملاحظات رامانوجان المدونة في دفاتر مذكراته.

قائمة المراجع

Barnes, M. (2000). Magical Moments In Mathematics: Insights Into The Process Of Coming To Know. For The Learning Of Mathematics, 20(1), 33–43. Barnett, L.

B., & Corazza, L. (1993). *Identification Of Mathematical Talent And Programmatic Efforts To Facilitate Development Of Talent*. European Journal For High Ability, 4, 48–61

Behr, M., & Khoury, H. (1986). *Children's Inferencing Behavior*. Journal For Research In Mathematics Education, 17(5), 369–381.

Benbow, C. P., Lubinski, D. & Sushy, B. (1996). *The Impact Of Smpy's Educational Programs From The Perspective Of The Participant*. In C. P. Benbow & D. Lubinski(Eds), Intellectual Talent (Pp. 266–300).Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Birkhoff, G. D. (1956). *Mathematics Of Aesthetics*. In J. R. Newman (Ed.), The World Of Mathematics, Vol. 4 (7Th Ed., Pp. 2185–2197). New York: Simon And Schuster.

Birkhoff, G. D.(1969). *Mathematics And Psychology*. Siam Review, 11, 429–469.
Brinkmann, A. (2004). The Experience Of Mathematical Beauty. In Contri– butions To P. C. Clarkson, M. Hannula (Organizers), Tsg 24: Students' Mo– tivation And Attitudes Towards Mathematics And Its Study. Proceedings Of The 10Th International Congress Of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.

Brower, R. (1999). *Dangerous Minds*: Eminently Creative People Who Spent Time In Jail. Creativity Research Journal, 12(1), 3–14.

Burton, L. (1999A). *The Practices Of Mathematicians*: What Do They Tell Us About Coming To Know Mathematics? Educational Studies In Mathematics, 37(2), 121–143.

Burton, L. (1999B). *Why Is Intuition So Important To Mathematics But Missing From Mathematics Education*? For The Learning Of Mathematics, 19(3), 27–32.

Chambers, J. A. (1964). Relating Personality And Biographical Factors To Scientific Creativity. Psychological Monographs, 78(7), 584.

Chang, L. L. (1985). *Who Are The Mathematically Gifted Elementary School Chil– dren*? Roeper Review, 8(2), 76–79.

Craft, A. (2003). *The Limits To Creativity In Education*: Dilemmas For The Educa– tor. British Journal Of Educational Studies, 51(2), 113–127.

Craft, A. (2002). *Creativity In The Early Years: A Lifewide Foundation*. London: Continuum.

Cramond, B. (1994). *Attention–Deficit Hyperactivity Disorder And Creativity— What Is The Connection?* Journal Of Creative Behavior, 28, 193–210.

Creme, P. (2003). *Why Can't We Allow Students To Be More Creative?* Teaching In Higher Education, 8(2), 273–277.

Csikszentmihalyi, M. (1988). *Society, Culture, And Person*: A Systems View Of Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), The Nature Of Creativity: Contemporary Psychological Perspectives (Pp. 325–339). Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications Of A Systems Perspective For The Study Of Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 313– 338). Cambridge University Press.

Davis, G. A. (1997). *Identifying Creative Students And Measuring Creativity*. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), Handbook Of Gifted Education (Pp. 269–281). Boston: Allyn Bacon.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Houghton Mifflin.

Davydov, V. V (1988). *The Concept Of Theoretical Generalization And Problems Of Educational Psychology*. Studies In Soviet Thought, 36, 169–202.

Davydov, V. V. (1990). *Type Of Generalization In Instruction*: Logical And Psychological Problems In The Structuring Of School Curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), Soviet Studies In Mathematics Education, Vol. 2, Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Diezmann, C., & Watters, J. (2003). *The Importance Of Challenging Tasks For Mathematically Gifted Students*. Gifted And Talented International, 17(2), 76–84.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). *On The Aesthetics Of Mathematical Thought. For The Learning Of Mathematics*, 6(1), 2–10.

Einstein, A., & Inheld, L. (1938). *The Evolution Of Physics. New York: Simon And Schuster*.

English, L. D. (In Press). *Problem Posing In The Elementary Curriculum*. In F. Lester, & R. Charles (Eds.), Teaching Mathematics Through Problem Solving. Reston, Virginia: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.)*. Advanced Mathematical Thinking (Pp. 42–53). Kluwer Academic Publishers.

Frensch, P., & Sternberg, R. *(1992). Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms*. Mahwah, Nj: Erlbaum.

Goldberg, A., & Suppes, P. (1972). *A Computer Assisted Instruction Program For Exercises On Finding Axioms*. Educational Studies In Mathematics, 4, 429–449.

Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics*. Arithmetic Teacher, 28(6), 14–17.

Gruber, H. E. (1989). *The Evolving Systems Approach To Creative Work*. In D. B. Wallce & H. E. Gruber, Creative People At Work: Twelve Cognitive Case Studies. Oxford: Oxford University Press.

Gruber, H. E. (1981). *Darwin On Man. Chicago: University Of Chicago Press*.

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). *The Case Study Method And Evolving Systems Approach For Understanding Unique Creative People At Work*. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). *Cambridge University Press*. Hadamard, J. W. (1945). Essay On The Psychology Of Invention In The Mathematical Field. Princeton, Nj: Princeton University Press.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. London.

Heid, M. K. (1983). *Characteristics And Special Needs Of The Gifted Student In Mathematics*. The Mathematics Teacher, 76, 221–226.

Hershkowitz, R. (1989). *Visualization In Geometry–Two Sides Of The Coin*. Focus On Learning Problems In Mathematics, 11, 61–76.

Hewitt, E. (1948). *Rings Of Real–Valued Continuous Functions*. Transactions Of The American Mathematical Society, 64, 45–99.

Hilbert, D. (1900). *Mathematische Probleme*: Vortrag, Gehalten Auf Dem Internationalen Mathematiker–Congress Zu Paris 1900. Gtt. Nachr. 253–297.

Jackson, L. (2002). *Freaks, Geeks And Asperger Syndrome*: A User Guide To Adolescence. London: Jessica Kingsley.

James, I. (2003). *Austism In Mathematicians*. The Mathematical Intelligencer, 25(4), 62–65.

Kajander, A. (1990) *Measuring Mathematical Aptitude In Exploratory Computer Environments*. Roeper Review, 12(4), 254–256.

Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Of A Problem Solving Strategy By Young Children*. Journal For The Education Of The Gifted,13, 115–140.

Kerr, B. A. (1997). *Developing Talents In Girls And Young Women*. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Of Gifted Education (2Nd Ed., Pp. 483–497)*. Boston: Allyn & Bacon.

Kieren, T., & Pirie, S. *(1991). Recursion And The Mathematical Experience*. In L. P.Steffe (Ed.) Epistemological Foundations Of Mathematical Experience (Pp. 78–102). New York: Springer–Verlag.

Kiesswetter, K. (1985). *Die Frderung Von Mathematisch Besonders Begabten Und Interessierten Schülern–Ein Bislang Vernachl Ssigtes Sonderp Dogogisches*

Problem. Der Mathematische Und Naturwissenschaftliche Unterricht, 38, 300–306.

Kiesswetter, K. (1992). *Mathematische Begabung*. Ber Die Komplexitt Derphnomene Und Die Unzulنnglichkeiten Von Punktbewertungen. Mathematik– Unterricht, 38, 5–18.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children*. (J. Teller, Trans. & J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.

Kuhn, T. S. *(1962). The Structure Of Scientific Revolutions. Chicago*: University Of Chicago Press.

Lesh, R., Kaput, J., & Hamilton, E. (Eds.) (2006, In Press), Foundations For The Future: The Need For New Mathematical Understandings & Abilities In The 21St Century. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005A). *John Dewey Revisited– Pragmatism And The Models– Modeling Perspective On Mathematical Learning*. In A. Beckmann, C. Michelsen & B. Sriraman (Eds). Proceedings Of The 1St International Symposium On Mathematics And Its Connections To The Arts And Sciences. (Pp. 32–51). May 18–21, 2005, University Of Schwaebisch Gmuend: Germany.Franzbecker Verlag,

Lesh, R., & Sriraman, B. *(2005B)*. Mathematics Education As A Design Science. International Reviews On Mathematical Education (Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik), 37(6), 490–505.

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). *From Problem Solving To Modeling*: The Evolution Of Thinking About Research On Complex Mathematical Activity. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.) Beyond Constructivism: Models And Modeling Perspectives On Mathematics Problem Solving, Learning And Teaching (Pp. 501–518). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Marshak, D. (2003). *No Child Left Behind*: A Foolish Race Into The Past. Phi Delta Kappan, 85(3) 229–231.

Massé, L., & Gagné, F. (2002). *Gifts And Talents As Sources Of Envy In High School Settings*. Gifted Child Quarterly. 46(1), 15–29.

Minsky, M. (1985). *The Society Of Mind*. New York: Simon & Schuster Inc. National Council Of Teachers Of Mathematics (1989). Curriculum And Standards For School Mathematics, Reston, Va: Author.

Nickerson, R. S. (2000). *Enhancing Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 392–430). *Cambridge University Press*.

Plucker, J., & Beghetto, R. A. (2004). *Why Creativity Is Domain General*, Why It Looksdomain Specific, And Why The Distinction Does Not Matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), Creativity: From Potential To Realization (Pp. 153–168). Washington Dc: American Psychological Association.

Policastro, E., & Gardner, H. (2000). *From Case Studies To Robust Generalizations*: An Approach To The Study Of Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 213–225). Cambridge University Press.

Poincaré, H. (1948). *Science And Method*. New York: Dover.

Polya, G. (1945). *How To Solve It. Princeton*, Nj: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics And Plausible Reasoning*: Induction And Analogy In Mathematics (Vol. Ii). Princeton University Press.

Presmeg, N. C. (1986). *Visualization And Mathematical Giftedness*. Educational Studies In Mathematics, 17, 297–311.

Renzulli, J. S. (1978). *What Makes Giftedness*? Reexamining A Definition. Phi Delta Kappan, 60, 180–184, 261.

Renzulli, J. S. (1986). The Three–Ring Conception Of Giftedness: A Developmental Model For Creative Productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.),Conceptions Of Giftedness (Pp. 332–357). New York: Cambridge University Press.

Ripple, R. E. (1989). *Ordinary Creativity*, Contemporary Educational Psychology, 14, 189–202.

Root–Bernstein, R. S. (1989). *Discovering. Cambridge, Ma*: Harvard University Press.

Root–Bernstein, R. S. (1996). *The Sciences And Arts Share A Common Creative Aesthetic*. In A. I. Tauber (Ed.), The Elusive Synthesis: Aesthetics And Science (Pp. 49–82). Netherlands: Kluwer.

Root–Bernstein, R. S. (2000). *Art Advances Science*. Nature, 407, 134.

Root–Bernstein, R. S. (2001). *Music, Science*, And Creativity. Leonardo, 34, 63–68.

Root–Bernstein, R. S. (2003). *The Art Of Innovation* : Polymaths And The Universality Of The Creative Process. In L. Shavanina (Ed.), *International Handbook Of Innovation* , (Pp. 267–278), Amsterdam: Elsevier.

Rowe, D., & Gray, J. (2000). *The Hilbert Challenge* . Oxford University Press.

Schoenfeld, A. (1985).Mathematical Problem Solving. Lawrence Erlbaum & Associates Schoenfeld, A. H. (1993). *Learning To Think Mathematically*: Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics. In D. Grouws (Ed.) Handbookof Research On Mathematics Teaching And Learning (Pp. 334–370). New York: Mc– Millan.

Shapiro, S. I. (1965). *A Study Of Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical Information* . Voprosy Psikhologii, No. 2.

Shaw, M. P. (1994). *Affective Components Of Scientific Creativity* . In M. P. Shaw & M. A. Runco (Eds.), Creativity And Affect (Pp. 3–43), Norwood, Nj: Ablex.

Sheffield, L. J., Bennett, J., Berriozabal, M., Dearmond, M., & Wertheimer, R. (1995). Report Of The Task Force On The Mathematically Promising. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Silver, E. A. (Ed.) (1985). *Teaching And Learning Mathematical Problem Solving*: Multiple Research Perspectives. Hillsdale, Nj: Erlbaum.

Smith, J. M. (1966). *Setting Conditions For Creative Teaching In The Elementary School* . Boston: Allyn And Bacon.

Sowell, T. (2001). *The Einstein Syndrome* . New York: Basic Books.

Sriraman, B. (In Press). Implications Of Research On Mathematics Gifted Education For The Secondary Curriculum. To Appear In C. Callahan & J. Plucker (Editors) What The Research Says: Encyclopedia On Research In Gifted Education. Prufrock Press.

Sriraman, B. (2002). How Do Mathematically Gifted Students Abstract And Generalize Mathematical Concepts. Nagc 2002 Research Briefs, 16, 83–87.

Sriraman, B. (2003). *Mathematical Giftedness* , Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. The Journal Of Secondary Gifted Education. 14(3), 151–165. Sriraman, B. (2004A). Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations. The Journal Of Mathematical Behavior, 23(2), 205–222.

Sriraman, B. (2004B). *Discovering A Mathematical Principle*: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.

Sriraman, B. (2004C). *The Characteristics Of Mathematical Creativity*. The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.

Sriraman, B. (2004D). *Gifted Ninth Graders' Notions Of Proof*. Investigating Parallels In Approaches Of Mathematically Gifted Students And Professional Mathematicians. Journal For The Education Of The Gifted, 27(4), 267–292.

Sriraman, B. (2005). Philosophy As A Bridge Between Mathematics Arts And The Sciences. In A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman Et Al (Eds.), Proceedings Of The 1St International Symposium On Mathematics And Its Connections To The Arts And Sciences (Pp. 7–31). May 18–21, 2005, University Of Schwaebisch Gmuend, Germany: Franzbecker Verlag.

Sriraman, B., & English, L. (2004). *Combinatorial Mathematics*: Research Into Practice. The Mathematics Teacher, 98(3), 182–191

Sriraman, B., & Strzelecki, P. (2004). *Playing With Powers*. The International Journal For Technology In Mathematics Education, 11(1), 29–34.

Steen, L. A. (2001). *Revolution By Stealth*. In D. A. Holton (Ed). The Teaching And Learning Of Mathematics At University Level (Pp. 303–312). Kluwer Academic Publishers: Dodrecht.

Steen, L. A. (2005). *Math & Bio 2010: Linking Undergraduate Disciplines*. Mathematical Association Of America.

Sternberg, R. J. (1997). A Triarchic View Of Giftedness: Theory And Practice. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Of Gifted Education (Pp. 43–53)*. Boston: Allyn Bacon.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing In Creativity. American Psychologist, 51, 677–688.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). *The Concept Of Creativity*: Prospects And Paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.)., Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). Cambridge University Press.

Suppes, P., & Binford, F. (1965). *Experimental Teaching Of Mathematical Logic In The Elementary School*. The Arithmetic Teacher, 12, 187–195.

Torrance, E. P. (1981). *Non–Test Ways Of Identifying The Creatively Gifted*. In J. C. Gowan, J. Khatena, & E. P. Torrance (Eds.), Creativity: Its Educational Implications (2Nd Ed., Pp. 165–170). Dubuque, Ia: Kendall/Hunt.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests Of Creative Thinking*: Norms–Technical Manual. Lexington, Ma: Ginn.

Usiskin, Z. (2000). The Development Into The Mathematically Talented. Journal Of Secondary Gifted Education, 11(3), 152–162.

Vitale, B. (1989). *Elusive Recursion*: A Trip In A Recursive Land. New Ideas In Psychology, 7(3), 253–276.

Vygotsky, L. (1962). *Thought And Language. Cambridge*, Ma: Mit Press.

Vygotsky, L. (1978). Mind In Society: The Development Of Higher Psychological Processes. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Wallas, G. (1926). *The Art Of Thought*. New York: Harcourt Brace.

Wason, P. C., & Johnson–Laird, P. N. (1972). *Psychology Of Reasoning. Cambridge, Ma: Harvard University Press*.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.

Weisberg, R.W. (1993). *Creativity*: Beyond The Myth Of Genius. New York: Freeman.

Yakimanskaya, I. S. (1970). *Individual Differences In Solving Geometry Problems On Proof*. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.). Soviet Studies In The Psychology Of Learning And Teaching Mathematics (Vol. 4), Stanford: School Mathematics Study Group.

Ypma, E.G. (1968). *Predictions Of The Industrial Creativity Of Research Scientists From Biographical Information*. Dissertation Abstracts International, 30, 5731B– 5732B.

ملاحظات

1. تضع هذه العلامات الطلاب ضمن مجموعة المئين 99–95 تقريباً.
2. جون تشارلز فيلدز (John Charles Fields, 1863–1932) هو الذي أسس جوائز ميداليات فيلدز التي تعادل جائزة نوبل لحقل الرياضيات. توزّع هذه

الميداليـات سـنويّاً بين علماء الرياضـيات دون سـن الأربعين عاماً فـي المؤتمر الدولي للرياضيات.

3. وجـد بهـر وكـوري (Behr And Khoury, 1986) أن سـلوك الاسـتدلال لطلاب المدارس الصـغار كان مماثلاً لما وجده واسـون وجونسون-ليرد (Wason And Johnson–Laird, 1972).

4. تنص فرضـية ريمان (Riemann Hypothesis) على أن دالة أصفار ريمان زيتا (The Zeros Of Riemann's Zeta Function) تكوّن جميعها جزءاً حقيقيّاً من نصـف واحد. وكان هذا تخميناً من ريمـان في العام 1859، ومنذ ذلك الحين، لم يثبت أحد هذا التخمين أو يثبت بطلانه. وربما تكون هذه المسـألة حاليّاً من أكثر المسائل في الرياضيات التي لم يتسنّ للعلماء حلها منذ زمن بعيد.

5. مـن السـهل أن يفهـم الطلاب الجامعيـون تخميـن بيبربـاخ (Bieberbach) مع بعض التعرض للتحليل المعقد بسـبب الطبيعة الأولية للعبارة. تحول الدالة وحيدة التكافـؤ f نقطـة فـي قرص الوحدة إلـى النقطـة الممثلة بالعـدد المركب $f(z)$ المعروض بسلاسل لانهائية $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\ldots$، حيث المعاملات $a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots$ أعـداد مركبـة ثابتة تحدد f. وفي العـام 1916، خمّن بيرباخ أنه بصرف النظر عن أي f نأخذها، فإن: $|a_n| \leq n$، وقد أثبت لويس برانجيز هذا في العام 1985.



هل يحتاج تعليم الموهوبين في الرياضيات إلى فلسفة عمل في الإبداع؟

فكتور فريمان

بهارات سريرامان

ملخص

نقدم في هذا البحث وجهات النظر والمناحي الراهنة في الإبداع، مع التركيز على ارتباطها بالرياضيات. ونناقش وجهات النظر التربوية والاجتماعية في الإبداع بوجه عام، وفي الإبداع في الرياضيات بوجه خاص. وفي الوقت الذي أصبحت فيه اللامبالاة المؤسسية والمجتمعية المتعلقة بحاجات النابغين في الرياضيات ظاهرة معروفة، أظهرت دراسات حديثة وجود اهتمام قليل بتطوير الإبداع ورعايته لدى النابغين في الرياضيات. وسنناقش الحاجة إلى مثل هذه الرعاية من وجهة نظر كلٍّ من علماء الرياضيات والنفس والتربية. وسنختم نقاشنا بتوصيات لنوع البيئة التعلمية التعليمية الضرورية للطلاب النابغين في الرياضيات لتحفيز إبداعهم ورعايته، وإفادة الطلاب الآخرين ضمن هذا النسق.

مقدمة

تعدُّ بنى الموهبة والإبداع في الرياضيات مترابطة فيما بينها، حيث إن الإبداع يعني ضمناً الموهبة (Sriraman, 2005). وعلى الرغم من ذلك، فإن دراسة الإبداع لدى علماء الرياضيات أو الطلاب، تعدُّ بالغة الصعوبة بسبب إخفاق غالبية الأدوات التقليدية في الكشف عن السمات المعرفية الإضافية كالمعتقدات، والجمال، والحدس، والقيم الفكرية،

والمعايير الموضوعية الذاتية، والعفوية، ومعايير المثابرة، والمصادفة، التي تسهم كثيراً في المساعي الإبداعية وتؤدي إلى أعمال ونتاجات مذهلة (Shavinina & Ferrari, 2004).

عرض موجز للكتابات

تصنيف ستيرنبيرج لمناحي دراسة الإبداع

يذكر كتاب الإبداع The Handbook of Creativity (Sternberg, 2000)، الذي يحتوي على مراجعة شاملة للبحوث كافة المتوافرة في حقل الإبداع، بأنه يمكن تصنيف معظم المناحي المستخدمة في دراسة الإبداع ضمن ست فئات، هي: الروحية (Mystical)، والواقعية (Pragmatic)، والنفسية الدينامية Sychodynamic)، والقياس النفسي Psychometric، والمعرفية (Cognitive)، الاجتماعية-الشخصية (Social-Personality). وقد استعرضنا كل منحى من هذه المناحي في الفصل الأول من هذه الدراسة المتخصصة، إضافة إلى مجموع وجهات النظر المتعلقة بالإبداع، (انظر الفصل الأول) (Sriraman, 2008).

وجهة نظر في الإبداع عبّر عنها المجتمع ومؤسساته الاجتماعية

لم تأخذ الدراسات الملخصة في الفصل الأول في الحسبان على نحوٍ كامل وجهات نظر الاختلافات عبر الثقافية، بخصوص ما يكوّن الإبداع في الرياضيات. تؤدي الجوانب الثقافية والاجتماعية دوراً مهمّاً فيما يعدّه المجتمع بوجه عام، ونظام المدرسة بوجه خاص، إبداعاً، وكيف يتعاملون معه، إذ تشير دراسات كثيرة (Crammond, 1994; Davis, 1997; Smith, 1966; Torrance, 1981) إلى أن السمات السلوكية للأفراد المبدعين غالباً ما تسير عكس السلوك المقبول في الأوضاع المدرسية المؤسسية. مثلاً، عادة ما يترتب على السمات السلوكية السلبية، مثل اللامبالاة بقوانين الصف، وإظهار الضجر والسخرية، أو النشاط المفرط، إجراءات تأديبية بدلاً من التدخلات الوجدانية الملائمة. أما الطلاب النابغون الذين يذعنون للمعايير، فإنهم غالباً ما يعمدون إلى إخفاء قدراتهم الذهنية لأسباب اجتماعية، ويصنفون موهبتهم الأكاديمية بصفتها مصدر حسد (Masse & Gagne,

2002). وفـي الحقيقة أن التاريخ يزخـر بكثير من الأمثلة لأفراد مبدعين وصفوا بأنهم غير طبيعيين «منحرفون أو متمـردون» (Deviants) باستخدام مصطلحات هذه الأيام. وغالباً ما يُبرّر كبت الإبداع في مستويات الروضة-الصف 12 على نحوٍ جماعي حرصاً على مصلحة الأكثرية من الطلاب، أو تطبيـق مصطلح «الإنصاف» (Equity) الذي يساء استخدامه، أو الاحتكام إلى خطط المنهاج وأهداف التحصيل المدرسي. ومثال ذلك، أن إقرار قانون «عدم إهمـال أي طفل» (No Child Left Behind) في الولايـات المتحدة الأمريكية تحت ذريعة الإنصاف والمساواة، دفع بالحوار حول ما يجب فعله بخصوص الطلاب النابغين والمبدعين فـي غرفة الصـف، إلى الصـدارة. وفي هذا السيـاق، كتب مارشـاك (Marshak, 2003) يقـول: في الآونة الأخيرة، تعدُّ دعوة قانـون «عدم إهمال أي طفل إلى المساءلة، استناداً إلى الاختبارات الموحدة للمهارات التقليدية المتمثلة في القراءة والكتابة والحساب التي يقدّرها المجتمع الصناعي، خطوة كبيرة إلى الوراء تعود بنا إلى أربعينيات القرن الماضي. واستناداً إلـى التقارير الأخيرة التي نشرتها دائرة العمل في الولايات المتحدة، أردف مارشاك قائلاً، إضافة إلى مهارات القراءة والكتابة والحساب التقليدية، فهناك كثير من المهارات مثل، حل المشـكلات والتفكيـر الإبداعي التي تعدُّ ضرورية للنجاح فـي الوضع الاجتماعي العالمي في القـرن الحادي والعشرين. وعلى مستـوى التعليم العالي، فقد كان هناك انتقاد للعدد الكبير مـن القيود التي يفرضها الأكاديميون على المساقات الدراسية (Crème, 2003, P. 273). وخلاصة القول، أن نسبة كبيرة من الأدب التربوي والدراسات تشير إلى أن الإبداع يُعدُّ سلعة إضافية لا تحظى بالتشجيع عادة، وإنما يرعاها بعض المعلمين. وعلى الرغم من ذلك، فقد تكون وجهة النظر هذه مرتبطة بالثقافة والمكان.

ولا يقتصر هذا الوضع على الولايات المتحدة وحدها، بل تعانيه دول كثيرة أخرى. وقد أفاد باحثون أستراليون عن وضع مشابه في التربية والتعليم بوجه عام، وفي تعليم الموهوبين فـي الرياضيـات بوجه خاص. حيث ذكـر ديزمـان وووتـرز (Diezmann And Waters, 2000) في معرض تحليلهما للوضع الراهن، أنه على الرغم من جميع الخطابات عن الحاجة إلـى وطـن يتمتع أهله بالذكاء، وتـزداد فيه قيمة دور الأفراد المبدعيـن، فإن الوضع لا يبدو أفضـل ممـا كان عليه قبـل مئة عام، عندما ذكـر أن الوطن يبدو «جنة للقـدرات المتوسطة

ومقبـرة للعبقريـة». وفي الحقيقة أن الباحثيـن يشير أن إلى تقرير البرلمـان الأسترالي عن تعليـم الأطفـال النابغين الذي يعترف أن التركيـز على المعايير الدنيا قـد يترتب عليه آثار مدمرة في تلبية الحاجات الخاصة بالنابغين المتأثرين أصلاً بـ «تدني التحصيل، والإحباط، والضغـط النفسي، والآراء السلبية، والمعتقـدات الخاطئة». ويُعدُّ هذا الوضع مؤلماً لا سيما فـي حالـة الرياضيات، حيث يتأثـر الأطفال النابغون بـالآراء السلبية للآخريـن فيما يتعلق بالرياضيـات بطرائـق عدة. وعمومـاً فإن هذا الاتجـاه يصنف الأطفـال النابغين بصفتهم «مجموعة موسومة» (Marked Group) أو مجموعة غير طبيعية «منحرفة» (Deviant).

وصلت الآراء السلبية للمجتمع تجاه النابغين إلى أقصـى حدودها بالتسمية الساخرة لهـؤلاء الأطفـال ب آينشتايـن الصغيـر (Little Einstein) أو المهووسيـن (Nerds). وبانتشار مثل هذا الجو العام المناهض للتفكير، الذي يبدو غير محبب للطلاب النابغين في الرياضيـات، فإن الأطفال يصبحون في حاجة ماسة إلى المرونة والدعم الخاص. واستناداً إلـى هذه الخلفيـة للوضع القائم في النظم المدرسية، التي تبـدو متوافقة مع الشعور العام، يتسـاءل المـرء عما يمكن فعله للأطفـال النابغيـن لمساعدتهم كي يصبحوا أكثـر إبداعاً. وسنعرض فـي الجـزء الآتي ثلاث وجهات نظـر خاصة مـن النواحي: النفسيـة والرياضية والتربوية.

الحاجة إلى رعاية الإبداع لدى الموهوبين في الرياضيات ودعمه

وجهات نظر علماء النفس للقدرات الرياضية ذات الصلة بالإبداع

قال كروتتسكي في معرض دراسته الطولية حول القدرة الرياضية أن النشاط الرياضي الناجح يتطلب مزيجاً خاصّاً من السمات الشخصية. وأضاف أن امتلاك القدرات الرياضية العالية لا يتيح بالضرورة للأفراد النابغين الوصول إلى أعلى قمة في الرياضيات. وقد استندت نتائجـه إلى دراسة أجراها علـى مجموعة من الطلاب الموهوبين جدّاً مـن أعمار متفاوتة، وسيـر ذاتيـة لعلماء رياضيات مشهوريـن، ودراسات بحثية، إضافة إلـى استبانة وزعت بين معلمين ممارسين وعلماء رياضيات مختصين. وتعالج الدراسة المقدمة من كارب (Karp) عمل كروتتسكي من وجهة نظر معاصرة ذات صلة بإعداد المعلمين.

أولاً، يشير كروتتسكي في البداية إلى عمل مياسيشيف (Myasishev) الذي قال إنه لا يمكن للمرء أن يصبح عالم رياضيات مبدعاً ما لم يستمتع بالعمل الرياضي، إذ إن متعة الرياضيات تدفع المرء نحو البحث، وتحرك فيه عادات العمل الجاد الدؤوب. ثانياً، تؤدي شخصية المعلم دوراً مهمّاً. وأحياناً، قد لا يظهر الطالب ذو المقدرة العالية جدّاً أي اهتمام يُذكر بالموضوع، أو النتائج العالية. أما إذا أفلح المعلم في اكتشاف موهبته الخفية، وعزّز الاهتمام لديه، فعندئذٍ يصبح هذا الطالب ناجحاً جدّاً كما ظهر في السير الذاتية لكل من لوباتشيفسكيا وأوستروغرادسكي ولوزين (Lobatchevskii; Ostrogradskii; Luzin) وآخرين.

ويتعلق العامل الآخر الذي اكتشفه كروتتسكي بالطبيعة الانفعالية للنشاط الرياضي، حيث يرى أن جميع الطلاب النابغين في دراستهم قد أظهروا مستويات عالية جدّاً من الانفعالات عندما أفلحوا في التوصل إلى حل لمسألة صعبة، أو توصلوا إلى اكتشاف رياضي. وأكد أيضاً أهمية القيم الجمالية للعمل الرياضي. وبعد أن اقتبس من ريفيش (Revesh) قوله: «يبتكر عالم الرياضيات لأن جمال التركيب العقلي يجلب له الفرح»، أشار كروتتسكي إلى أن الحل الجيد يجعل الطلاب سعداء، تماماً كما لو أنهم يمارسون لعبة شطرنج رائعة، فيغمرهم الفرح، وتشع أعينهم نوراً، ويفركون أيديهم، ويدعون بعضهم بعضاً إلى المشاركة في الحلول الرائعة.

وعدّ كروتتسكي العمل الجاد سمة أخرى مهمة للإبداع في الرياضيات. وقد أشار في اقتباسه من لافرنتجيف (Lavrentijiv) إلى أن الشرط الأساسي للإبداع في الرياضيات يتمثل في القدرة على العمل الجاد الدؤوب على امتداد مدة طويلة من الوقت. وقدّر أن هذه المدة غالباً ما تستغرق شهوراً وسنوات وربما عقوداً حتى يتوصل عالم الرياضيات إلى مبتغاه في حل المسألة الرياضية، محاولاً إيجاد الحل الأفضل من بين ألف حل آخر. وقد لوحظت هذه السمات أيضاً لدى الطلاب النابغين ضمن مجموعة كروتتسكي التجريبية.

وذكر كروتتسكي ثلاثة عوامل أخرى لإتمام قائمة السمات الشخصية لعلماء الرياضيات النابغين والمبدعين: (1) يتعين على عالم الرياضيات حتى يكون مبدعاً، أن يكون مبتكراً

وأن يمتلك الشجاعة ليس في ابتكار شيء جديد فحسب، بل في تحطيم المعرفة القديمة الراسخة. (2) في الوقت ذاته، يجب أن يكون عالم الرياضيات ناقداً لعمله، وينبغي له أن يكون حذراً بخصوص الطلاب النابغين من حيث عدم المبالغة في تقدير عملهم وجهودهم، و(3) عدم التركيز على الرياضيات وحدها، بل لا بد من تطوير شخصة كاملة أكثر انسجاماً كي يكون مبدعاً.

وجهة نظر علماء الرياضيات في دور الإبداع في الاكتشافات الرياضية

أجرى ميلر (Miller,1997) تحليلاً لمفهوم الحدس الحسّي (Sensible Intuition) الذي طرحه بوانكريه (Poincaré)، بصفته عملية تحركها القدرة نحو إدراك الحجة بمجملها بلمحة خاطفة تسنح باختيار مزيج ملائم من الحقائق الرياضية وتجميعها. يحدث هذا باستخدام قوانين اللاوعي (Unconscious) في الجماليات والحدس، متجاوزة المنطق البحت، للتوصل إلى معقولية خطوات البرهان الرياضي دون الوصول إلى الصور المرئية. يساعد «الحس الجمالي الخاص»، من منظور بوانكريه، علماء الرياضيات على استخلاص مجموعات قليلة «جميلة» و«متناغمة» تجعل الحدس أحد مكونات الإبداع. وبالنظر إلى مكوّن الإبداع هذا، يعمد علماء الرياضيات إلى تناول ابتكاراتهم ببناء شبكة من الأفكار، ويربطون بين عناصر من مجالات واسعة منفصلة، حيث تقود هذه العملية اللاشعورية الخفية الدقيقة، التي يجب أن «يُشعر بها بدلاً من صياغتها»، إلى مزيج غير متوقع من الحقائق الرياضية والابتكارات العلمية.

ولكن، ما الشروط التي يجب أخذها في الحسبان لمساعدة الطلاب النابغين على أن يصبحوا أكثر إبداعاً؟ يستطيع المرء في البداية التعلم من تأملات علماء الرياضيات المشهورين من خلال مشاركتهم لحظة الاكتشاف. وقد حلّل جنيدنكو (Gnedenko,1991) حالات مختلفة كان يقوم فيها باكتشافات خاصة به: أحدها، عندما فرض على نفسه مهمة جديدة ذات صلة بمتسلسلة تايلور (Taylor Series) وتوصل إلى الحل بطرائق مختلفة. ومثال آخر ذو صلة بعمل عالم الرياضيات الروسي نيكولاي لوسين (Nikolai Lusin) المتعلق بالمتسلسلات المثلثاتية (Trigonometric Series). كان جنيدنكو يقرأ مقالاً

كتبه عالم رياضيات آخر، وتمكن من التوصل إلى حل أغفله المؤلف. أما المثال الثالث، فهو متصل بخبرته التعلمية من الحلقات الدراسية التي كان يعقدها عالم الرياضيات الإنجليزي نيغيل هينشن (Nigel James Hitchin)، لمناقشة موضوعات خاصة ذات صلة باهتماماته البحثية، عندما نجح هينشن باجتذاب طلابه بمسائل جديدة مفتوحة. وأدرج جنيدنكو قائمة تشتمل على شروط عدة لتقوية الإبداع في الرياضيات لدى الطلاب. وهذه الشروط هي: (أ) إيجاد جو بحثي خاص بصفته مصدراً من مصادر التأمل الفكري، (ب) أن تكون جزءاً من فريق يتناول حل مسألة معقدة وجديدة فعلاً، (ج) وجود معلمين يتحلّون بالصبر والتوجيه الودّي، مع قليل من الإيماءات والنصائح دون إعطاء الطلاب الحلول. وأخيراً، يُعدُّ الدافع الداخلي على درجة عالية من الأهمية، حيث يساعد على تحريك القوى الداخلية، والنشاط العقلي الجاد على امتداد مدة طويلة من الوقت (القدرة على الانتباه والتركيز). وإن رؤية العمل الجاد وهو يتكرر كثيراً، على الرغم من الإخفاق في بعض الأحيان في الحصول على النتائج، تعدُّ شرطاً ضروريّاً للعمل الرياضي الإبداعي. وقد أشار جنيدنكو إلى أن حل المسألة قد يأتي كلمح البصر، بحيث يبدو كأنه نتاج رؤية داخلية بسيطة لم تتطلب بذل جهود مضنية.

قدّم جنيدنكو أمثلة على مثل هذا التبصر أو اللمحات الخاطفة التي حدثت في مسيرة حياته في مواقف مختلفة ليست ذات صلة بأي نشاط رياضي، في أثناء التدريس أو التسوق أو السفر أو حتى في أثناء الليل. ومن تلك الأمثلة، الاكتشاف المدهش الآتي: بعد مضي ثلاثة أيام من البحث غير المجدي عن حلٍّ لمسألةٍ ما، أخبر هينشن معلمه بشكوكه بخصوص صحة التخمين. وعندما عاد إلى البيت، كان منهكاً فاقداً لشهية الطعام أو الحديث مع الناس، حيث استحوذت المسألة على تفكيره كله. وبينما كان يفكر في المسألة، غط في نوم عميق، وعندما استيقظ من نومه، كان البرهان حاضراً في عقله وبدأ بكتابته. وفي معرض تحليله لسبب هذه المفاجأة، قال: على الرغم من أنه كان نائماً، فإن دماغه واصل العمل على مستوى اللاشعور. ولكن هذا العمل يحتاج إلى عملية إعداد مسبقة، وإن كانت تبدو غير مجدية.

وقد رأى جنيدنكو في هذا الاكتشاف المفاجئ تطابقاً بين الإبداع في الرياضيات والشعر: حيث يحاول علماء الرياضيات والشعراء أن يلحقوا «بطائر محلق» غير مرئي يصعب الوصول إليه، وغالباً ما يصلان إليه فجأة، ولكن بعد أن يسبق ذلك تفكير وبحث طويلان في معظم الأحيان. ويذكر أخيراً، أنه يجب ربط العمل الرياضي الإبداعي باكتشاف شيء يتصف بالجدة. واقتبس قول الشاعر الروسي فلاديمير ماياكوفسكي (Vladimir Mayakovskii) الذي قال: «إن الشخص الذي اكتشف أول مرة أن اثنين زائد اثنين يساوي أربعة من خلال وضع عودي ثقاب إلى جانب عودي ثقاب آخرين، هو عالم رياضيات عظيم».

وجهة نظر علماء التربية في تطوير الإبداع لدى الطلاب الموهوبين

يعتقد جنيدنكو أن الموهبة الرياضية ليست بالأمر النادر لدى البشر كما يعتقد بعض الناس. لكن هذه السمة الشخصية للإبداع يمكن أن تظهر بطرق مختلفة لدى الأشخاص المختلفين. فقد يكون اهتمام أحد الأشخاص بالتعميم، وإجراء المزيد من الفحص المعمق للنتائج التي تُوصّل إليها، فيما يظهر شخص آخر القدرة على التوصل إلى أشياء جديدة للدراسة، ويبحث عن طرائق جديدة بهدف اكتشاف خصائصها المجهولة، في حين يمكن أن يركز نوع ثالث من البشر على التطور المنطقي للنظريات، مظهراً معرفة ودراية غير عادية بالمغالطات والعيوب المنطقية. وقد تنجذب فئة رابعة من النابغين للروابط الخفية بين فروع الرياضيات التي تبدو غير مترابطة. وفي الوقت الذي تدرس فيه الفئة الخامسة العمليات التاريخية المتصلة بنمو المعرفة الرياضية، تركز الفئة السادسة على دراسة الجوانب الفلسفية للرياضيات. أما الفئة السابعة فتتجه للبحث عن حلول عبقرية للمسائل العملية كما تبحث عن تطبيقات جديدة للرياضيات. وأخيراً، قد يكون أحد الأشخاص مبدعاً جدّاً في ترويج العلوم ونشرها، وفي التعليم.

وهكذا، نرى أن جنيدنكو يربط النبوغ مباشرة بالإبداع، وهو يقر بأن كل شخص يمتلك درجة معيّنة من الإبداع، لكن النظم التربوية والخلفيات (المدرسة، الأسرة إلخ) قد تقف عائقاً أمام الأشخاص النابغين، ولا سيما إذا كان النظام المحيط يرفض الحداثة، ويحبط جهود النظر إلى جوانب جديدة للمسألة، أو تجاوز الحقائق المعروفة. ويمكن لمنحى

التعليم أيضاً أن يقود إلى بعض العوائق أمام تعزيز النبوغ الرياضي إذا ما أغفل المعلم منح مزيد من الانتباه للطلاب النابغين الذين قد يفقدون اهتمامهم في المضي قدماً نحو تعلم الرياضيات.

يقدم تاريخ الرياضيات في الاتحاد السوفييتي مثالاً مدهشاً على التعايش بين منحيين مختلفين في تعليم الرياضيات، أحدهما يُعدُّ جزءاً لا يتجزأ من وضع نظام التعليم العام المطبق بحسب المخطط المستند إلى المفاهيم الأوروبية في أواخر القرن التاسع عشر، في حين يركز الآخر تركيزاً رئيساً على الأطفال النابغين، وهو المنحى الذي ازدهر منذ مطلع الخمسينيات من القرن الماضي. وقد أخذ المنحى الأخير صورة شبكة من الأنشطة المعقدة تشتمل، مثلاً لا الحصر، على نوادي الرياضيات للأطفال المتقدمين (Russian Kruzhki)، (кружки) ثم «الدوائر» أو «الحلقات» التي تتبع عادة المدارس والجامعات، لكن بعضها يجري في البيوت، ومسابقات (أولمبياد) الرياضيات الجماعية (Mat-Boi, التي تعني حرفيّاً الاقتتال الرياضي)، والمناهج الإضافية الصيفية أو الشتوية للأطفال النابغين، ونشر المجلات حول الفيزياء والرياضيات للأطفال، ومن أشهرها مجلة (Freiman & Volkov, 2004). ومما تجدر الإشارة إليه أن جميع تلك الأنشطة كانت مجاناً للمشاركين كافة، وكانت مبنية فقط على حماس معلمي الرياضيات أو أساتذة الجامعات.

أدّت هذه العملية إلى إيجاد نظام لتكوين ما يسمى ب النخبة الرياضية (Mathematical Elite) في الاتحاد السوفييتي السابق، ركز أولاً وقبل كل شيء على الأطفال النابغين، وكان على تباين حاد مع مدارس «المساواة» (Egalitarian) الحكومية النظامية التي تستهدف الطلاب العاديين، ومن ثم تهمل حاجات جميع الطلاب فوق المستوى العادي. لم يكن مثل هذا الوضع جديداً في نظام التربية والتعليم في الاتحاد السوفييتي سابقاً، بل كان متجذراً في نظام المدارس النظامية في روسيا القيصرية التي لم تكن تولي اهتماماً كبيراً بالأطفال الموهوبين. وتمكّن عدد قليل جدّاً من الأطفال النابغين فقط، من أمثال الشاب أندريه كولموجوروف (Andrey Nikolaevich Kolmogrov)، من الإفادة من البيئة التعليمية اللاصفية الفريدة التي سمحت لهم بالاستمتاع بجمال المكتشفات الرياضية، حيث التحق

بمدرسة خاصة نظمتها جدته في البيت لمجموعة صغيرة من الطلاب من أعمار مختلفة، استخدم فيها المعلم أحدث الابتكارات التربوية. وقد اعترف كولموجروف (1988) أنه كان سعيداً وهو في عمر 5 أو 6 سنوات باكتشافه انتظام مجموع الأعداد الفردية: $1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 3^2$ إلخ. وقد نُشر تقرير كولموجروف المتعلق ب «بالاكتشاف الرياضي» هذا في مجلة المدرسة.

والحدث المهم في قصة كولموجوروف، يتعلق بدراسته الإضافية في مدرسة ثانوية وفق النظام الأوروبي أعدتها له جمعية المثقفين دعاة التغيير (الراديكاليين)، حيث منحت المدرسة المختلطة (للذكور والإناث) الطلاب فرصة الدراسة بحسب اهتماتهم ومستوياتهم، (كان بوسع كولموجوروف مثلاً، دراسة فصل في الرياضيات بمستوى صف أعلى). وفي الوقت نفسه، شعر الطلاب بالمسؤولية تجاه الدراسة بجدٍّ أكثر من أجل الحصول على أفضل النتائج في الامتحانات العامة التي تنظمها الدولة. ومن غير المستغرب إذاً، أن تكون مثل هذه المدرسة مختلفة عن مدارس الدولة النظامية، وبذلك، فقد كانت معرّضة للتهديد المستمر من المسؤولين لإغلاقها.

وبعد ثورة عام 1917، أغلقت حكومة الاتحاد السوفييتي الجديدة جميع المدارس الخاصة، وأسست نظاماً مدرسيّاً جديداً كاملاً ذا مناهج جديدة. كان هدف هذا النظام تقديم تعليم أساسي للسكان جميعاً، وفي الوقت ذاته، جعل التعليم أكثر ميلاً إلى الممارسة الموجهة. ونتيجة لتطبيق هذه الأفكار، فقد برنامج الرياضيات جلّ محتواه النظري، حيث درس الطلاب وصفات رياضية تنطبق على أوضاع عملية محددة، وغالباً ما حدث ذلك دون أخذ الأسس النظرية المتصلة بها في الحسبان. وعموماً بقي الأمر غامضاً بخصوص الطلاب النابغين في تلك السنين، ومع ذلك أشارت المصادر إلى أن المعرفة ضحلة لدى الذين تخرجوا في المدارس المعتمدة، وفقاً لمثل هذه المناحي «الابتكارية»، كتلك المسماة بمنظمة مشروع الكتائب (Brigade–Project) (Vogeli, 1968 With Reference To Braids, 1954, P. 38).

وقد أعلنت الحكومة أن هذه الطرائق غير صائبة، بصفة ذلك ردّ فعل على هذا الوضع القائم، وأمرت بإجراء التعديلات الضرورية في المنهاج المدرسي في أوائل الثلاثينيات من القرن الماضي. وهكذا، فقد روجعت كتب الرياضيات المقررة قبل الثورة وأُعيدت صياغتها، ووضع لها معايير رسمية (Vogeli, 1968).

واستناداً إلى تحليلنا، نستطيع القول إن نظام التعليم السوفيتي، من خلال الإبقاء على منحى المساواة في التعليم، بدأ في مرحلة ما (أي في بداية ثلاثينيات القرن الماضي) بإنفاق مزيد من المال وبذل المزيد من الجهود لتحديد الأفراد الواعدين، وتقديم الفرص الضرورية لهم لتطوير مواهبهم (Blazer, 1989).

ومع مكافحة المسؤولين لتلبية حاجات الاقتصاد المتنامي، والحفاظ على جعل الباب مفتوحاً أمام جميع الناس للالتحاق بالمدارس، فقد طرح علماء رياضيات وعلماء آخرون مشهورون، كثيراً من المبادرات. ومن الأمثلة البارزة على هذه المبادرات مسابقة الرياضيات الأولى لطلاب المدارس التي نُظمت في أكبر المدن السوفيتية: لينينغراد وتبليسي وموسكو في العامين 1935-1934. وساعدت هذه المسابقة على إرساء تقاليد ذهبت إلى أبعد من الأهداف الرسمية المعلنة (مثل التعليم عالي الجودة). وعوضاً عن ذلك، وكما يروي المشاركون، فقد أصبحت هذه المبادرات مهرجانات حقيقية للرياضيات، للأجيال جميعاً، وأطفال المدارس، وطلاب الجامعات، ومعلمي المدارس، والأساتذة الشباب في المدارس الثانوية، وكذلك العلماء البارزين.

لم تقتصر مسائل المسابقة على التطبيق المحدد للمعرفة المدرسية، بل تطلبت المقدرة على إيجاد طرائق أصيلة للتفكير، والقدرة على الاستنتاج المنطقي في المواقف غير المعيارية. وعادة ما كان يتبع هذه المسابقة، أو الأولمبياد، كما كانت تسمى، محاضرة لتحليل الأخطاء النمطية، ولقاءات فردية للمشاركين مع أعضاء لجنة التحكيم. ولم يكن الأولمبياد الوسيلة الوحيدة فقط للعمل مع الشباب الموهوبين على نحوٍ غير رسمي، بل كان أيضاً وسيلة لتحفيز طلاب المدارس على تعلّم الرياضيات بطريقة أكثر منهجية عن طريق

المشاركة في الدوائر الرياضية وحضور المحاضرات العامة التي يقدمها علماء رياضيات متميزون، إضافة إلى الدراسة الذاتية لكتب الرياضيات.

وإذا ما نظرنا إلى هذه الظاهرة ضمن السياق الاجتماعي، فيمكن أن نعدّها مهمة شخصية لعلماء الرياضيات للإسهام في تطوير المجتمع؛ بهدف تشجيع الرياضيات وتبسيطها وتعميمها، والتأكيد على قيمة العمل الرياضي الإبداعي، والبحث عن الموهوبين الشباب وتقديم الدعم لهم وإعطائهم أفضل ما لديهم من معرفة. وقد أُسست تجمعات للرياضيات خارج إطار النظام التربوي العادي، وتمثل الهدف الصريح الواضح لها في الحفاظ على المستوى العالي للرياضيات، وتعزيز جاذبية النشاط الرياضي بين السكان، إضافة إلى دعم كل فرد يتمتع بموهبة في الرياضيات.

يؤكد ديزمان وويترز (Diezmann And Watters 2000) وفقاً لفلسفتهما الإثرائية، على الحاجة إلى إيجاد فرص للطلاب النابغين ليصبحوا أفراداً مبدعين. ومن وجهة نظرهما، فإنك تحتاج، كي تصبح مبدعاً، إلى الاستقلال الفكري والخبرة، إضافة إلى ثقافة تدعم الفكر غير التقليدي. وقد أجرى المؤلفان دراسة تتعلق ببرنامج علوم مدرسي إضافي خاص؛ بهدف تحقيق أقصى قدر ممكن من النمو الإبداعي لدى الطلاب النابغين، والبناء على تطور الاستقلال والخبرات المستندة إلى المجال في السياق الاجتماعي المتصل بالفهم والدعم. وقد مكّن الاستقلال الأفراد من التعامل مع الجدة وتوليد نتاجات إبداعية في أنماط التقدم التطورية والثورية.

ويؤكد المؤلفان بحسب ترتيب الأفكار ذاته، على أهمية التفكير الجيد المستند إلى سياق حل المسألة الذي يتطلب إما تطبيقاً دقيقاً للاستدلال وقبولاً تامّاً للمعلومات، جنباً إلى جنب مع إهمال الأدلة المناقضة، أو الذي يطور العملية غير التسلسلية بحلقات من التفسير والحدس واختبار الأفكار التي تعدُّ سمات للمسائل غير المنظمّة. وأخيراً، يعتمد تطور الإبداع على السياق الاجتماعي، حيث يحصل الأفراد المبدعون على تقدير قدراتهم والاهتمام بها من الأسرة والمعلمين. وإضافة إلى ذلك، أكد الباحثان على ضرورة إيجاد بيئة التعلم التعاونية والتفاعلية الاجتماعية بصفتها سياقاً اجتماعيّاً ضروريّاً.

نحو نظام مدرسي أكثر شمولاً

إضافة الإبداع إلى مخزون المعلمين التعليمي الخاص بالأطفال النابغين

باستطاعتنا أن نرى أنه قد جرى حتى الآن إيجاد الفرص للأفراد المبدعين والنابغين في كثير من نظم التربية والتعليم خارج النظم العادية أو أبعد منها. وسوف نحلل في هذا الجزء كثيراً من الخيارات داخل غرفة الصف التي ينبغي للمعلمين استخدامها في تعزيز تطور الإبداع وتغذيته بطرق أكثر شمولية.

يؤكد كلاين (Cline 1999) على الحاجة إلى الإفادة من البحوث عن المبدعين، والعمليات الإبداعية، والسياقات التي تعزز السلوك الإبداعي ونقلها إلى ممارسات داخل غرفة الصف، لتزويد الطلاب بفرص لإظهار قدراتهم الإبداعية وتطويرها. وبحسب وجهة نظر ياستريبوف (Yastrebov, 2005)، فإن المعلمين لم يأخذوا الطبيعة الاستقرائية للرياضيات في الحسبان، ويرى أن هناك حاجة إلى تطوير الفهم الجيد لطبيعة الرياضيات الثنائية (Dualistic Nature) عند المتعلمين الصغار. إن الأفراد هم من يبتكرون كل حقيقة رياضية، ولكن وجود الرياضيات أمر مستحيل خارج المؤسسة الاجتماعية المسماة بالمجتمع العلمي الذي يوافق على كل اختراع رياضي، ويتعيّن أيضاً تداول الحقيقة الرياضية المكتشفة حديثاً في أوساط المجتمع لتفحصها تفحصاً ناقداً من خبراء في المجال المعني.

وفي جانب متصل، يشير جويرا، جيمينيز، وسيرفات (Guerra; Gimenez; Servat, 2005) إلى أن الألفة (Familiarity)، والتباعد (Divergence)، وإعادة الابتكار (Reinvention) تعدُّ مكونات ضرورية لمعرفة المعلمين بأساليب التدريس. وبعبارة أكثر دقة، تعني الألفة اقتراح مهام إبداعية محتملة من خلال تحديد المقترحات غير التقليدية، والتنوع في النماذج والمعاني في السياقات المختلفة، والانفتاح على أنواع متعددة من الإجابات والنتائج المفاجئة المدهشة. يعزز التباعد الحوار المفتوح والأسئلة المتشعبة في السياقات والمواقف المختلفة، فيما تتيح إستراتيجيه إعادة الابتكار اختيار التسلسل التعليمي المناسب لتطوير الابتكارات من السياقات، والتفكير في مهام خيالية وحقيقية ومبتكرة، وإعادة اكتشاف المعرفة الرياضية المُتعلّمة سابقاً بطريقة جديدة.

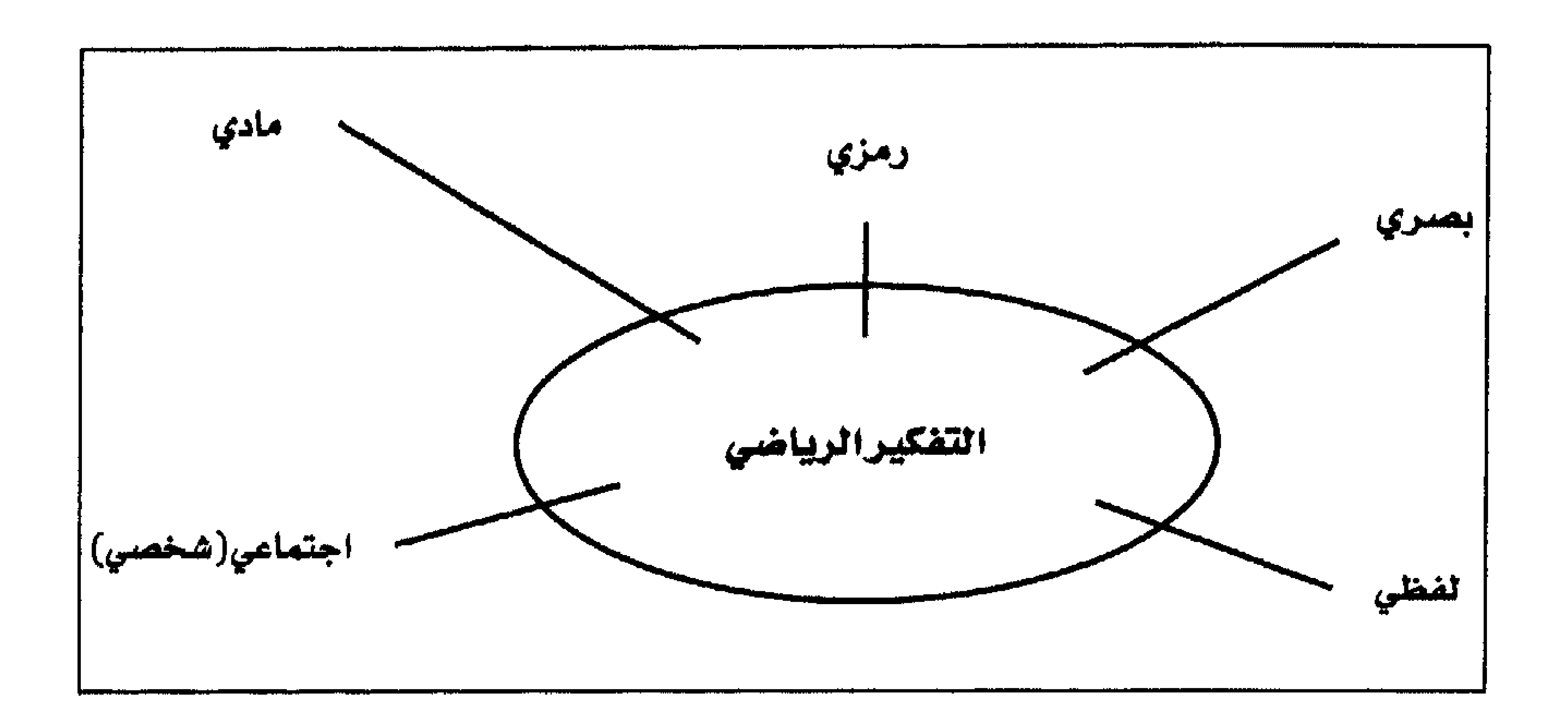
ويُعـدُّ مثل هـذا الدور للمعلمين بصفتهم مشجعين للعمـل الرياضي الإبداعي مهمّاً في تطوير الطلاب النابغين. ومن وجهة نظر كارب (Karp, 2007) يجب إيلاء الاهتمام بتربية معلمي المستقبل، بحيث تُعزّز معرفتهم العلمية بأمثلة على الوسائل والطرق التي يستخدمها الطـلاب النابغون في الرياضيات فـي بناء معرفتهم، واستخدامها فـي أنشطتهم الإبداعية الأخرى.

يشيـر كثير من المؤلفين إلى ضرورة إيجاد بيئة صفية رياضية تتسم بالتحدي، وتلائم الطلاب جميعاً حتى النابغين منهم.

الإبداع والتفكير بصفتهما مكوّنين لرعاية بيئة التعليم - التعلم للأطفال الموهوبين

أشـار كلاين (Cline, 1999) إلى وجوب تطوير أربع قـدرات تفكير مرتبطة بالإبداع، هي: الطلاقـة، والمرونة، والأصالة، والإفاضة التي تعدُّ عناصر أساسية في تعريف جيلفورد (Guilford,1967) للتفكيـر التباعدي، حيث إن توليـد المعلومات من معلومات متوافرة مع التركيز على تنوع النتاجات وجودتها من المصدر نفسه، يشتمل أيضاً على التحويل. سنربط فـي الفقـرات الآتية هـذا التعريف، بوجهات نظر علمـاء التربية فـي الرياضيات بخصوص التفكير الرياضي.

يشير كثير من المؤلفين إلى القدرة على إدراك الأنماط والنظر إلى العلاقات بصفتها عنصـراً رئيسـاً في التفكيـر الرياضي. وفي هذا السيـاق يرى فيشـر (Fisher, 1990) أن الرياضيات ما هي إلا شبكة أفكار مركبة على نحوٍ كبير. وعليه، فإن التفكير بطريقة رياضية يتطلب تكوين روابط في هذه الشبكة، وبذلك يصبح دور المعلم مساعدة الأطفال على معرفة البنيـة الموجودة في الرياضيات، وليس مجرد تعلُّـم القوانين والحقائق بمعزل عنها. ويقول إننـا بتشجيعنا الأطفال على التفكير رياضيّاً نحتاج إلـى الانتظام في الجوانب جميعها ذات الصلة بذكائهـم. وعموماً، هناك طرائق مختلفة لمعالجـة الرياضيات وفقاً للمخطط الآتي (شكل 1:5).



شكل 5: 1 طرق مختلفة للتفكير الرياضي

وبنـــاءً على هذا النموذج، نرى أنه يمكن نمذجة المسائـل الرياضية أو تمثيلها بطرائق متعددة على النحو الآتي:

- **لفظيّـاً (Verbally)**: عن طريق الحديث الداخلي والتحدث عن الأشياء من خلال استخدام الـذكاء اللغوي، ووضع إجراءات التخطيـط والمعالجة بالكلمات، بحيث تعطي الفرد معنى للأشياء.
- **اجتماعيّـاً (Interpersonally)**: التعلـم مـن خلال التعاون عـن طريق ملاحظة الآخريـن، والعمل الجماعـي لتحقيق الهدف المشترك، وتبـادل الأفكار والمقارنة بينها، وتوجيه الأسئلة ومناقشة المسائل.
- **ماديّاً (Physically)**: استخدام الأشياء المادية في أداء المهام الرياضية، والعمل باستخدام أدوات ومعدات رياضية عمليـة، ونمذجة المسألة أو العملية والمشاركة في الخبرات، واستخدام المهارات الجسدية-الحركية، والتطبيق العملي في ا.
- **بصريّاً (Visual)**: تمثيل العمليات صوريّاً، بإعداد رسوم أو أشكال تصور الأنماط والأشـكال بعيـن العقـل (Mind's Eye)، والتفكير بالمفهـوم المكاني، والتواصل البياني، والتصميم الهندسي، واستخدام الصور الذهنية.

- رمزيّاً (Symbolically): استخدام الكلمات المكتوبة والرموز المجردة في تفسير المسائل الرياضية وتسجيلها واستخدامها باتباع نظم تسجيل متنوعة، ونقل الرموز الرياضية إلى لغة منطقية دقيقة.

وبحسب وجهة نظر بارودي (Baroody, 1987)، فإن التعلم الحقيقي يشتمل أيضاً على القدرة على التغيير في أنماط التفكير. وفي الواقع، يمكن أن ينتج التبصر وجهات نظر جديدة وأكثر قوة، ومن ثم تغيير تفكير الطفل تجاه شيء ما. وعلى نحوٍ أكثر تحديداً، فإن تغيير وضع الروابط يمكن أن يؤدي إلى طريقة تنظيم المعرفة. فالطفل الذي يجهل روابط الطرح الأساسية يعمد إلى استخدام الأصابع في حساب الفروق. مثلاً، عندما يواجه الطفل السلسلة الآتية من الطرح: ـ=5−10,ـ=4−8,ـ=3−6,ـ=2−4,ـ=1−2، فإنه يحسب إجابة كل سؤال بشِقّ الأنفس. وفجأة قد يتكون لديه رؤية عن فكرة الحل: مجموعة الأعداد هذه عبارة عن مقلوب إضافة العدد إلى نفسه (1+1=2, 2+2=4, 3+3=6, 4+4=8, 5+5=10). وبذلك ينتج الطفل علاقة جديدة بين مجموعات الطرح وحقائق الجمع المألوفة، تسمح له بالنظر إلى الطرح من زاوية أخرى. وإذا ما أعطي الطفل مسألة، مثل: ـ =3−5، فإنه يفكر في نفسه قائلاً: «ثلاثة زائد كم يساوي خمسة؟ نعم، اثنان». فمنظوره الجديد يمكّنه من حل مسائل الطرح بفاعلية دون مشقة في الحساب. وعلى هذا، فإن التطور الرياضي يتطلب تغيرات نوعية في التفكير، وتغيرات من حيث كمية المعلومات المخزنة. وعلى أي حال، فإن التغير في أنماط التفكير يُعدُّ أمراً أساسيّاً في تطوير الفهم (Baroody, 1987, P. 11).

وبحسب وجهة نظر شراج (Schrag, 1988)، فإن النشاط الذهني يُعدُّ تفكيراً هادفاً إذا كان موجهاً نحو مسألة، أو مهمة حددها الفرد لنفسه. وعلى أي حال، فإن من المتفق عليه أن هذا الأمر يعد معياريّاً، وقد قصد بهذا التصور أن يتضمن حالات يمكننا فيها، على نحوٍ مفاجئ، رؤية حل دون وعي أو «صراع» مع المسألة. ولكن حتى في مثل هذه الحالات، لا تبدو الفكرة حلّاً ما لم تُجرّب فيما يتعلق ببعض الصعاب التي أثارت قلقنا. وهكذا يُستثار التفكير في المواقف التي لا يكون فيها المرء متيقناً تماماً كيف سيمضي قدماً إلى الأمام. وقد أطلق «شراج» على هذا الوضع اسم » المشكلات أو المسائل» (Problems).

استناداً إلى أعمال بوليا وشوينفيلد، أشار إيرنست (Ernst, 1998) إلى نوعين من التفكير اللذين قد يؤثران في سلوك حل المسائل، وهما: **المعرفي (Cognitive)**، وما **وراء المعرفي (Meta–Cognitive)**. تتضمن الأنشطة المعرفية استخدام الحقائق، والمهارات، والمفاهيم، وأشكال المعرفة الرياضية كافة وتطبيقها. وتشتمل أيضاً على تطبيق إستراتيجيات عامة ومحددة للموضوعات الرياضية، وتنفيذ خطط لحل المشكلات. في حين تشتمل أنشطة ما وراء المعرفة على التخطيط ومراقبة التقدم، واتخاذ القرارات وتدقيق العمل واختيار الإستراتيجيات وما إلى ذلك. يدور مفهوم ما وراء المعرفة **«الفوق معرفية» (Above Cognition)**، حول إدارة التفكير. وقد وصف سيربينسكا، نينادوزي، وأوكتاك (Sierpinska, Ninadozie, And Octac, 2002) التفكير الرياضي أنه ذلك التوازن الجيد **بين التفكير النظري والعملي**. وفي معرض دراستهم للعلاقة بين التفكير النظري والتحصيل العالي في الجبر الخطي، افترض سيربينسكا وزميلاه أن التفكير النظري لا يُعدُّ استمراراً للأفكار العملية، بل قلباً لها (ص.11). فقد صوروا التفكير العملي على أنه عقبة معرفية (Epistemological Obstacle) لا يمكن تفاديها. وعلى أي حال، فقد ادعوا أن تعليم المفاهيم الرياضية المجردة التي تركز كثيراً على الخبرات المحسوسة المستندة إلى ما يسمى بالمناحي الهندسية (Geometric) أو العددية (Numerical)قد تترك الطلاب بتمثيلات ليست ذات صلة من وجهة نظر المفاهيم، وتقودهم إلى التناقضات (المرجع السابق، ص19).

بعد أن عرّف المؤلفون التفكير النظري، أنه تأملي، نظامي (فرضي مستند إلى البرهان)، تحليلي (حساس لمقاصد ما وراء اللغة Meta–Linguistic Sensitive)، دعوا إلى ضرورة التفكير النظري في فهم الجبر الخطي على النحو الآتي:

- يجب أن يكون المتعلمون للجبر الخطي من طلاب الجامعات ميالين إلى النظرية بدرجة أكبر من مخترعي النظرية أنفسهم.
- يجب البحث عن معاني المفاهيم من حيث علاقتها بغيرها من المفاهيم.
- يجب أن يشارك المتعلم في إثبات النشاط، وأن يستخدم مناحي منتظمة في تحقيق المعنى والدقة.

- علـى المتعلم أن يتقبل أن أسئلتـه الوجودية (Ontological Questions) ستبقى دون إجابة.
- يجب أن يشارك المتعلم في التفكير الافتراضي (Hypothetical Thinking).
- يجب أن يصبح المتعلم «متعدد اللغات» الرياضية (المرجع السابق، ص 35-33).

وإذا مـا عمّمنا هذه الأفكار على مستوى المرحلة الابتدائية، فسنرى أن التوجهات هذه الأيـام (ناقشنا ذلك في الأجزاء السابقة) لا تشجـع تعليم التفكير النظري (Theoretical Thinker) علـى الرغم من أن ممارساتنا تظهـر أن الطلاب النابغين في الرياضيات، حتى في سن مبكرة، يحملون وجهات نظر معرفية عن الرياضيات قريبة من التفكير النظري.

ونحـن عندمـا نفكر في تفسير جوانـب التفكير هذه من حيث النبـوغ، ربما نفترض أن الطفـل المتفوق رياضيّاً ذا التحصيـل العالي، قد يظهر قدرة متوازنة علـى التفكير رياضيّاً (نظريّاً وعمليّاً). فيما يكون الطفل ذو القدرة الرياضية من غير ذوي التحصيل العالي ميالاً إلـى أن يكـون نظريّاً على نحوٍ أكبر. والسـؤال الذي يُسأل هو: هل يمكـن أن يكون الطفل ذو القـدرة الرياضية عمليّاً فقط؟ وما النقطـة التي يمكننا عندها تحديد الطفل بصفته مفكراً نظريّاً؟

ويبـرز سؤال آخر هو: ما نوع المواقف الصفية التـي تعزز تطور التفكير الرياضي لدى الأطفال الصغار؟

ومـن أجل تعزيز تطور التفكيـر الرياضي، فقد أكد بارودي علـى استخدام منحى حل المشـكلات الذي يركز على عمليات الاستقصاء الرياضـي: حل المسائل والتعليل والتعميم. وهذا المنحى يوجهه المعلم لكن الطالب يؤدي فيه دوراً فاعلاً.

أجرى إيرنست تحليلاً مقارناً لمناحي تعليم مختلفة ذات صلة بالتفكير الرياضي. وقد أظهـر التحليل أن التحول التعليمي للعملية الرياضية، «التي تتطور من خلال تطبيق الحقائق والمهـارات والمفاهيـم إلـى حصيلة محدودة مـن إستراتيجيـات حل المسائـل، وفي ذلك استنبـاط النمـوذج وتعميمه إلى إستراتيجيات كاملة لحل المسائـل، وأخيراً إضافة عمليات

افتراض المسألة (Problem-Posing Processes) أيضاً» (ص. 132)، يحدث عندما يصبح التعليم في غرفة الصف أكثر انفتاحاً وتحدّياً.

وقد حدد فيشبين(Fischbein, 1990) مهمة المعلم ب «إيجاد بيئة تتطلب مواقف وآراء ومفاهيم وحلولاً رياضية»، حيث يرى أن الأطفال عندما يواجهون مهمة صعبة قد لا يستطيعون التوصل إلى حل عفوي، إذ قد ينتظمون في عملية بنائية تربط بين كثير من الشروط. ثم عليهم عندئذٍ إيجاد طريقة لحل المسألة على نحوٍ منظم. وهو يرى أن هذا الجانب في التوصل إلى طريقة، يُعدّ عملية حسابية تُتخذ على نحوٍ واعٍ أساساً لتطوير التعليل الرياضي. ويضيف متسائلاً: هل يتعين على المعلم الانتظار إلى أن يتوصل الأطفال إلى الحل بأنفسهم دون مساعدة؟ ويعلق على ذلك قائلاً:

> لا يتطور الاستدلال الرسمي عفوياً بصفته طريقة رئيسة للتفكير. وهذه النتيجة لا تعني أن يقدم المعلم الحل، بل يتعين عليه توجيه جهود الطلاب نحو الحل عن طريق طرح أسئلة مناسبة. ويبني الطلاب الإجابات بصفتها ردة فعل على بيئة معيّنة. وينبغي أن تُبرمج هذه البيئة بصفتها بيئة إشكالية (Problematic One)، لإلهام الطلاب في مسعاهم إلى حل المسائل. (Fischbein, 1990, P. 8).

تتوافق هذه الموجهات النظرية مع ملاحظات درسكول (Driscoll, 1999)، من خلال:

- النمذجة المتناغمة للتفكير الجبري.
- إعطاء مؤشرات زمنية للطلاب تعينهم على نقل تفكيرهم أو توسيعه، أو تعينهم على الانتباه لما هو مهم.
- جعل طرح الأسئلة المتنوعة عادة تهدف إلى مساعدة الطلاب على تنظيم تفكيرهم، والاستجابة إلى علامات الجبر.

سيطور المعلمون عادات العقل (Habits of Mind) الخاصة بالتفكير الجبري لدى الأطفال على النحو الآتي:

- القابليـة للانعكاسـ (Reversibility) بصفتهـا القدرة على استخـدام عملية ما فـي الوصول إلى الهدف، وفهـم عملية الحل فهماً كافياً بطريقـة عكسية بدءاً من الجواب إلى نقطة البداية.
- بناء القوانين بصفتها قدرة على فهم الأنماط وتنظيم البيانات.
- الاستخلاصـ من المجمـوع بصفته قدرة علـى التفكير حول العمليـات الحسابية بالتغاضي عن الأعداد المستخدمة (Driscoll, 1999, P. 3).

ملاحظات ختامية

استنـاداً إلى الاعتبـارات النظرية السالفة الذكـر، ننتقل الآن إلى أسئلـة أكثر عملية، مثل: ما الأنشطة الرياضية المساعدة على تعزيز بروز التفكير الإبداعي لدى طلاب المرحلة الابتدائيـة الموهوبين في الرياضيات، التي تتيح لهـم التقدم في صف ذي قدرات مختلطة؟ تشير كثير من الدراسات إلى المهام الزاخرة بالرياضيات بصفتها محركاً لمثل هذا التعزيز. ذكـر بيرسيني ونـوث (Peressini And Knuth, 2000) أن المهام الغنية بالرياضيات هي التي تنطبق عليها المعايير الآتية:

- تشجع مدى واسعاً من مناحي إستراتيجيات الحلول.
- تعالج مفاهيم رياضية مهمة.
- تتطلب من الطلاب تبرير تفسيراتهم.
- تكون مفتوحة النهاية.

يتطلب استخدام مثل هذه المهام إعادة التفكير في دور كل من المعلم والطالب. ويؤكد بيرتـون (Burton, 1984) أن دور المعلـم قد تحوّل من ملقّـن للمعلومات إلى مُحاوِر ومزوّد للمصادر.

يتحـدى المعلم الطـلاب لتبرير براهينهم أو إثبات بطلانهـا، والتأمل بما عملوه. ويُعدُّ أسلـوب تدخل المعلم ذا أهمية بالغـة أيضاً، إذ يجب التأكيد على الاستفسار بدلاً من إعطاء التعليمات. تشير مناقشة سريرامان (Sriraman, 2004) بخصوص الإبداع في الرياضيات إلـى أن كثيـراً من سمات الإبداع فـي الرياضيات، التي وصفها علمـاء الرياضيات على أنها

جوانب قيمة من جوانب مهنتهم مثل؛ حرية الاختيار، ومتابعة المسائل في المحافل العلمية، وحريـة الحركـة المطلوبة فـي أثناء العمـل، ومعرفة الفروق بيـن التعلم والإبـداع والإغراء الجمالـي للرياضيات والدافع الوجداني/ المحرك لحل المسألة بتطبيقات واقعية هائلة، قد يصعـب محاكاتها داخل غرفة الصف التقليدية. ومع ذلك، فهنـاك مبادئ أساسية يطبقها المعلمون في غرفة الصف. وقد برزت من الدراسة التحليلية والتجميعية للدراسات التي قام بها سريرمان، خمسة مبادئ شاملة تعزز الإبداع في الرياضيات، هي: (أ) مبدأ الجشتالت، (ب) المبدأ الجمالي، (ج) مبدأ السوق الحرة، (د) المبدأ العلمي، (هـ) مبدأ الشك.

أما ما يخص الطلاب، فإننا نؤكد أنه إلى جانب تعزيز الاهتمام والدافعية والنجاح في حل المسائل، لا بد من الإشارة إلى الجوانب الآتية:

- اختيار التمثيلات التي تعزز القدرة على نمذجة المسألة واستخدامها.
- حسـم المسألة بدلاً من تقديم الحل؛ وهذا يساعد على تطوير وجهة نظر نحو بناء شبكة من الأسئلة الجديدة والحلول الجدية، وفوق كل هذا، أسئلة تبرز من المسألة الأساسية تتبع التطور الحلزوني بدلاً من التطور الخطي (المسألة – الحل).
- التعميم والنشر باستخدام أدوات اتصال مختلفة.

تظهـر دراستنا لمنحـى الحالات الصعبة داخـل الغرف الصفيـة للرياضيات الشاملة (Freiman, 2006)، أن الطـلاب النابغيـن يمكـن أن يذهبوا في مثل هـذه المواقف إلى ما هو أبعد منهـا، ويطرحوا أسئلة جديدة، ويبتكروا استقصـاءات خاصة بهم، ويصبحوا أكثر إبداعـاً في أعمالهـم الرياضية، وفي الوقت ذاتـه، تتحول مثل هذه البيئـة الصفية إلى بيئة إثرائية للطلاب جميعاً، وتساعدهم على التحول إلى متعلمين أكثر إبداعاً.

يؤكـد كثير من الباحثين في تعليم الرياضيات على أهمية البيئة التعليمية المحددة في رعايـة التفكير الإبداعي لـدى المتعلمين الصغار. وقد ركز ميسنر (Meissner, 2005) في دراسته على ثلاثة جوانب:

- المكوّنـات الفردية والاجتماعية، كالتحفيز، والفضـول، والثقة بالنفس، والمرونة، والمشاركـة، والفكاهـة، والخيـال، والسعـادة، وتقبـل الإنسان لذاتـه وللآخرين، والرضا، والنجاح.
- نقاشـات معمقـة، إضافة إلى مسائل صعبة عفوية جذابـة، وشائقة، ومهمة، تتسم بالإثارة.
- يجـب أن يكون الطلاب قادريـن على تعريف أنفسهم بالمشكلـة وحلولها الممكنة، وتطويـر قدرات مهمة لاستكشـاف مسألة ما وبنائها، واختـراع أساليبهم الخاصة أو تعديل المناحي الموجودة، وأن يستمعوا ويناقشوا، ويحددوا الأهداف، ويتعاونوا فيما بينهم بصفتهم فريقاً واحداً.

ومما لا شك فيه أن أخذ هذه الجوانب في الحسبان سيساعد الأطفال على أن يصبحوا فاعلين، وأن يكتشفوا ويجربوا، ويستمتعوا، ويخمنوا ويختبروا، ويضحكوا من أخطائهم التي يرتكبونها. وتبرز الدراسة الأخيرة رقم 16 للهيئة العالمية لتدريس الرياضيات (The International Commission on Mathematical InstructionIcmi) حول تحدّي الرياضيات (Challenging Athematics)، التي أجراها تيلور وباربيو (Taylor And Barbeau)، الحاجة إلى مزيد من البحث حول تزويد الطلاب بخبرات حل مسائل رياضية غنية وصعبة بهدف تطوير إبداعهم ورعايته.

قائمة المراجع

Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking*: A Developmental Frame-work For Preschool, Primary And Special Education Teachers. Columbia: Teachers College, Columbia University.

Baroody, A. (1993). *Problem Solving, Reasoning, And Communication, K-8*: Help-ing Children Think Mathematically. Macmillan Publishing Company.

Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology*. Siam Review, 11, 429-469.

Blazer, H. D. (1989). *Soviet Science On The Edge Of Reform*, Boulder: Westview Press.

Bradis, V. M. (1954). *Methodology Of Teaching Mathematics In The Secondary School*, Utchpedgiz,In Russian.

Burton, L. (1984). *Thinking Things Through. Oxford: Basil Blackwell Limited*.

Cline (1999). *Giftedness Has Many Faces*: Multiple Talents And Abilities In The Classroom. The Foundation Of Concepts In Education, Inc., 193 Pp.

Cramond, B. (1994). *Attention–Deficit Hyperactivity Disorder And Creativity–What Is The Connection?* Journal Of Creative Behavior, 28, 193–210.

Csikszentmihalyi, M. (1988). *Society, Culture, And Person*: A Systems View Of Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), The Nature Of Creativity: Contemporary Psychological Perspectives (Pp. 325–339). Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications Of A Systems Perspective For The Study Of Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 313–338). Cambridge University Press.

Davis, G. A. (1997). *Identifying Creative Students And Measuring Creativity*. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), Handbook Of Gifted Education (Pp. 269–281). Boston: Allyn Bacon.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Houghton Mifflin.

Diezmann, C., & Watters, J. (2000). *An Enrichment Philosophy And Strategy For Empowerment Young Gifted Children To Become Autonomous Learners*. Gifted And Talented International 15(1), 6–18.

Diezmann, C., & Watters, J. (2002). *Summing Up The Education Of Mathematically Gifted Students*. Proceedings Of The 25Th Annual Conference Of The Mathematics Education Research Group Of Australasia, Pp. 219–226.

Driscool, M. (1999) *Fostering Algebraic Thinking*: A Guide For Teachers, Grades 6–10. Portsmouth, Nh: Heinemann.

Ernst, P.(1998). *Recent Development In Mathematical Thinking*. In R. Burden, & M. Williams (Eds.), *Thinking Through The Curriculum (Pp. 113–134). London*, New York: Routledge.

Fischbein, E. (1990). *Introduction*. In: P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics And Cognition: A Research Synthesis By The International Group For The Psychology Of Mathematics Education. Cambridge: University Press.

Fisher, R.(1990). *Teaching Children To Think*, Oxford: Basil Blackwell.

Freiman, V. (2006). *Problems To Discover And To Boost Mathematical Talent In Early Grades*: A Challenging Situations Approach. The Montana Math-ematics Enthusiast, 3(1), 51-75

Freiman, V., & Volkov, A. (2004). *Early Mathematical Giftedness And Its Social Context*: The Cases Of Imperial China And Soviet Russia. Journal Of Ko-rea Society Of Mathematical Education Series D: Research In Mathematical Education, 8(3),157-173.

Gallian, J. A. (1994). *Contemporary Abstract Algebra*. Lexington, Ma: D.C. Heath And Co.

Gnedenko B. V. (1991) Introduction In Specialization: Mathematics (Введение в специ-- альность: математика), Nauka, 235 Pages. In Russian Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). The Case Study Method And Evolving Sys-tems Approach For Understanding Unique Creative People At Work. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 93-115). Cambridge Univer-sity Press.

Guerra, Gimenez, & Servat (2005). Detecting Traits Of Creativity Potential In Mathematical Tasks With Prospective Primary Teachers, Icmi - Earcome-3 (East Asia Regional Conference On Mathematics Education), Shanghai, China, August, 7-12, 2005, Http://Www.Math.Ecnu.Edu.Cn/Earcome3/

Hadamard, J.W. (1945). *Essay On The Psychology Of Invention In The Mathemati-cal Field. Princeton University Press*.

Karp, A. (2007). *Knowledge As A Manifestation Of Talent*: Creating Opportunities For The Gifted. Mediterranean Journal For Research In Mathematics Edu-cation, This Issue.

Kolmogorov (1959). *On The Profession Of A Mathematician*. Moscow State Uni-versity Press (In Russian).

Krutetskii V. A.(1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Chil-dren*. Chicago: The University Of Chicago Press.

Lester, F. K. (1985). *Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem Solving*. In E. A. Silver (Ed). Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives (Pp. 41-70). Hillsdale, Nj: Erlbaum.

Marshak, D. (2003). *No Child Left Behind*: A Foolish Race Into The Past. Phi Delta Kappan, 85(3) 229–231.

Massé, L., & Gagné, F. (2002). *Gifts And Talents As Sources Of Envy In High School Settings*. Gifted Child Quarterly. 46(1), 15–29.

Meissner, H. (2005) *Creativity And Mathematics Education*. Paper Presented At The 3Rd East Asia Regional Conference On Mathematics Education Http://Www.Math.Ecnu. Edu.Cn/Earcome3/Sym1/Sym104.Pdf

Miller, A. (1997) *Cultures Of Creativity*: Mathematics And Physics. Diogenes, 45, 53–75

Minsky, M. (1985). *The Society Of Mind*. New York: Simon & Schuster Inc. Peres–sini D., & Knuth, E. (2000). The Role Of Tasks In Developing Communities Of Mathematical Inquiry. Teaching Children Mathematics, 391–396.

Poincaré, H. (1948). *Science And Method*. Dover: New York.

Polya, G. (1954). *Mathematics And Plausible Reasoning*: Induction And Analogy In Mathematics (Vol. Ii). Princeton, Nj: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How To Solve It*. Princeton, Nj: Princeton University Press.

Ridge, L., & Renzulli, J. (1981). *Teaching Mathematics To The Talented And Gifted*. In V. Glennon (Ed.) The Mathematics Education Of Exceptional Children And Youth, An Interdisciplinary Approach (Pp. 191–266). Nctm.

Sheffield, L. (2003). *Extending The Challenge In Mathematics*. Tagt & Corwin Press, 150 Pp.

Schoenfeld, A. H. (1979). *Explicit Heuristic Training As A Variable In Problem–Solving Performance*. Journal For Research In Mathematics Education, 10, 173–187.

Schoenfeld, A. H.(1985A). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schrag, F. (1988). Thinking In School And Society. New York: Routledge.

Shavinina, L.V., & Ferrari, M. *(2004). Beyond Knowledge*: Extracognitive Aspects Of Developing High Ability. Mahwah, Nj: Erlbaum.

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Octaç, A.(2002). *A Study Of Relationships Between Theoretical Thinking And High Achievement In Linear Algebra*. Montreal: Concordia University.

Smith, J. M. (1966). *Setting Conditions For Creative Teaching In The Elementary School*. Boston: Allyn And Bacon.

Sriraman, B. (2004). *The Characteristics Of Mathematical Creativity*. The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.

Sriraman, B. (2005). *Are Mathematical Giftedness And Mathematical Creativity Synonyms?* A Theoretical Analysis Of Constructs. Journal Of Secondary Gifted Education, 17(1),20–36.

Sriraman, B. (2008). *The Characteristics Of Mathematical Creativity*. (This Issue).

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook Of Creativity*. Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). *Investing In Creativity*. American Psychologist, 51, 677–688.

Sternberg, R. J., & Lubart, T.I. (2000). *The Concept Of Creativity*: Prospects And Paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). Cambridge University Press.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests Of Creative Thinking*: Norms–Technical Manual. Lexington, Ma: Ginn.

Torrance, E. P. (1981). *Non–Test Ways Of Identifying The Creatively Gifted*. In J.C. Gowan, J. Khatena, & E.P. Torrance (Eds.), Creativity: Its Educational Implications (2Nd Ed.) (Pp. 165–170). Dubuque, Ia: Kendall/Hunt.

Vogeli, B. (1968). *Soviet Secondary Schools For The Mathematically Talented*. Nctm.

Weisberg, R.W. (1993). *Creativity*: Beyond The Myth Of Genius. New York: Freeman.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.

Yastrebov, A.V. (2005) *Dualisticheskiye Svoystva Mathematiki I Ih Otragenije B Processe Prepodavanija*. Pedagogicheskii Vestnik.

ملاحظات

1. تحدث عمليات مشابهة في فروع أخرى من فروع المعرفة لا سيما في الفيزياء، لكننا نركز في هذا البحث على تعليم الرياضيات.

2. كان لمجموعــة من الأشخاص ذوي التعليم العالي جدّاً وجهات نظر تقدمية سريعة التغير، ومطالب عالية جدّاً فيما يتعلق بجودة التعليم المقدم إلى أطفالهم.
3. يشير فوجيلي (Vogeli) إلى أن مناهج العام 1921 أكدت قيمة الأنشطة الإبداعية فـي تعليم الرياضيات، والحاجة إلى توسيـع آفاق الخلفية الرياضية لدى الطلاب، إضافة إلى الرغبة في ربط الرياضيات بالحياة (Vogeli, 1968, P. 4).
4. تذكـر موسوعة علمـاء الرياضيات الشباب في موسكـو، The Encyclopedia Of (Young) Mathematician, 1985, In Russian, P. 187، عالمـي الرياضيات الشهيريـن ديلـون (B. N. Delone) والكسانـدروف (P. S. Alexandrov) بصفتهما المبادرينِ والمنظّمينِ لهذه المسابقات.



تمكين مزيد من الطلاب لتحقيق النجاح الرياضي

دراسة حالة سارة

سيلفيا بولغار

ملخص

في الوقت الذي تكافح فيه الولايات المتحدة لتنافس الأمم الصناعية الأخرى في تعليم الرياضيات وتعلّمها، لكن يبدو أن هناك حاجة إلى التركيز على أحد أعظم الموارد البشرية؛ إنهم أولئك الذين سيصبحون مميزين في الرياضيات. لذا، فإنه من الضروري جدّاً توفير الإمكانات المثلى للطلاب جميعاً لإظهار ما لديهم من أداء متميز؛ كي يتمكنوا من تلقي التدريب الملائم عبر مراحل حياتهم التربوية. تعرض الباحثة في هذا البحث بعض التجارب الرياضية لطفلة اسمها (سارة) -حفيدتها- التي أظهرت سمات عالية في التحصيل الرياضي. وقد ظهرت هذه المؤشرات عندما كانت سارة صغيرة جدّاً.

المقدمة والإطار النظري

تعمل الولايات الأمريكية جميعها بجد نحو إيجاد معايير تربوية قابلة للقياس، وإيجاد أدوات قياس لهذه المعايير بهدف الامتثال لقانون «عدم إهمال أي طفل » (No Child Left Behind) الصادر عام 2001. وقد رُبطت الإعانات الاتحادية بالامتثال لهذا التشريع، الذي يركز على تلبية الأطفال جميعاً للمعايير الأساسية للبراعة والكفاية.(Proficiency) ويُحدّد مدى تلبية المعايير من خلال الاختبارات في مختلف الصفوف الدراسية. وقد ترتب على ذلك قيام المعلمين في كثير من الحالات بإعادة تحديد أهدافهم التربوية بحيث يكون جميع طلبتهم، بصرف النظر عن قدراتهم، أكْفاء (Proficients) في الاختبارات المقننة (Schorr & Bulgar, 2003). وتطبق 50 ولاية، إضافة إلى مقاطعة كولمبيا ،بدءاً من العام الدراسي(2000-2001) ، برنامج اختبار على نطاق واسع (Education Week On The Web, 2002). ثم تخطت النزعة نحو إجراء مزيد من الاختبارات المقننة للكفاية حدود الولايات المتحدة الأمريكية (Albrantes, 2001; Firestone & Mayrowetz, 2000; Keitel, & Kilpatrick, 1998 As Cited In Albrantes, 2001; Niss, 1996).

وفي الوقت ذاته، أشار تقرير «خريطة الطريق للأمن القومي: حتمية التغيير»، (Road Map For National Security: Imperative For Change, 2001) المعروف أيضاً باسم تقرير لجنة هارت رودمان (Hart-Rudman) ، إلى حاجة الولايات المتحدة الملحة لتربية جيل جديد من المواطنين البارعين في مجالات العلوم والتقانة والهندسة والرياضيات. وهكذا، كوّن عضوا الكونغرس فيرن إيلر ومارك يودال (Ern Ehlers &Mark Udall) التجمع المعروف باسم مسار عرف باسم (STEM) (Pipeline Science, Technology, Engineering, Mathematics Stem). للمساعدة على تزويد الولايات المتحدة برأس المال المعرفي المطلوب لتعزيز الاقتصاد المبني على المعرفة وتطويره. وبناءً على ذلك، فقد بات من الضروري تزويد الأطفال جميعهم منذ نعومة أظفارهم بالفرص التي تعزز من أدائهم في الرياضيات، الأمر الذي يجعل تعليمهم داعماً لنموهم وتطورهم المتواصل في الرياضيات.

وعلـى الرغم من التركيز على جعـل الأطفال يطورون مهاراتهم فـي الرياضيات، فإن الاختبـارات الوطنية والعالميـة المستخدمة في قياس التقدم التربـوي في الرياضيات، مثل مسابقـة الدراسة الدولية للرياضيات والعلـوم -تيمس- (And Science Study -Timss) واختبـار القياس الوطني للتقـدم التربوي (Progress-Naep) تشيـر إلى أن عدد الطلاب فـي الولايـات المتحدة الذين أبـدوا فهماً للأفـكار أو المعرفة التي يطلـب إليهم العمل على أساسهـا، من خطوات وحساب ومسائل أساسية كان غير كاف. وبناءً على ما سبق، ليس من الغريب وجود تركيز تربوي على تحديد الطلاب الضعفاء ومساعدتهم، وهذا ما يحدث غالباً عـن طريق إجراء علاجي، بهدف تحقيـق نتائج مرضية في الاختبـارات، دون اهتمام كافٍ بضـرورة بناء المعرفـة التي يمكن أن تقوي الفهـم. وإضافة إلى ذلك، ونظـراً إلى الحوافز الماليـة المقيـدة بوجوب وصول الطلاب جميعاً إلى مستوى الكفايـة، يعاني مجتمع النابغين الذين وصلوا إلى الكفاية التجاهل بسبب الفكرة الخاطئة التي تقول إنهم سيواصلون التقدم بمفردهـم (Goodkin, 2005)، إذ إنهم يحتاجون أيضاً إلى تلبية أهدافهم التعلمية التي لا تتحقق بمجرد الوصول إلى الكفاية. وأن قدراتهم في حاجة إلى شحذ، ليس من أجل تطورهم الشخصي فحسب، بل من أجل مصلحة الأمة أيضاً.

وقد نشر المجلس الوطني الأمريكي لتعليم الرياضيات (The National Council of Teachers of Mathematics, Nctm) مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية (Principles and Standards For School Mathematics, 2000) التـي تحـدد الرياضيات التي على الطـلاب جميعـاً تعلّمها. وقد جرت العـادة على تحديد الطلاب ذوي القـدرات المتميزة في الرياضيات عن طريق الحصول على علامات عالية في الاختبارات المقننة. وفي هذا السياق يشير ستانلي (Stanely, 1976) إلى عدم ملاءمة كثير من هذه الاختبارات؛ لأن الاختبارات التـي تستند إلـى العمر أو مستوى المرحلة ليس لها سقـف كاف لاستيعاب الطلاب النابغين جدّاً. لذا، فإن الاختبار الملائم لتحديد الاستعداد للتسريع، سوف يوفر للطلاب أداة لإظهار قدراتهـم فـي البرهنة والتواصـل رياضيّاً على مستويـات عالية جدّاً. ولتحقيـق هذه الغاية، طُوّر **اختبار القدرات الرياضـية للطـلاب النابغيـن** (Test of Mathematical Abilities For Gifted Students, Tomags) آخـذاً في الحسبـان معايير المجلس الأمريكي لمعلمي

الرياضيات، وسمات الطلاب النابغين في الرياضيات، كما حددها كثير من الباحثين. وفيما يأتي قائمة تحتوي على طيف واسع من سمات الأطفال النابغين في الرياضيات، بسبب ارتباطها بهذه الدراسة. وهذه السمات، هي (Ryser & Johnsen, 1998):

- امتلاك القدرة على فهم المسائل والأسئلة وخطوات الحل وصياغتها بطريقة عفوية.
- القدرة على التمييز بين المعلومات المتصلة بمهام حل المسألة الجديدة وغير المتصلة.
- القدرة على رؤية الأنماط والعلاقات الرياضية.
- امتلاك المزيد من الإستراتيجيات الإبداعية لحل المسائل.
- مرونة أكثر في تناول البيانات وتنظيمها.
- امتلاك القدرة على تقديم تفسيرات أصيلة.
- امتلاك القدرة على تحويل الأفكار التي جرى تعميمها على المواقف الرياضية.
- حب الفضول على نحوٍ كبير بخصوص المعلومات العددية.
- امتلاك القدرة على تعلم الأفكار الرياضية وفهمها فهماً سريعاً، والقدرة على التفكير التأملي، واستنفاد وقت طويل في حل المسائل المعقدة أو المسائل ذات الحلول المتعددة.
- المثابرة على محاولة التوصل لحل المسألة.
- إبداء السرعة والمرونة في استخدام مهارات ما وراء المعرفة.

وبطبيعة الحال، فإنه لا يتوقع من أي طفل يُعرّف أنه متفوق في الرياضيات امتلاك هذه السمات كلها. ومع ذلك، فمن الممكن عند تحديد هذه السمات، اتخاذها معايير لتحديد الأطفال المتقدمين رياضياً. ويمكن أن تفتح هذه السمات أيضاً نافذة على عمل الأطفال الذين قد لا يُصنّفون أنهم متفوقون بالضرورة، حيث إن إظهار هذه السمات في أثناء أداء المهام الرياضية يُظهر المستوى العالي للتحصيل الممكن لكثير من الأطفال. وفي معرض استعراض السمات، يبدو جليّاً أن التركيز ينصب على الاستدلال، وحل المسائل أكثر من

المهـارات الحسابية، وهذا يتفق مـع معايير المجلس الوطني لمعلمـي الرياضيات للأطفال جميعاً (Nctm, 2000).

ومـن أجل توسيع نطـاق دراسة التحصيل فـي الرياضيات، أُجريـت مراجعات لبعض الدراسـات المتوافـرة ذات الصلة بالمجـال الوجداني والأداء الرياضـي. يشير الوجدان - كمـا هو مشار إليه هنـا - إلى التركيبة المعقدة للاستجابات العاطفيـة والمشاعر والدافعية والمواقـف والمعتقدات والقيم التي تتفاعـل جميعها مع المعرفة. وعلينا هنا ملاحظة الفرق بيـن الوجدان القوي رياضيّاً (Mathematically Powerful Affect)، والوجدان الإيجابي رياضيّـاً (Mathematically Positive Affect)، إذ يشيـر الأول إلـى القـدرة علـى أداء الرياضيات على نحوٍ قوي، ويُعدُّ هذا سمة من سمات النضج المبكر في الرياضيات. ويشتمل هـذا النوع مـن الوجدان علـى كل من الشعـور الإيجابي تجـاه الرياضيات (مثـل، الفضول والمتعـة والغبطة فيمـا يتصل بالبصيرة الرياضيـة والفخر والرضا)، والشعـور المتردد أو السلبـي (مثل، الانزعاج والقلق والاضطراب والخوف). عندما يمتلك المرء وجداناً رياضيّاً قويّـاً، فإن الشعور السلبي المرتبط بالرياضيات يحدث في سياق آمن، وبذلك يكون الطلاب قادريـن علـى إدارة هذه المشاعر والإفادة منها. وهكذا، فـإن الإحباط الذي يلازم المسألة الصعبـة يقـود نحو توقع تعلم شيء جديـد، ويزيد من الفخر بالإنجاز عنـد التوصل إلى حل للمسألـة. ويـؤدي امتلاك الطلاب للوجدان القـوي رياضيّاً إلى دعم قدرتهـم على المثابرة فـي التوصـل إلـى حـل للمسألـة (Ashley, 1973; House, 1987)، والتأمل فـي التفكير، واستغـراق وقت أطول عند حل المسائل المعقـدة أو ذات الحلول المتعددة، وهذه كلها تحدد سمات الطلاب النابغين في الرياضيات وخصائصهم. وبناءً عليه، إذا كان بوسعنا مساعدة الطـلاب على تطوير وجدان قوي رياضيّاً، فسيترتب على ذلك إظهارهم سمات أداء متقدمة في الرياضيات.

يشيـر كوفمـان وبايـر (Kaufman & Baer, 2004) فـي دراستهما، إلـى أن الطلاب عنـد تقويم إبداعهـم الشخصي، عبروا عن اتسـاق مستوى الإبداع بيـن المجالات جميعها باستثنـاء الرياضيـات. وعلى نحـوٍ مماثل، يشير جولـدن (Goldin, 2004) إلـى أنه يُنظر

إلــى الرياضيات تقليديّــاً بصفتها عقلية منطقية تحليلية، ومن ثــم، فإنها تحول بين الأفراد المتضلّعيــن من المجال والمتمكنين فيه، وإضفاء مكونات عاطفية على ما ينجزونه. وإذا ما نظرنــا إلــى سمات الطلاب النابغين في الرياضيات آنفة الذكــر، فمن الواضح أن المكونات العاطفيــة تؤدي دوراً في الأداء المتقدم في الرياضيات عوضاً عن المهارات الإجرائية. وفي الحقيقة أن امتــلاك إستراتيجيات أكثر إبداعاً لحل المسائل يُعدُّ سمة من سمات التحصيل العالي في الرياضيات.

تأتــي عمليــة التمكيــن لبنــاء الأفــكار الرياضيــة ممــا أطلق عليــه مصطلــح التجميع (Assembly) أو إيجــاد تمثيــلات من لبنات البنى المعرفية. عندمــا يشعر الأطفال بملكية الفكــرة، فإنــه يمكنهم تكويــن تراكيب جديدة، مــن خلال البنــاء على الخبــرات السابقة، حيــث يوجدون نماذج تَمثُّــل (Assimilation Paradigms) أو مجــازات داخليةInternal Metaphors. تسهــم كثير من الظروف الصفية في إيجاد البيئة الملائمة لكل ذلك. مثلاً، يحتــاج الطلاب إلى وقت كافٍ ليغوصوا في المسألة، وعــدم الخوف من القيام بالمخاطرة. دافــع ديفــز (Davis, 1997) عــن بيئة تعلمية بديلــة لتعليم الرياضيات تعــزز الروابط بين التمثيلات في عقل كلٍّ من المعلم والطالب، وقال: «إذا ما طلبنا إلى الطلاب أن يفكروا، فإنه يتعين علينا أن نأخذ أفكارهم بمنتهى الجد.» (Davis, 1992, P. 349).

ويلاحــظ في كثير من المواقف البحثية، توافر البيئــات التي تمكّن الطلاب من إظهار المهــارة الرياضية. وقــد أعاد الباحثون تكــرار كثير من الدراسات علــى بيئات البحث هذه فــي الصفوف العاديــة، وتوصلوا إلى نتاجــات مماثلــة (Bulgar, 2003A; Bulgar Under Review; Bulgar, Schorr, & Warner, 2004).

وإضافــة إلى البيئات المواتيــة، ينبغي اختيار مهام ملائمة بهــدف مساعدة مزيد من الأطفال على تحقيق مستويات عالية من التعلم والتفكير الرياضي. وتُعدُّ مسألة الحفاظ على مستويــات عالية من الشروط أو المطالب المعرفية مــن الأمور الأساسية في اختيار المهام. وقد صنّف سميث، شتاين، هيننجسن، وسيلفر Smith, Stein, Henningsen And Silver

المهام إلى أربعة مستويات من حيث المطالب المعرفية، هي: الحفظ، والإجراءات دون روابط، والإجراءات بروابط، وحل الرياضيات.

تؤدي طبيعة الأسئلة التي يسألها المعلم، وإيجاد بيئات تمكين، واختيار مهام تتطلب مستوىً عالياً من المطالب المعرفية، دوراً كبيراً في مساعدة الطلاب على بناء أفكار رياضية لأنفسهم، وتولّي مسؤولية تعليم أنفسهم بأنفسهم. تقول جولي تاورز (J. Towers, 1998) إنه ينظر إلى المعلم في غرفة الصف التقليدية على أنه منفصل عن الطلاب، وأن التعلم والتعليم كيانان منفصلان. وتفحصت دراستها دور تدخلات المعلم في تطوير مستوى الفهم الرياضي لدى الطلاب. وقد صنف هاييرت وويرن (Hiebert & Wearne, 1993) الأسئلة التي يطرحها المعلمون إلى أربعة أنماط هرمية تحت المستويات التصاعدية المتطورة للتفكير الرياضي. وفي السياق نفسه، يرى دان، وبانتوزي وستينكن (Dann, Pantozzi, Steencken, 1995) أن أسئلة المعلم الملائمة تساعد على تعزيز الاستدلال والنقاش لدى الطلاب.

تحاول المؤلفة في هذا البحث دراسة عمل طفلة تدعى سارة، وهي حفيدتها التي كانت قد شاركت في أنشطة رياضية على مستويات غير رسمية منذ نعومة أظفارها، ومن ثم قياس النتائج وفقاً لمعايير الموهبة الرياضي. وهدفت هذه الدراسة إلى إظهار ذلك، حيث إن سارة قد منحت فرصة تجريب أنواع معينة من المهام في بيئات محددة جدّاً، وتمكنت من التميز وإظهار سمات مرتبطة بالموهبة في الرياضيات، إضافة إلى تجريب الوجدان القوي رياضيّاً. بدأت هذه التجارب في سن مبكرة، وكانت فرضية المؤلفة أنه إذا ما أتيحت فرص مشابهة للأطفال جميعاً، فسوف ينجح كثير منهم في الرياضيات نجاحاً باهراً. ويُعدُّ هذا مهمّاً بسبب الحاجة إلى تطوير الموهبة الرياضية بصفتها مسؤولية تجاه الأفراد، وتطوير الأصول الفكرية لمصلحة الأمة.

المنهجية

يستند هذا البحث إلى البيانات الوصفية والعمل الحقيقي المكتوب لطفلة واحدة هي سارة. وقد جرى تعميم الأفكار المتعلقة بكيفية إثارة أداء من مستوى عالٍ مماثلٍ لدى

كثيــر من الأطفال من خلال تفحص دقيق للبيانات. لم تكـن لدى الباحثة نية في أثناء جمع البيانــات لاستخدامها لأغراض البحث باستثناء البحث الذي أُجري على آيس كريم (بوظة) صنداي (Ice Cream Sundaes). نُفّذ العمل بصفته نشاطاً مشتركاً بين الجدة وحفيدتها. ويشتمـل تحليل البيانات علـى مقارنة سمات الطفلـة بسمات الموهبة فـي الرياضيات التي حددهــا كثير من الباحثين، وأُشير إليها في الإطــار النظري، بحيث تعد هذه السمات نقاطاً مرجعية للقدرات الرياضية، وقد أضيف وصف مكان كل رواية قصيرة وظروفها إلى الوصف الخاص بها بسبب التنوع بين الأمكنة والظروف.

تتكـون عينــة دراسة الحالة هذه مـن الطفلة ســارة (Sarah) فقط، وهـي طفلة ذات جـذور عائلية قوية تستمتع بعمل المهام الرياضية لا سيمــا مع جدتها (مؤلفة هذا البحث)، التــي تُدرِّس الرياضيــات في جامعة محلية. كانت سارة ترتبط بعلاقة حميمة مع جدتها منذ ولادتهــا، واستمــرت هذه العلاقة على نحـوٍ ممتاز بعد تجربة الرياضيــات. يضاف إلى ذلك أنها رياضية أيضاً حيث كانت سبّاحة متميزة واجتماعية، ولديها كثير من الأصدقاء، وكانت تعزف على البيانو، إضافة إلى تميزها في المواد الدراسية جميعها. والتحقت بمدرسة دينية خاصــة حيث كانت تكرس نصــف يومها فقط للدراسات غير الدينيــة، وكانت تعيش في حي مجاور للطبقة الوسطى.

تستخــدم مدرسة سارة سلسلة كتب الرياضيــات المدرسية (The Scott Foresman Math Textbook Series) التــي تُعدُّ سلسلة غير تقليديــة. واختيرت تلك السلسلة في عام 2005 للمشاركة في تقويم مناهج الرياضيات المبكرة الذي تجريه وزارة التربية في الولايات المتحــدة. وهــذا التقويــم يُعد دراسة علــى نطاق واسع تهــدف إلى تحديد فاعليــة كثير من البرامج الرياضية الواعدة في تحسين تحصيل الرياضيات في الصفوف الدراسية المبكرة. وكانــت نتائج سارة في اختبارات الرياضيات الصفية جيدة، وحصلت على علامات مناسبة في اختبارات الرياضيات المقننة، ولكن ليس بمستوى العلامات نفسه الذي حصلت عليه في اختبــارات القراءة المقننة، ولم تكن علاماتها في اختبارات الرياضيات المقننة رائعة. ولم يكن في مدرستها برنامج للموهوبين، ولم تتلق دروساً إضافية تتحدى قدرتها في الرياضيات

وتشجعها. تقول سارة إن الرياضيات موضوعها المفضل، وأنها تستمتع بالحساب إضافة إلى أنشطة حل المسائل.

يتبع هذا البحث بعض الأنشطة الرياضية التي شاركت فيها سارة على مدار سنوات عدة. ومن الجدير بالذكر أن سارة كانت تبلغ من العمر ثماني سنوات وتسعة شهور عند كتابة هذا البحث.

النتائج ومناقشتها

الخبرة الأولى المُلاحَظة التي تشير إلى التفكير الرياضي المتقدم

لمّا كانت سارة قد أمضت وقتاً طويلاً مع جدتها التي كانت مُدرِّسة لمادة الرياضيات، فقد شاركت في ألعاب العدّ (Counting Games) والحديث عن الأعداد منذ نعومة أظفارها. وقد لوحظ نضجها المبكر في الرياضيات أول مرة في صيف عام 1999، عندما كان عمرها سنتين وثمانية شهور تقريباً. وكانت يومئذٍ، بصحبة جدتها في السيارة في طريقهما لزيارة ابنتيّ عمها اللتين تبعدان عنهما مسافة تستغرق ساعة بالسيارة، وكانت إحداهما تكبرها بعشرة شهور، في حين كانت تصغرها الأخرى بعشرة شهور. ونظراً إلى أنها كانت طفلةً فصيحةً، فقد واصلت الحديث إلى جدتها طوال الرحلة. وفي أثناء الحديث، أشارت جدتها إلى أنها قد أحضرت معها مِرشّة بثماني أذرع تشبه الأخطبوط. وأعقب ذلك نقاش عن الأخطبوط المصنوع من شيء مثمّن الزوايا والأضلاع. وفجأة، سكتت سارة، وقد لاحظت جدتها من خلال مرآة السيارة أنها كانت تعمل شيئاً ما بأصابعها. وعندما سألتها جدتها عما تفعله، أجابت قائلة: «أنا أفكر»، ثم طلبت إليها أن تشاركها في تفكيرها عندما تنتهي منه. أشارت إلى أنه إذا كان للأخطبوط ثمانية «خراطيم»، فإن بوسع ابنتيّ عمها سامانثا (Samantha) وأوليفيا (Olivia) أن تحصلا على خرطوم لكل واحدة منهما، وبذلك يظل لدينا متسع لخمسة أصدقاء آخرين، بحيث يكون لكل واحد منهم خرطوم. وعلى هذا، فإن سارة وجدت حلاًّ للمسألة باستخدام عملية الطرح وعلاقة واحد لواحد، أي خرطوم واحد لكل طفل، وهكذا، أظهرت معرفة بالقدرة على رؤية العلاقات والأنماط الرياضية. وتعد هذه القدرات من سمات الموهبة في الرياضيات. ويشير هذا الحدث

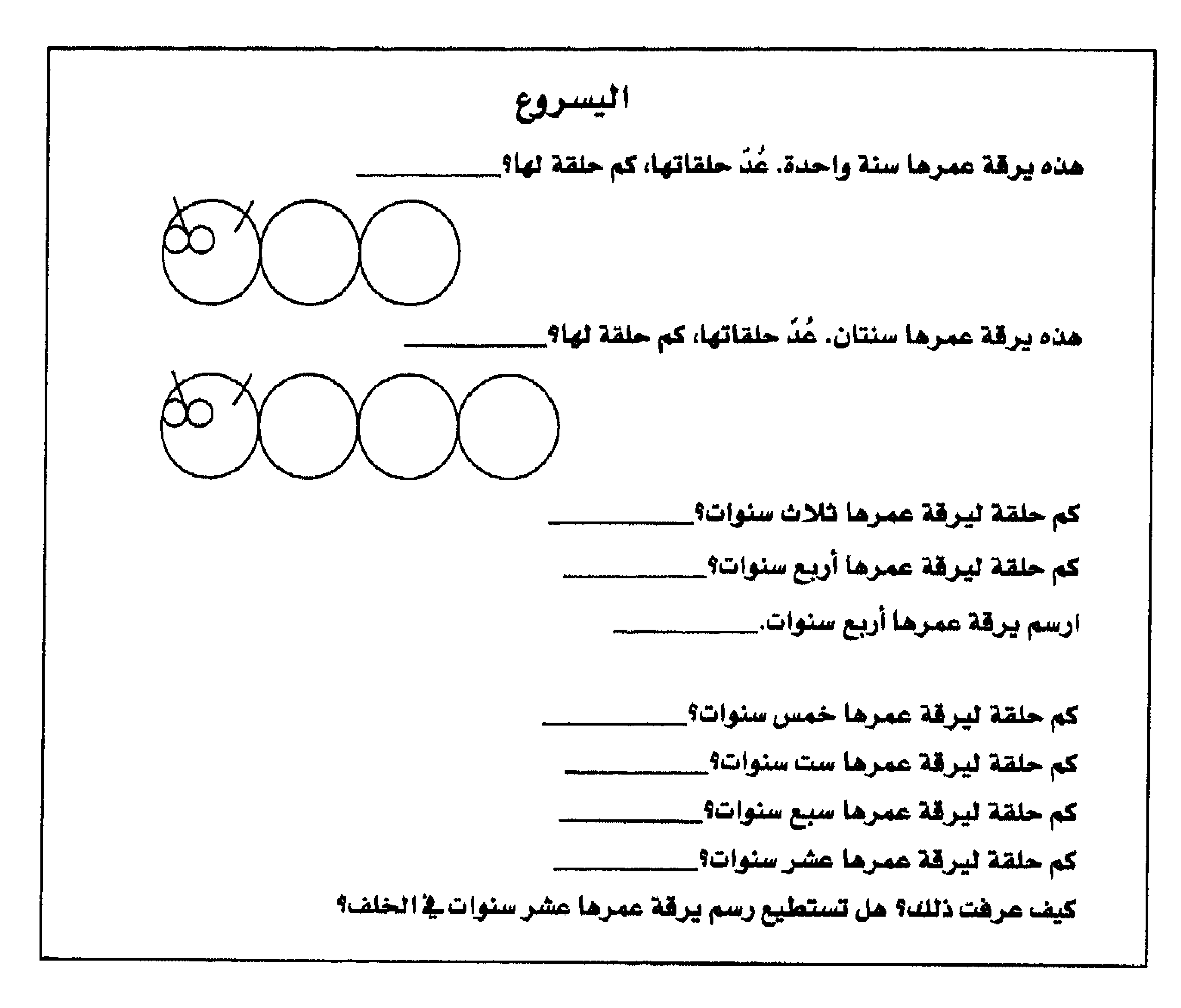
أيضاً إلى الاهتمـام والفضول بالمعلومات العددية. لقد أخذت حقيقة رياضية (مِرشّة الماء الأخطبوطية لهـا ثمانية خراطيم)، ولم تكتفِ بتوزيع الخراطيم عليها وعلى ابنتيّ عمها، بل حسبـت عدد ما تبقى من الخراطيم. ويُعـدُّ هذا عملاً رياضيّاً فذّاً بالنسبة إلى طفلة صغيرة جدّاً. وأن الفضول الذي قادها نحو إيجاد مسألة والتفكير في كيفية حلها هو أيضاً دليل على الموهبة (Cruikshank & Sheffield, 1992; Miller, 1990).

اليسروع (اليرقات) (Caterpillars)

تابعـت الباحثة فـي معرض إعدادهـا لتدريس أساليـب الرياضيات لأحـد الصفوف، كثيـراً من الأنشطة الرياضية التي ستستخدمها مـع طلابها، وفيها نشاط وجدته على شبكة الاتصـالات (Rotz & Burns, 2002)، ولكنهـا أجرت تعديلاً طفيفاً عليه بهدف استخدامه في صفوفها. صُمّمت المسألة لاستخدامها مع طلاب الصف الأول الأساسي، الذين عادة ما تكون أعمارهم ست سنوات. وفي محاولة لمعرفة كيف سيتلقى الصغار تلك التعديلات، فقد عُرضت المسألة على سارة في الثاني من ديسمبر عام 2002 عندما كان عمرها أربع سنوات وأحد عشر شهراً (الشكل 6 :1).

يشتمـل تصميم المهمـة على زيادة الصعوبـة تصاعديّاً مع تقدم المـرء في المسألة. وتهـدف المسألة على نحـو أساسي، إلى استخلاص علاقة بين عـدد حلقات جسم اليسروع وعمـره. ويمكن لهذه المسألـة أن تكشف بصورة واضحة معالم التفكيـر في هذا الموضوع. وفـي حلها هـذه المسألة، يمكـن أن تضيف دائرة عنـد إضافة سنة واحدة مـن العمر، وفي كثيـر مـن المواقـف التي لوحظـت، كانت تلك هـي الطريقة التي بـدأ بها الطـلاب عموماً. وعلـى أي حـال، عندما تقفز المسألة من يرقـة عمرها سبع سنوات إلـى يرقة عمرها عشر سنـوات، تبـرز إستراتيجيات حلول مختلفة. فقـد يواصل الطفل العمليـة الحسابية بإضافة سنـة واحـدة من العمر كل مـرة، ومن ثم يضيف حلقـة واحدة كل مرة. ويشتمـل النظر إلى المسألـة من ناحيـة هندسية على الاستدلال الجبري وهو أكثر الطـرق تعقيداً لإيجاد الحل. وتعنـي هـذه في جوهرهـا أن الطالب يبحـث عن علاقة بين عـدد الحلقات، وعـدد سنوات العمـر بدلاً من مجـرد إضافة حلقة واحدة لكل سنـة من العمر. ووفقاً لـرأي جيمس كابوت

(James Kaput, 1998)، الـذي يعـد مرجعاً فـي الاستدلال الجبري، فـإن هذا الاستدلال يتألف من التمثيل والتعميم وتشكيل الأنماط والانتظام.



شكل 6: 1 مهمة اليرقات

من الأهمية بمكان عند إعطاء هذه المسألة للحل، أن يلاحظ المعلم ما يقوم به الطفل عـن كثب، وتوجيـه الأسئلة بدقة لتعـرّف الطريقة التي يستخدمها في التعامـل مع المسألة. عندمـا أتمت سارة الجزء الأخير من المهمة، وتوصلـت إلى الإجابة بحيث يكون لليرقة التي يبلـغ عمرهـا عشر سنـوات اثنتا عشرة حلقـة، سألتهـا الباحثة: كيف عرفـت ذلك؟ وكانت إجابتها، وهي مسجلة على ورقة العمل، «لأنها عشر، إحدى عشرة، اثنتا عشرة». لم تشر إلى الأعمـار المتقطعة بين سن السابعة والعاشرة. فهـي تعُد أو تضيف اثنين إلى العمر، عشرة، وبذلـك تطبق الاستدلال الجبري. وتظهر سارة وتطبق تفكيراً رياضيّاً متقدماً بطرق متعددة فـي هذا المقام. فهي تعمـم الأفكار؛ وتفهم وتدرك أهمية العلاقـة بين عدد الحلقات وعمر اليرقة، إضافة إلى أنها تلاحظ وتدرك الأنماط والعلاقات الرياضية.

أنماط الأسرة

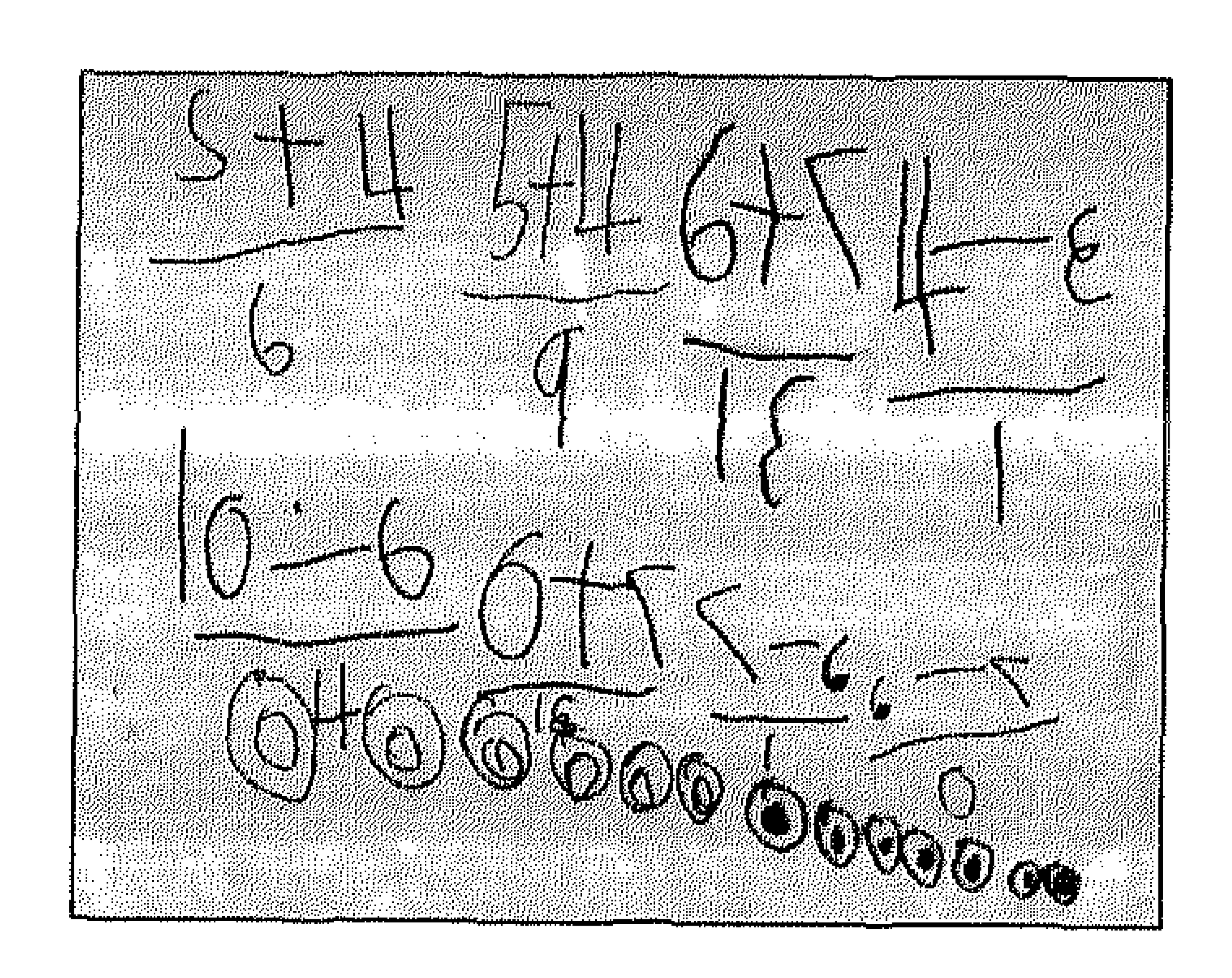
تظهر سارة غالباً اهتماماً بالحساب. فهي ترى مثلاً أنماطاً في عائلة ابنة عمها الأولى، بعضهـا واضح وبعضها الآخر غامض، وبعد مدة وجيزة من ولادة أخيها الأصغر عام 2003، عندمـا كانت سارة ابنـة خمس سنوات ونصف، بدأت بابتداع «أنمـاط أسرية». وفي معرض مقارنتهـا بيـن الأطفال في عائلتها مع ابنة عمها الأولى، أدركت أن النمط الآتي: بنت- ولد- ولد ينطبق على الجهتين. ومع ذلك، فإن ابنتي خالتها تقعان ضمن النمط الآتي: بنت- بنت- ولـد. أفادت سـارة أن ابنتي الخالة هاتين لا تقعان ضمن نمـط عائلتها نفسه، ولكن بوسعها ابتـداع نمط ينطبق علـى كلتا العائلتين. فرتبت بنات العائلـة الست بحسب العمر، ولاحظت أنه من خلال ذلك يتناوب الأطفال بين العائلات مكوّنين نمطاً مختلفاً، ولكنه مع ذلك نمط. أي، إذا كان S يرمز إلى طفل من عائلة سارة، و M يرمز إلى طفل من عائلة خالتها، فعندئذٍ تصـف سارة النمط الآتـي: M-S-M-S-M-S. ويبدو من خلال ذلـك أن سارة تبحث عن أنمـاط، إذ من الواضح أنها تظهر ميلاً نحو الرياضيـات، بإظهارها سمات محددة للموهبة فـي الرياضيات. وهنا يبـدو أنها فضولية جدّاً فيما يخص المعلومـات العددية، وأنها تبحث عـن أنمـاط وعلاقات. إضافة إلى ذلك، فإن مثابرتها فـي التوصل إلى النمط الثاني جديرة بالملاحظة، وأظهرت مستوى عالياً من الارتياح في عملية تنظيم البيانات.

الماصات والإشارات الرمزية

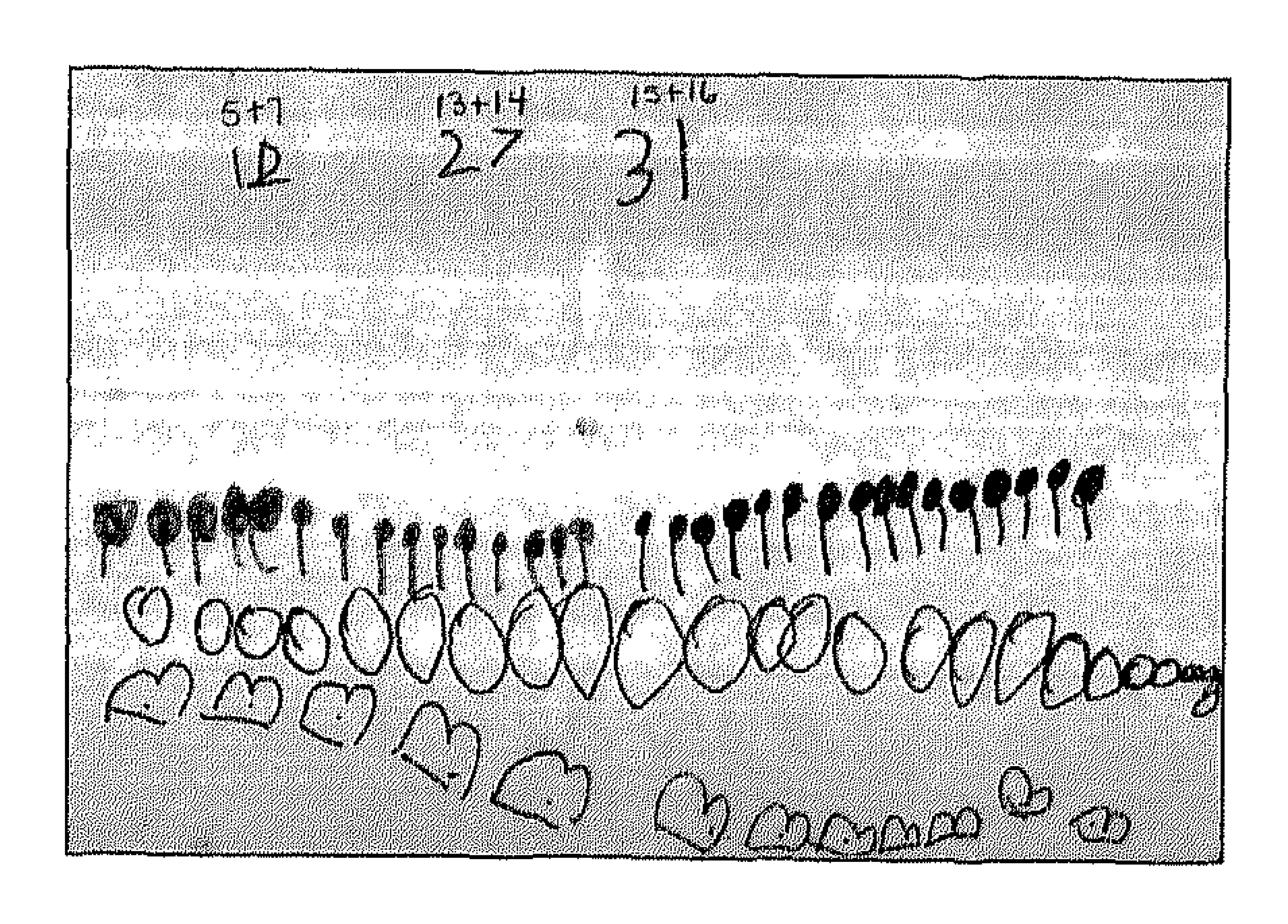
عندمـا كانت سارة في الروضة وهي ابنة خمس سنـوات وخمسة شهور، رافقت جدتها إلـى العمـل حيث حضرتا اجتماعات غير رسمية. كانت تجلس بـإزاء طاولة في زاوية الغرفة مـزودة بالـورق وأقـلام التخطيط؛ لأنها قالـت إنها ستلوّن فـي أثناء الاجتمـاع. وبعد ذلك، تبيـن أنها كانت «تقوم بعمليات رياضية». لقد ابتدعت مسائل جمع وطرح بسيطة باستخدام الإشـارات الرمزية، وعبّرت عن المسائل على صورة كسور، في حين كوّنت الحلول المقامات (الشكل6 :2).

وعقب انتهاء الاجتماع، نظرت جدة سارة ومدرسة رياضيات جامعية أخرى إلى ما عملته سارة، فدُهشتا ليس بسبب تقدمها في عملها فحسب، بل كونها قد عملت ذلك بمفردها. وقد

لوحـظ أن بعض الأعداد كانت معكوسة وهو أمر طبيعي بالنسبة إلى هذا العمر، لكن الحلول جميعهـا كانت صحيحة باستثناء حل واحد فقـط. حيث كتبت سارة 0=7-6 مباشرة بعد أن كتبـت 1=6-7. وسئلـت عن الأسئلـة السابقة، وطُلب إليها تفسير كيـف عرفت أن الإجابات كانـت صحيحـة. فأشارت إلى أن 0=7-6 ليسـت إجابة صحيحة. حيث قالـت إنها يجب أن تكون أقل من صفر، لكنها لم تكن تعرف كيف ستعبر عن ذلك كتابة. وبعد مزيد من الأسئلة تمكنـت مـن القـول، إن الجواب أقل مـن صفر بواحد. وتعـدُّ مفاهيم الأعـداد التي تقل عن صفـر متقدمة جـدّاً بالنسبة إلى طفلة عمرهـا خمس سنوات. فقيل لهـا عندئذٍ: «يوجد في الرياضيـات مسمّى خاص بالعدد واحد دون الصفر، يُطلق عليه سالب واحد» وبناءً على هذه اللغة، فقد أصبح بمقدورها أن تميز ما يعنيه العدد سالب اثنين. وهنا تُظهر سارة مرة أخرى مستوى عالياً من التحصيل الرياضي بمقدرتها العفوية على صياغة المسائل وخطوات حلها، عن طريق تقديم تفسيرات أصيلة وقدرتها على تعلم الأفكار الرياضية وفهمها بسرعة. وعند انتهائها من حل المسائل التي كتبتها ومناقشتها، طلبت سارة إعطاءها مسائل أكثر صعوبة، (انظر شكل 3:6)، فأُعطيت مسألة 7+ لحلها، ففعلت ذلك



شكل 2:6 مسائل الجمع والطرح باستخدام الإشارات الرمزية الذي دعته سارة «العمل في الرياضيات»



شكل 6،3 حل سارة للمسائل الأكثر صعوبة التي طلبتها

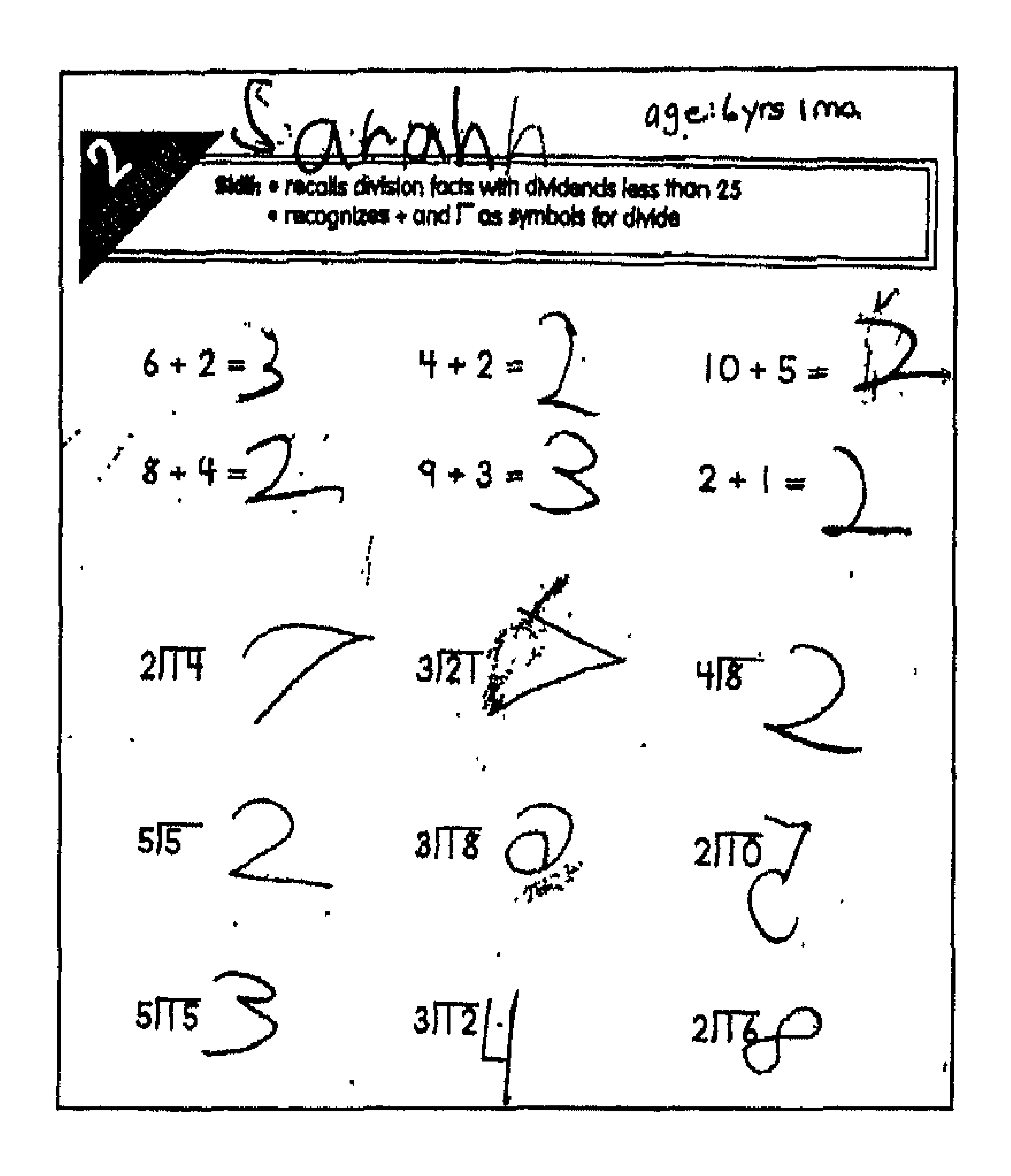
بمنتهى السهولة، وقالت إنها تريد مسألة أكثر صعوبة ذات أعداد أكبر. ثم بعد ذلك أعطيت مسائل الجمع الآتية: 14+13 و 16+15. فابتدعت تمثيلاً لكل مسألة على حدة لمساعدتها على العد، مستخدمة قلوباً، ودوائر وماصات وقصبات كل منها ذات لونين على التوالي كي تمثل عمليات الجمع. ويشير استخدامها لمثل هذه التمثيلات إلى أنها تفهم معنى الجمع بصفته إضافة أجزاء منفصلة.

يتعلم كثير من الأطفال الجمع بالعد كما تفعل سارة. ومع ذلك، فقد رأينا نقطة بداخل كل قلب كما بداخل كل ماصّة، مشيرة إلى أنها عندما تربط الإضافتين لا تقوم بمجرد العد حتى العدد الأصلي بل يجب عليها عد المواد جميعها مبتدئة من العدد واحد. وهذا يُعدُّ من الناحية التطورية أمراً شائعاً مألوفاً، وقد مكّن سارة من التعامل مع أعداد أكبر من هذه.

اكتشاف القسمة

عندما كان عمر سارة ست سنوات وشهراً واحداً، كانت تمضي بعض الوقت مع جدتها، وتأخذ بتقليب دفاتر جدتها في مكتبها، فرأت صفحة كُتب عليها حقائق قسمة أساسية مستخدمة الرمزين المألوفين للقسمة، وهما: ÷ و/، ونظراً إلى أن سارة لم تر هذين الرمزين من قبل، فقد سألت جدتها عنهما فأجابتها أنهما رمزان للقسمة. وعندما سألت سارة عما تعنيه القسمة، أجابتها جدتها قائلة: إنها تشتمل على إيجاد كيف يمكننا تقسيم شيء واحد على شيء آخر، وأُعطيت مثالاً واقعيّاً على النحو الآتي: «إذا كان لديّ ست قطع

مــن الحلــوى وأردت توزيعهــا بالتسـاوي على ثلاثــة أشخاص، فكم قطعة سيكـون نصيب كل شخص؟» أرادت سارة حل صفحة حقائق القسمة (انظر شكل 4:6)



الشكل 4،6 تجربة سارة الأولى مع القسمة

بــدأت سارة العمــل على الصفحــة، وأُعطيت مكعبــات ملونة لتزودها بسيــاق ملموس للأمثلة على الصفحة، فرفضتها وحلت المسائل جميعها باستخدام الإشارات الرمزية فقط. وكانــت إجاباتها كلها صحيحــة إلا واحدة. وتوثق هذه الحكاية مرة أخــرى براعتها الفائقة، فقد أظهرت فضولها فيما يخص المعلومات العددية، وتعلمت أفكاراً رياضية جديدة بسرعة.

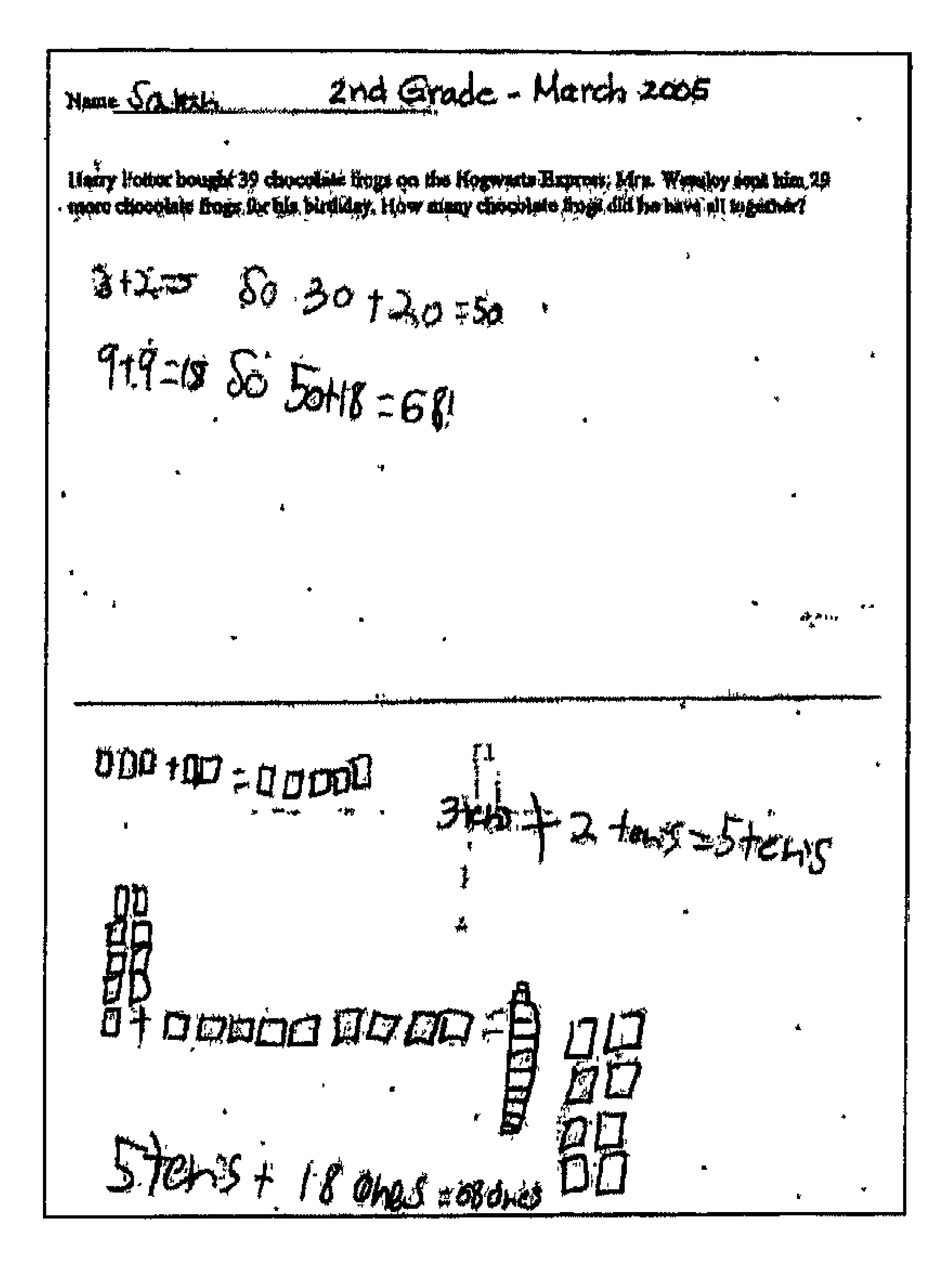
ضفادع الشوكولاته لهاري بوتر

حضــرت الباحثــة وطلابهــا الجامعيــون ورشة عمل فــي ربيع عام 2005 عــن دمج حل المسائل في منهاج قائم على استخدام الكتاب المدرسي. في ورشة العمل هذه، ربط المنسّق إحــدى المسائل بعدد قليل من صفحات كتاب الصــف الثالث الأساسي، وكانت المسألة على النحــو الآتي: اشترى هاري بوتر (Harry Potter) تسعة وثلاثين ضفدع شوكولاته، وأرسلت

إليــه السيدة ويسلي (Weasley) تسعة وعشرين ضفدعاً آخر مــن الشوكولاته بمناسبة عيد ميلاده. فكم عدد ضفادع الشوكولاته التي أصبحت لديه؟

يوجد خط أفقي عند منتصف الصفحة، وطلب إلى الطلاب حل المسألة الموجودة فوق الخط. وعند الانتهاء من الحل، طُلب إليهم أن يحلّوها تحت الخط باستخدام طريقة أخرى.

ونظــراً إلى اعتقاد الباحثة أن سارة سوف تستمتــع بمثل هذا الأمر، أُعطيت نسخة من المسألــة والتعليمــات نفسهــا عندما كانت في الصــف الثاني الأساســي، وكان عمرها سبعة أعوام وأربعة شهور (انظر شكل 5:6).



شكل 5:6 ضفادع الشوكولاته

أشتمل حل سارة الأول على إشارات رمزية، حيث عللت ذلك بقولها: لمّا كانت 5=2+3، فــإذن: 50=20+30. وعلــى الرغم من أنها كانت لا تزال فــي الصف الثاني، فإنها كما يبدو كانت تفهم عناصر القيمة المنزلية، واستخدمت هذه المعرفة في حل المسألة. وأما في حلها

الثانـي تحـت الخط، فقد حلّت المسألـة باستخدام التمثيل الذي ربطتـه بوضوح بالإشارات الرمزيـة. وهكذا، فـإن سارة قادرة على التحـرك بمرونة بين الحلين وعلـى الربط بينهما، حيث إن حل المسألة يتطلب خطوات كثيرة، وهذه الأمور تعد من سمات النبوغ الرياضي.

بوظة الآيس كريم

مـن أجـل الإبقاء على حداثـة نتائج هذه الدراسـة، كُلّفت سارة بمهمة فـي أثناء كتابة هذا البحث. وقد أُطلق على المهمة التي وقع عليها الاختيار «بوظة الآيس كريم»، وكانت على النحو الآتي:

أنـتِ موجودة في متجر لبيع الآيس كريم، حيـث تعملين الآيس كريم بنفسك. وبوسعك أن تختاري ما تريدين مما يأتي:

- آيس كريم بالشوكولاته
- آيس كريم بالفراولة
- قشدة مخفوقة
- حلوى ساخنة
- كرز

بكم طريقة يمكنك أن تحضّري الآيس كريم؟

لجـأت الباحثـة إلى تبسيط هـذه المسألة مـرات كثيرة لطلاب المرحلتيـن الابتدائية والجامعيـة. وقـد بـرزت أنماط معينـة في الحـل، حيث عمد الطـلاب الصغار إلـى ابتداع تركيبـات عشوائية، إذ غالباً ما كانوا يكررون المكوّنات ويحذفون كثيراً منها. وتوصل معظم طـلاب المرحلة الجامعية في نهاية المطاف إلى الحل: أربعـة وعشرين، بطرق متعددة مثل استخـدام التنظيم بحسب الحالـة والاستقراء والقائمة العشوائية. مـن المألوف أن يحذف طلاب المرحلة الجامعية في البداية الحالات التي يُختار فيها الآيس كريم وحده.

حلت سارة هذه المهمة في الثاني من أغسطس من عام 2006، وسط الضجيج والإزعاج اللذيـن نجما عن وجود أخويهـا وقريباتها الثلاث. وكل ما كان يقلقهـا أن يساعدها من هم

أكبـر منها سناً. وكان عمرها آنـذاك ثماني سنوات وثمانية أشهر. فقـرأت المسألة بنفسها وأُعطيـت أقـلام تخطيط وورقة. وكان السـؤال الذي سألته هو: هل يُسمـح لها بأن تستخدم الحـروف في الدلالة على الكلمات (المختصرات)، بحيـث لا تكتب كل كلمة في كل مرة. ثم استخدمت المختصرات الآتية في عملها (أول حروف الكلمات باللغة الإنجليزية)، باستثناء كلمة كرز فقد اختارت كتابتها كاملة.

- C.I.C = آيس كريم بالشوكولاته
- S.I.C. = آيس كريم بالفراولة
- H.F. = حلوى ساخنة
- W.C. = قشدة مخفوقة

بـدأت سارة بقوائـم عشوائية، وسألت على نحـو سريع جدّاً، هل بوسعهـا أن تبدأ مرة أخـرى. وعندمـا سُئلت لماذا، أشارت إلى عـدم القدرة على تمييز ما كتبتـه. ويبدو أنها قد لاحظـت نقاط الضعف فـي القوائم العشوائية. عندئـذٍ، قسمت الورقـة برسم خط عمودي فـي المنتصف، وسبعة خطوط أفقية على عرض الورقة مكوّنـة شبكة تشتمل على ستة عشر مربعـاً. وكتبـت كل تركيب في مربع آخر فـي الشبكة مستخدمة مختصراتهـا، وكوّنت شبكة جديـدة على ورقـة أخرى عندما زادت التركيبـات لديها على ستة عشـر. وعملت بكل عناية وانتبـاه وتركيـز على الرغم مـن الضجيج المحيط بها إلى أن أتمت الحـل، وكانت واثقة من حلها، وهو إحدى وعشرون قطعة آيس كريم، حيث حذفت الخيارات ذات الآيس كريم وحده.

لـم تتـح الفرصة للقاء سارة وسؤالهـا عما قامت به إلا في اليـوم اللاحق. وكانت تتوق شوقـاً إلى الحديث عمـا توصلت إليه. وعندما سُئلت كيف توصلت إلـى الحلول، ولماذا كنت واثقـة من صحتها، أجابـت أنها بدأت بالحلوى التي تحتوي على كل شيء. ثم واصلت بحذف طبقـة إضافية واحدة في كل مـرة، حتى وصلت إلى مركبات تحتوي علـى نكهتين من الآيس كريم بطبقتين إضافيتين لكل واحدة. وبعد ذلك وضعت طبقة إضافية واحدة على كل واحدة مـن قطع الحلـوى الثلاث بنكهتي آيسـ كريم. ثم أعادت مـا فعلته بوضع طبقـة آيس كريم الشوكولاتـه وحـده، وأخيراً بآيس كريم الفراولـة وحده. لقد توصلت إلـى برهان معقد جدّاً

بحسب كل حالة، مع أنها حذفت حالة واحدة وهي الخالية من الطبقة الإضافية. واستخدمت كلمة مجموعات لتصف فيها الحالات مشيرة إلى أن تفكيرها يشتمل على هيكل تنظيمي. واستخدمت الحروف الأبجدية الكبيرة لمختصرات الإضافات والأحرف الصغيرة لنكهات الآيس كريم؛ لتنظم عملها على نحوٍ أفضل. فقسّمت حالاتها أو مجموعتها بحسب نكهة الآيس كريم، في حين استندت المجموعات الفرعية إلى عدد الإضافات، وهي بذلك تظهر قدرتها على تنظيم البيانات وإدارتها بطريقة متطورة جدّاً، وهذا يُعدُّ من سمات الإبداع في الرياضيات.

وعندما شرحت كيف توصلت إلى الحل، جرى الحوار الآتي بينها وبين الباحثة:

الباحثة: هل من شيء احتوى عليه كل واحد من أنواع الحلوى؟

الطالبة: الآيس كريم

الباحثة: هل من شيء آخر يجب أن تحويه كل قطعة حلوى؟

الطالبة: (ابتسامة عريضة) لا، فكرت فقط بمزيد من الحلوى.

ثم أضافت سارة عندئذٍ الحلوى الخالية من الطبقات الإضافية إلى مخططها.

الباحثة: فيمَ فكرت عندما ابتسمت؟

الطالبة: يمكن أن تكون قطعة الآيس كريم عادية، إذ عندما أذهب إلى بقالة آيس كريم أحصل على آيس كريم عادي.

الباحثة: ما علاقة هذا بالمسألة التي حللتِها؟

الطالبة: عرفت أنني لم أحصل على حلوى الآيس كريم كلها (بعد السؤال)، لذا، أضفت الآيس كريم العادي وآيس كريم الشوكولاته والفراولة إلى بعضها بعضاً دون إضافات.

الباحثة: إذاً، ما عدد حبات الآيس كريم التي حصلت عليها؟

الطالبة: أربع وعشرون.

النتائج والآثار

لقد وصفنا كثيراً من الأنشطة في هذا البحث قصصيّاً أو ببيانات داعمة موثقة. تظهر هــذه الأنشطة أعمال ســارة، وهي حفيدة مؤلفة هذا البحث، في سنــوات كثيرة من عمرها. وقــد بــدا واضحاً مــن تحليل هذه الأنشطة أن ســارة قد أظهرت كثيراً مــن سمات النبوغ في الرياضيــات. ويمكــن لهذه السمــات أن تتوافق مع سمات الموهبة كمــا عرَّفها عدد كبير من الباحثين.

يؤكــد تشيكزنتميهالي، راثوند، ووالين (Csikszentmihalyi, Rathunde, Halenh, 1997) أنــه بصرف النظر عن مستوى الموهبة لــدى المرء، فليس بمقدوره الأداء مثل عالم الرياضيــات ما لم يتعرضــ لخبرات تشتمل على مجال الرياضيــات. ويشير هذا البحث إلى اتساع هذا المفهوم بالإشارة إلى أن الطفل الذي لا يُعدُّ متفوقاً في الرياضيات يمكن أن يظهر أداء متميــزاً في الرياضيات تحت ظروف معيّنة. وقــد أتيحت الفرصة لسارة لتتعرض لكثير مــن المهام الرياضية الإثرائية ضمن سياقــات آمنة، ومرد ذلك أن جدتها التي كانت تسكن بالقــرب منهــا وكانت تستمتع بقضــاء الوقت معها، كانــت تدرس الرياضيــات في الجامعة. وعندمــا أخذت سارة تكبر شيئاً فشيئاً، بــدأت ببعض هذه الأنشطة بسبب وعيها للعمل الذي كانت تقوم به جدتها، ورغبتها في أن تطور علاقتها بها.

وإذا مــا نظرنــا إلى عمل سارة بضفادع الشوكولاته (شــكل 5:6)، فإننا نرى أنها كانت مرتاحة للتوصل إلى حلول تشتمل على إشارات رمزية (أعداد) أو تمثيلات تصويرية. وغالباً ما ترتبط القدرة على استخدام تمثيلات متنوعة للمفهوم نفسه بنمو التفكير الرياضي. وقد يلاحظ القارئ أن الحلول الأولية لسارة تشتمل على إشارات رمزية أو أعداد بدلاً من الصور واليدويــات أو الأشــكال الأخرى من الأدوات المحسوسة. ويمكــن الاستدلال على أن خبراتها السابقــة قد ساعدتهــا على تمثل الموقــف ذهنيّاً، وإيجــاد الروابط التي تقودهــا إلى حلول تستند إلى الرموز على نحوٍ كبير، وهذه تعدُّ واحدة من نماذج المعرفة المعمّمة، وكانت فقط تستحضر استخدامها التمثيلي للصور عندما يُطلب إليها إيجاد حل آخر.

إذا كان بمقدور سارة أن تظهر أحياناً بعض سمات الموهبة، فكيف يمكن تزويد الأطفال جميعهـم بفرصة لإظهار مستـوى عالٍ من التحصيل في الرياضيات؟ إضافة إلى ذلك، كيف يمكـن تقديم هذه الفرصـ داخل بيئة الصف العادي؟ يستطيع المـرء أن يستدل من البحث على أن هناك ثلاثة عوامل في الأقل، تسهم في تطوير مستويات عالية من التفكير الرياضي والوجدان الرياضي القوي لدى كثير من الأطفال. وهذه العوامل الثلاثة، هي: تصميم البيئة الملائمــة، واختيــار المهام الملائمة، وتدخــلات المعلمين الملائمة. ولكــي نستطيع تطوير شعـور رياضــي قوي، علينــا بتوفير سياقات آمنــة. يحتاج الطلاب إلى تطويـر التمكين فيما يتصل بالرياضيات، ويلاحظ وجود هذه البيئات في غرف الصف العادية. كانت سارة تشعر بالأمن وهي تؤدي المهام الرياضية آنفة الذكر، وهذا ما شجعها على المخاطرة وإعادة بناء تفكيرها، والبدء من جديد عند الضرورة تماماً كما فعلت مع مسألة بوظة الآيس كريم.

تظهـر المهام جميعها المعطاة لسارة التي نوقشـت آنفاً، على أنها أمثلة للأنشطة التي تستدعـي امتلاك الطـلاب مهارات معرفية عالية. ولم تُحـل المسائل بمجرد جواب عددي، بـل تطلّب الحل تبريراً وبرهاناً، فقد كانت المهام معقدة، ولم يكن من السهل حلها حسابيّاً، حيـث تعيّن على الطفلـة النظر إلى طبيعة المسائل وبنائهــا، وأن تراقب تفكيرها. وهذه هي خصائص المهمة ذات المطالب المعرفية العالية.

يُعـدُّ البحث الوارد في الإطـار النظري جزءاً من جسم المعرفة الـذي يخبرنا أنه لكي نطـور مستويـات عالية من التفكير الرياضي، لا بد من وجـود تدخلات تربوية ملائمة داخل غرفـة الصــف. وبسبب وجود مثل هــذه المعلومات عن تدخلات المعلميـن التربوية، فهناك حاجة إلــى التطور المهني لتعزيز فهم المعلمين للتعليم المرتبـط بالتدخلات التربوية التي تستثير التمكين الرياضي، والفهم العميق للمفاهيم الرياضية.

أتيحت الفرصة لسارة لتجربة مواقف حلول المسائل الرياضية التي تشتمل على العوامل المذكـورة آنفاً، وأظهرت في تلك المناسبات مستويـات عالية من التفكير الرياضي. إضافة إلــى ذلك، فقد أثمــرت هذه العوامل عن نتاجات إيجابية عند دمجهــا في ممارسات التعليم العاديــة. وبنــاءً عليه، فإن الرأي الذي تدافع عنه المؤلفــة يتمثل في أن معرفة المعلم بكيفية

إيجـاد بيئات ملائمة على نطاق واسـع وتطبيق هذه المعرفة، وتوظيف هذه البيئات، واختيار المهـام التي تستدعي مستويات عالية مـن المطالب المعرفية، واستخدام الخطط العلاجية الملائمة، سوف يجعل مزيداً من الأطفال يظهرون مستويات عالية من التحصيل الرياضي.

نسمـع دائماً مـن يتحدث عن الحاجة إلى تشجيع المواطنيـن على متابعة الحقول التي تندرج تحت نظام (STEM) (Science, Technology, Engineering&Mathematic). ولكـي نتمكن مـن اجتذاب الأفـراد الأكثر قدرة فـي مجتمعنا وإعدادهم، فـإن ذلك يتطلب الاستفادة من قدرات أكبر عدد ممكن من الطلاب، حيث يمكن رعاية تلك القدرات وتغذيتها وشحذهـا وإثرائها طـوال حياتهم الأكاديمية. وهـذا يعني أنه يتعين علينـا تزويد المعلمين بـالأدوات الضروريـة اللازمة لتعرُّف المستويـات العالية في التحصيـل الرياضي، بدلاً من الاعتماد على علامات الاختبارات اعتماداً تامّاً. ومن خلال تعريف المعلمين بسمات الموهبة الرياضيـة وخصائصها مثل المعايير المبنية علـى الدراسات كتلك الواردة في هذا البحث، يمكـن أن ينظر إلى هذه السمات بصفتها أهدافاً لمزيـد من الأطفال. وعلى الرغم من أنها تصـب في مصلحة الأفراد جميعاً ممن سيحصلـون على فرص أكبر للتفوق في الرياضيات، فـإن تطوير رأس المال هـذا بصفته مصدراً طبيعيّـاً، يُعدُّ أمراً مهمّاً أيضـاً لاقتصاد الأمة وأمنها.

قائمة المراجع

Abrantes, P. (2001). Revisiting The Goals And The Nature Of Mathematics For All In The Context Of A National Curriculum. In M. Vandenheuvel–Panhuizen (Ed.), *Proceedings Of The 25Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education* (Pp. 25–40).

Ashley, R. M. (Ed.). (1973). *Activities For Motivating And Teaching Bright Children.* West Nyack, Ny: Parker Publishing (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Bulgar, S. (2002). Through A Teacher's Lens: Children's Constructions Of Division Offractions. Unpublished Doctoral Dissertation. Rutgers, The State Uni– versity Of New Jersey, New Brunswick, Nj.

Bulgar, S. (2003A). Children's Sense–Making Of Division Of Fractions. *The Journal Of Mathematical Behavior: Special Issue On Fractions, Ratio And Proportional Reasoning,* Part B. 22(3), 319–334.

Bulgar, S. (2003B). Using Research To Inform Practice: Children Make Sense Of Division Of Fractions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Twenty–Seventh Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education Held Jointly With The Twenty–Fifth Conference Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education: Vol. 2.* Navigating Between Theory And Practice (157–164). Honolulu, Hi: Crdg, College Of Education, University Of Hawai'i.

Bulgar, S. (Under Review). The Development Of Flexible Representations For Division Of Fractions. *Mathematics Teaching And Learning.*

Bulgar, S., Schorr, R. Y. & Maher, C. A. (2002). Teacher's Questions And Their Role In Helping Students Build An Understanding Of Division Of Fractions. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Twenty–Sixth Annual Conference Of The Interenabling National Group For The Psychology Of Mathematics: Vol. 2. Learning From Learners* (Pp. 161–167). Norwich, Uk: School Of Education And Professional Development University Of East Anglia.

Bulgar, S., Schorr, R. Y. & Warner, L. B. (2004). Extending And Refining Models For Thinking About Division Of Fractions. *Twenty–Sixth Conference Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education: Building Connections Between Communities.* Toronto, Ontario.

Burns, M. (2000). *About Teaching Mathematics. Sausalito,* Ca: Math Solutions Publications.

Cobb, P., Boufi, A., Mcclain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse And Collective Reflection. *Journal For Research In Mathematics Education, 28(3),* 258–277.

Cruitshank, D. E., & Sheffield, L. J. (1992). *Teaching And Learning Elementary And Middle School Mathematics* (2Nd Ed.). New York: Macmillan (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Csikszentmihalyi, M., Rathunde, K., & Whalen, S. (1997). *Talented Teenagers: The Roots Of Success And Failure.* Cambridge, Uk: Cambridge University Press.

Dann, E., Pantozzi, R. S., & Steencken, E. (1995). Unconsciously Learning Some–thing: A Focus On Teacher Questioning. In *Proceedings Of Seventeenth An–nual Meeting Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education.* Columbus, Ohio: Ohio State University.

Davidson, J., & Sternberg, R. (1984). The Role Of Insight In Intellectual Gifted–ness. *Gifted Child Quarterly, 28,* 58–64 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Davis, R. B. (1992). Understanding "Understanding." *Journal Of Mathematical Behavior, 11,* 225–241.

Davis, R. B. (1997). Alternative Learning Environments. *Journal Of Mathematical Behavior,16* (2), 87–93.

Davis, R. B., & Maher, C. A., (1990). The Nature Of Mathematics: What Do We Do When We Do Mathematics. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.) *Constructivist Views On The Teaching And Learning Of Mathemat–ics* (Pp. 65–78). Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Davis, R. B., Maher, C. A., & Martino, A. M. (1992). Using Videotapes To Study The Construction Of Mathematical Knowledge By Individual Children Working In *Groups. Journal Of Science Education And Technology,* 1(3), 177–189.

Devall, Y. (1983). Some Cognitive And Creative Characteristics And Their Rela–tionship To Reading Comprehension In Gifted And Nongifted Fifth Grad–ers. *Journal For The Education Of The Gifted,* 5 (4), 259–273 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Dover, A., & Shore, B. M. (1991). Giftedness And Flexibility On A Mathematical Setbreaking Task. *Gifted Child Quarterly,* 35, 99–105.

Education Week On The Web. (2002, April 3). Assessment. Available: Http://Www. Edweek.Org/Context/Topics/Issuespage.Cfm?Id=41.

Firestone, W. A., Schorr, R. Y., & Monfils, L. (2004). *The Ambiguity Of Teaching To The Test.* Mahwah, Nj: Erlbaum.

Goldin, G. A. (In Press). Aspects Of Affect And Mathematical Modeling Processes In R. Lesh, E. Hamilton & J. Kaput (Eds.) *Real–World Models And Modeling As A Foundation For Future Mathematics Education.* Mahwah, Nj: Erlbaum.

Goldin, G. A. (2002). Affect, Meta–Affect, And Mathematical Belief Structures. In G.C. Leder, E. Pehkonen, & G. Tÿner (Eds.). *Beliefs: A Hidden Variable In Mathematics Education?* (Pp. 59–72). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Goodkin, S. (2005, December 27). Leave No Gifted Child Behind. *The Washington Post.* Retrieved June 28, 2006, From Http://Www.Washingtonpost.Com.

Greenes, C. (1981). Identifying The Gifted Student In Mathematics. *Arithmetic Teacher. 28* (6). 14–17.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, And Students' Learning In Second Grade Arithmetic. *American Educational Research Journal, 30* (2), 393–425.

House, P. A. (Ed.). (1987). *Providing Opportunities For The Mathematically Gifted,* K–12. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Kaput J. J. (1998). Transforming Algebra From An Engine Of Inequity To An Engine Of Mathematical Power By «Algebrafying» The K–12 Curriculum. In *The Nature And Role Of Algebra In The K–14 Curriculum: Proceedings Of National Symposium* (Pp. 25–26). Washington, Dc: National Academy Press.

Kaufman, J. C., & Baer, J. (2004). Sure, I'm Creative—But Not In Mathematics: Self–Reported Creativity In Diverse Domains. *Empirical Studies Of The Arts.* 22(2), 143–155.

Keitel, C., & Kilpatrick. J. (1998). Rationality And Irrationality Of International Comparative Studies. In G. Kaiser, E. Luna, & I. Huntley (Eds.) *International Comparisons In Mathematics Edcuation* (Pp. 242–257). London: Falmer Press.

Marr, D., & Sternberg, R. (1986). Analogical Reasoning With Novel Concepts: Differential Attention Of Intellectually Gifted And Nongifted Children To Relevant And Irrelevant Novel Stimuli. *Cognitive Development, 1,* 5–72 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Miechenbaum, D. (1980). A Cognitive–Behavioral Perspective On Intelligence. *Intelligence, 4* (4), 271–283 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent.* Reston, Va: Council For Exceptional Children. (Eric Document Reproduction Service No. Ed.321 487 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

National Council Of Teachers Of Mathematics. Curriculum And Evaluation Stan–dards For School Mathematics. Reston, Va.: The Council, 2000.

Nces: Http://Nces.Ed.Gov/Nationsreportcard/

Niss, M. (1996). Goals Of Mathematics Teaching. In A. Bishop, Et Al. (Eds.), *In–ternational Handbook Of Mathematics Education* (Pp. 11–47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

O'connor, M., & Hermelin, D. (1979). Intelligence Differences And Conceptual Judgment. *Psychological Research,* 41, 91–100.

Reynolds, S. (2005). A Study Of Fourth–Grade Students' Explorations Into Com–paring Fractions. (Doctoral Dissertation, Rutgers, The State University Of New Jersey At New Brunswick 2005) Dissertation Abstracts International 66/04. P. 1305. Aat 3171003.

Ryser, G. R., & Johnsen, S. K. (1998). *Test Of Mathematical Abilities For Gifted Students: Examiner's Manual.* Austin, Tx: Pro–ed.

Schmidt, W. H., Mcknight, C. C., & Raizen, S. A. (1996). *A Splintered Vision: An Investigation Of U.S. Science And Mathematic Education.* East Lansing, Mi: U.S. National Research Center For The Third International Mathematics And Science Study.

Schorr, R.Y., & Bulgar, S. (2003). The Impact Of Preparing For The Test On Class–room Practice. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *27Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathemat–ics Education Held Jointly With The Twenty–Fifth Conference Of The North American Chapter Of The Internationalgroup For The Psychology Of Math–ematics Education: Vol. 4. Navigating Between Theory And Practice* (Pp. 135–142). Honolulu, Hi: Crdg, College Of Education, University Of Hawai'i.

Schorr, R.Y., & Goldin, G. A. (In Preparation). Affect And Motivation In The Sim–calc Classroom. *Educational Studies In Mathematics.*

Scruggs, T., & Mastropieri, M. (1984). How Gifted Students Learn: Implications From Recent Research. *Rooper Review, 6,* 183–185 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Scruggs, T. Matrropieri, M., Monson, J., & Jorgensen, C. (1985). Maximizing What Gifted Kids Can Learn: Recent Finds Of Learning Strategy Research. *Gifted Child Quarterly, 29* (4), 181–185 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Shore, B. (1986). Cognition And Giftedness: New Research Directions. *Gifted Child Quarterly, 30,* 24–27 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Smith, M. S., & Stein, M. (1998). Selecting And Creating Mathematical Tasks: From Research To Practice. *Mathematics Teaching In The Middle School, 3* (5), 344–350.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. *The Journal Of Secondary Gifted Education, 14* (3), 151–165.

Sriraman, B. (2004). Discovering A Mathematical Principle: The Case Of Matt. *Mathematics In School, 33* (2), 25–31.

Sriraman, B. (2005). Are Mathematical Giftedness And Mathematical Creativ– ity Synonyms? A Theoretical Analysis Of Constructs. *Journal Of Secondary Gifted Education, 17* (1), 20–36.

Stanley, J. C. (1976). The Study Of Mathematically Precocious Youth. *Gifted Child Quarterly,* 26, 53–56. (As Cited In Ryser, & Johnsen, 1998).

Steencken, E. P. (2001). Studying Fourth Graders' Representations Of Fraction Ideas. (Doctoral Dissertation, Rutgers, The State University Of New Jersey, New Brunswick, 2001) Dissertation Abstracts International 62/03. P. 953, Aat 3009381.

Stein, K. S., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implement– ing Standards–Base Mathematics Instruction: A Casebook For Professional Development.* New York: Teachers College Press.

Sternberg, R. J. (1982). A Componential Approach To Intellectual Development. In R. J. Sternberg (Ed.) *Advances In The Psychology Of Human Intelligence* (Vol. 1, Pp. 413–466). New York: Wiley (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Sternberg, R. J., & Powerll, J. (1983). The Development Of Intelligence. In J. H. Flavell & E. M. Markham (Eds.) *Handbook Of Child Psychology: Cognitive Development.* (Vol. 3, Pp. 341–419). New York: Wiley (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Towers, J. (1998). *Teacher's Interventions And The Growth Of Students' Mathe– matical Understanding.* Unpublished Doctoral Dissertation. The University Of British Columbia, Canada.

U.S. Commission On National Security For The 21St Century. February 15, 2001. *Roadmap For National Security: Imperative For Change.* Washington, Dc: Gpo, Chapter Ii, Pp. 30–46.

Von Rotz, L., & Burns, M. (2002, Fall). Caterpillars—A Lesson With First Grad–ers. *Math Solutions Online Newsletter. (7).* Retrieved Fall 2002 From Http://Www.Mathsolutions.Com.

Warner, L., & Schorr, R. Y. (2004). From Primitive Knowing To Formalizing: The Role Of Student–To–Student Questioning In The Development Of Math–ematical Understanding. *Twenty–Sixth Conference Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education: Building Connections Between Communities.* Toronto, Ontario.

Wong, B. (1982). Strategic Behaviors In Selecting Retrieval Cues In Figted, Normal Achieving And Learning Disabled Children. *Journal Of Learning Disabili–ties. 13,* 33–37 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

Woodrum, D. (1975). A Comparison Of Problem–Solving Performance For 4Th, 5Th And 6Th Grade Children Classified As Normal, Gifted, Or Learning Dis–abled And By Focusing Level And Conceptual Tempo. *Dissertation Abstracts International 39* (11–A)6708–6709 (As Cited In Ryser & Johnsen, 1998).

ملاحظة

1. وضع هذه المسألة روبرت كيرك، اختصائي في الرياضيات K-3 في مدرسة West Windsor–Plainsboro Public School District وسط نيو جيرسي. وكان أيضاً منسّقاً في حلقة العمل المذكورة في البحث.

مشكلات اكتشاف الموهبة الرياضية في الصفوف المبكرة وتعزيزها

منحى مواقف التحدي

فكتور فريمان

ملخص

أظهرت الدراسات الكثيرة التي أجريت عن الموهبة في الرياضيات خلال العقدين الماضيين أهمية إيجاد بيئة تعليمية/ تعلمية ملائمة للكشف عن الطلاب النابغين في الرياضيات ورعايتهم. واستناداً إلى الطرائق النفسية والمنهجية والتعليمية التي اقترحها كروتتسكي (Krutetskii, 1976) وشيدروفتسكي (Shchedrovtiskii, 1968) وبروسو (Brousseau, 1997) وسيربينسكا (Sierpinska, 1994)، طوّرنا منحى مواقف التحدي الخاص بنا. وعلى مدار سبع سنوات من الدراسة الميدانية في صفوف المرحلة الابتدائية من الروضة - الصف 6، جمعنا كمية كافية من البيانات التي تظهر كيف تساعد هذه المواقف على اكتشاف الموهبة الرياضية لدى الأطفال الصغار وتعزيزها، آخذين في الحسبان المحافظة على اهتماماتهم نحو مناهج رياضيات أكثر تقدماً، والحفاظ عليها وزيادتها. سوف نعرض في هذه المقالة النموذج الخاص بنا، ونوضح كيف يُطبق على صف دراسي متعدد القدرات. وسنناقش أيضاً الأدوار المختلفة التي قد يؤديها المعلمون والطلاب في مثل هذه البيئة، وكيف يمكن لكل طرف أن يستفيد منها.

المقدمة

غالباً ما تشير سِيَر حياة علماء الرياضيات المشهورين إلى الطبيعة الخاصة بموهبتهم، التي يمكن الكشف عنها في سن مبكرة جداً. وربما يتساءل بعض الناس: من أين تأتي هذه البصيرة العميقة في الرياضيات، وكيف يتمكن المعلمون من اكتشاف هذه المواهب ورعايتها؟ وبناءً على هذا الاكتشاف، أيّ بيئة صفية ستكون ملائمة ومفيدة لمثل هؤلاء الأطفال؟ وما الذي يستطيع المعلمون فعله لمساعدة هؤلاء الأطفال على تحقيق إمكاناتهم؟

يتصف الطلاب الموهوبون في الرياضيات منذ السنوات المبكرة جدّاً، قبل المدرسة وفي أثنائها، بالفاعلية والنشاط والفضول في تعلمهم، وبالمثابرة والابتكار في أعمالهم، ويتمتعون أيضاً بالمرونة والسرعة في التقاط المفاهيم الرياضية المعقدة والمجردة. وعلى هذا، فإنهم يمثلون مصدراً فكريّاً بشريّاً فريداً لمجتمعنا ليس من حقنا أن نهدره أو نضيعه.

قدمت لنا كثير من الدراسات التي أجريت في العقود الماضية عن الموهبة الرياضية قوائم متباينة تتعلق بسمات الطلاب النابغين وخصائصهم، واقترحت نماذج متنوعة عن اكتشافهم ورعايتهم داخل غرفة الصف وخارجها.

سمحت التجارب طويلة الأمد مع طلاب المدارس، والملاحظات التي قدمها المعلمون لعالم الرياضيات الروسي فاديم كروتتسكي، ببناء قائمة سمات أنشطة عقلية أظهرها الأطفال الموهوبون في الرياضيات في سن مبكرة نسبيّاً، منها:

- القدرة على تعميم مادة الرياضيات (القدرة على اكتشاف العام ضمن المختلف تماماً أو المنفصل).
- المرونة في العمليات العقلية (القدرة على التحول السريع من عملية إلى أخرى، ومن مسار إلى آخر).
- السعي للتوصل إلى أكثر الطرق سهولة ووضوحاً واختصاراً لحل المسألة.
- القدرة على تذكر العلاقات المعمّمة ومخططات الاستدلال وطرائق حل المسائل بأنواعها.
- اختصار العمليات العقلية واختصار الروابط الفردية.

- تكوين الأشكال الأولية لتصور «رياضي» خاص بالبيئة – كما لو أن كثيراً من الحقائق قد ظهرت من خلال منظور العلاقات الرياضية.

يذكر ميلر (Miller, 1990) بعض السمات الأخرى التي قد تعطي مفاتيح مهمّة لاكتشاف الموهبة الرياضية العالية، وهي:

- المعرفة والفضول المتصلان بالمعلومات العددية.
- سرعة التعلم والفهم وتطبيق الأفكار الرياضية.
- القدرة العالية على التفكير والعمل التجريدي.
- القدرة على اكتشاف الأنماط والعلاقات الرياضية.
- القدرة على التفكير والعمل بصورة مجردة بطريقة إبداعية مرنة.
- القدرة على تحويل التعلم إلى مواقف رياضية لم يسبق تعليمها.

وقد طوّر رينزولي (Renzulli, 1977) نموذجاً آخر يركز على النبوغ بصفته ملتقى طرق لعوامل كثيرة. وعرّف ريدج ورينزولي (Ridge And Renzulli ,1981) النبوغ بوساطة هذا النموذج على أنه تفاعل بين ثلاث مجموعات أساسية من السمات البشرية: القدرات فوق العادية، المستويات العالية من الالتزام بالمهمة، والمستويات العالية من الإبداع. ووفقاً لتعريفهم، فإن الأطفال النابغين، هم أولئك الأطفال الذين يمتلكون هذه المجموعة المركبة من السمات، وهم قادرون على تطويرها، ومن ثم تطبيقها في أي مجال ذي قيمة من مجالات الأداء البشري.

وعلى نحوٍ مماثل، ركز منغوس وجراسل (Mingus And Grassl, 1977) دراستهما على الطلاب الذين يظهرون مزيجاً من الرغبة في العمل الجاد والقدرة الرياضية الطبيعية و/أو الإبداع.

وقد ناقش الباحثان القدرة الرياضية الطبيعية، التي يمكن تمثيلها بوساطة كثير من السمات التي اكتشفها كروتتسكي (انظر أعلاه)، والقدرة غير الرياضية كالرغبة في العمل بجد (التي تعني أن تكون منتبهاً، مركّزاً، ملتزماً، حيويّاً، مثابراً، واثقاً، وقادراً على مقاومة تشتت الانتباه والتوتر) أو الإبداع العالي (أي، القدرة على التفكير التباعدي، وربط

الخبـرة والمهارات ذات المجـالات المتباينة جداً لتكوين مخرجـات أو أفكار جديدة). وقد أطلق الباحث على الطلاب الذين يمتلكون درجة عالية من القدرة والإبداع والرغبة في مادة الرياضيات صفة «النابغين حقّاً».

وبعـد التأمل ملياً في ملاحظاتنا الصفّيـة للطلاب من أعمار 4-5 سنوات مستخدمين البرمجيات التعليمية التي تحتوي على بعض المهام الرياضية، بتنا مهتمين بدراسة الأطفال ذوي النضـج المبكر فـي الرياضيات دراسة معمقــة، حيث لاحظنا أن بعضهـم يختار دائماً أنشطة أكثر تحديّاً، ويمرون بالمستويات جميعها وصولاً إلى أعلاها، ويفهمون كل نشاط دون شــرح أو تفسير من المعلم، ويظهرون منحى واضحاً جـدّاً في حل المسألة، ويمتلكون ذاكرة اختيـار حـادة للحقائق المهمة والتفاصيـل والطرائق، وهم أيضاً مبدعون جـدّاً في تناولهم المسائـل «مفتوحة النهاية» (مثل إيجاد الألغاز والأنمـاط)، وغالباً ما يطلعون أقرانهم على مكتشفاتهم مظهرين فخراً كبيراً بأنفسهم.

فمثلاً، عند العمل في مهام العد، كما هو الحال في إيجاد قطعة دومينو عليها عدد من النقـاط يماثل العدد مـن 6 إلى 9، يعدّ بعض الأطفال النقاط جميعهـا على كل قطعة تقريباً باستخدام أصابعهم، في حين يختار بعضهم في البداية، القطعة التي تحوي أكثر من خمس نقـاط (مثلاً ربما يختـارون ثمانية)، وبعد ذلك، يعد غالبيتهم النقـاط، وإذا كانت النتيجة ليسـت جيدة، يقفـزون عشوائيّاً إلى واحدة أخـرى بالعدد نفسه من النقـاط. وهناك أيضاً مجموعة صغيرة من الأطفال تحاول تحديد بطاقة عليها أقل من ثماني نقاط. وأخيراً، نجح طفـل باقتناص البطاقـة ذات النقاط السبع فـوراً قائلاً: «أعرف أن هذه هـي البطاقة، لأن خمسة واثنين يساويان سبعة».

نستطيـع أن نرى، من خلال تحليـل إستراتيجيات الأطفال، **المناحـي المختلفة التي يتبعونهـا مـع الأعـداد**، إذ ينظر بعضهم إلى البطاقات على أنها صـور لأشياء يمكن عدّها، ويعمـدون إلى استخـدام الإستراتيجية نفسها عندما يتلاعبـون بالأشياء (مثل الدمى). في حيـن يميل أطفال آخرون إلى استخدام منحـى مختلف أكثر تعقيداً – حيث يفكرون بصورة كليـة (أفهـم أنها خمسة هنا، وأعـرف أن سبعة أقل من ثمانيــة)، وتجريديّاً (العدد بصفته

سمة مجردة لمجموعة من النقاط) جنباً إلى جنب مع عدد من الاختصارات التي تساعدهم على زيادة فاعلية أعمالهم الرياضية.

والمثال الآتي، هو مهمة مقارنة بطاقتين عُرضتا على الطفل: إحداهما تشتمل على عدد معيّن من النقاط مرتبة داخل نسق 4×3 (12 نقطة كحد أقصى)، والثانية تشتمل على الأعداد المكتوبة من 1-12، وعلى الطفل أن يقرر ما إذا كانت البطاقتان متماثلتين من حيث الأعداد أم لا. تعدُّ هذه المهمة بالنسبة لغالبية الأطفال بعمر خمس سنوات سهلة نسبيّاً، لكن تحديد الوقت لإتمام المهمة يجعل النشاط صعباً جدّاً بالنسبة إلى الأطفال ذوي إستراتيجيات العد المحدودة باستخدام «أصابعهم». وقد وُجد أن أفضل إستراتيجيه لدى الأطفال الذين يستخدمون التقدير (أعرف أن لديّ عدداً من النقاط هنا أكثر من العدد ثلاثة على الجانب الآخر)، والذين يعدّون باستخدام الأعين (دون الأصابع). وقد أطلق بعض الأطفال تعليقات معمقة مدهشة مثل «أعرف أن عدد النقاط هنا هو اثنتا عشرة نقطة؛ لأنني أرى أربعة صفوف على كل واحد منها ثلاث نقاط بمجموع يساوي اثنتي عشرة نقطة»، وهذا يظهر نضجاً مبكراً في التبصر تجاه الأعداد والعلاقات فيما بينها.

تتيح بعض المهام المجال أمام الأطفال لابتداع بعض الأنماط التي تتطلب بناء شخصية على وفق نمط معين، أو ابتداع شخصيتهم الخاصة بهم. وينظر كثير من الأطفال إلى الخيار الثاني بصفته عملاً فنيّاً، مع أن ملاحظتنا أظهرت أن بعض الأطفال في سن أربع سنوات ابتدعوا شخوصاً، باستخدام أنماط ذات طبيعة رياضية أكثر تعقيداً (مثل اللون والخلفية وجزء من الملابس). عرض بعض الأطفال أنشطة على نسق شبكة من 6×6 منازل مع مجموعة من الألغاز المختلفة لإعادة إنتاج (أُعطيت الصور على أنها نموذج)، أو ابتداع، لغزهم الخاص بهم، وعمل كثير من الأطفال الذين تتراوح أعمارهم بين (4-5 سنوات) ذلك مثلما يرسمون صورة أخرى.

ومرة أخرى، تمكنّا من ملاحظة أن عدداً قليلاً من الأطفال يبنون فسيفساء رياضية تجريدية (Abstract Tessellations) بطريقة عفوية باستخدام أشكال معقدة، ومتماثلة أحياناً، وهذه طريقة يمكن أن تكون متوقعة على نحوٍ أكبر من الأطفال الكبار ممن يمتلكون

المعرفة بالتحولات الهندسية كالانعكاس، أو التحويل والنقل. وقدّم نشاط آخر مصنعاً لإنتاج البسكويت مطليّاً برقائق الشوكولاته. يتطلب أحد أوجه هذا النشاط أن يضع الأطفال عدداً من الرقائق على قطعة بسكويت مماثلة لعدد أعطي عشوائيّاً (من1 إلى 10). ويطلب نشاط آخر تكوين قطعة من البسكويت بعدد عشوائي من الرقائق. وبإعطاء الطلاب حرية الاختيار، فقد سنحت لنا الفرصة لملاحظة بعضهم بعمل البسكويت بأعداد متتالية من واحد إلى عشرة مكررة في صفين. والأكثر من هذا، فقد كان الطلاب منبهرين بالنتائج التي توصلوا إليها، لذا، فقد عاودوا تكرار النمط نفسه مرات عدة، دون أن تبدو عليهم علامات الإعياء أو التعب على الرغم من أنه كان تكراراً للإجراء نفسه. ويبدو أن لدينا هنا مثالاً للإبداع في الرياضيات من نوع خاص هو: رؤية جمال البنية الرياضية في النمط المكرر ذاته.

وهناك مهمة مماثلة، تعد معقدة للأطفال الصغار جدّاً. مثلاً، يظهر نشاط تغذية الأرانب بالجزر أن بعض الأرانب تنتظر الطعام، وفي الجانب الآخر، ساحة فارغة حيث يتعين على الطفل وضع الجزر، آخذاً في الحسبان أن لكل أرنب حبة جزر واحدة. وفي الواقع، يجب على الطالب أن يتحكم بشرطين اثنين في آن معاً، ليضمن أن عدد الأرانب مساوٍ لعدد حبات الجزر. أظهرت ملاحظاتنا أن بعض الأطفال قرروا ترتيب حبات الجزر بنمط هندسي معيّن (صف، سلم أو نسق)، الأمر الذي يساعدهم على التحكم بالشروط، لذا، يظهرون طريقة أكثر تعقيداً في التفكير.

وأخيراً، عند الشروع في ترتيب المهام (كترتيب سبع دمى خشبية من نوع ماتريوشكا (Matreshka) الروسية تنازليّاً، أو تصاعديّاً من حيث الحجم)، استخدم بعض الأطفال طريقة التجربة والخطأ، في حين فعل آخرون ذلك بطريقة أكثر تنظيماً (ينظرون إلى من بجانبهم، ويبدّلون عند الضرورة). ونفذها عدد قليل منهم بطريقة أكثر انتظاماً: حيث بدؤوا بوضع الأكبر/الأصغر أولاً، ثم انتقلوا إلى الأكبر/ الأصغر الذي يليه، وهلم جرّا. وقد أتاحت لهم هذه الإستراتيجية تسهيل عملية حل المسألة، وفي الوقت ذاته أظهرت قدرتهم على تطبيق تفكير أكثر تعقيداً.

وبالتأمل في هذه الأمثلة، يمكن للمرء أن يتساءل: لماذا يظهر هؤلاء الأطفال مثل هذا السلوك غير العادي في سن مبكرة؟ هل مرد ذلك جاذبية ألعاب الحاسوب على الشاشة، أم أنها تظهر بنية أكثر تعقيداً لعقولهم؟ وفي هذا السياق نشير إلى أن دراستنا لإستراتيجيات هؤلاء الأطفال في حل المهام الرياضية «البحتة»، قادتنا إلى الاعتقاد أن هذا السلوك يعود إلى السبب الأخير، وبناءً عليه، فهي تستحق منا البحث عن بنية محددة للعقل ذي القدرة الرياضية.

دارت أسئلتنا الأخرى حول: كيف يمكن تحديد المكوّنات الرياضية البحتة لنشاط تعلم الأطفال؟ وأيّ نوع من البنية المعرفية تمكّن الطفل من التصرف بصفته عالم الرياضيات؟ وسألنا سؤالاً من وجهة نظر المعلم الممارس على النحو الآتي: كيف ننظم أنشطة الرياضيات للأطفال، كي نحفزهم على التصرف بهذه الطريقة؟

وعلى أي حال، سوف نحلل في الجزء الآتي نظريات عدة تكوّن إطارنا النظري، وهذا ما يمكّننا من تحليل المسائل التي تساعد على تعزيز الموهبة الرياضية لدى الأطفال الصغار.

الخلفية النظرية

لاحظ كولم (Kulm, 1990) أن كثيراً من رياضيات المدارس كانت تركز في الماضي على المهارات العملية، لذا، فإن إتمام عدد كبير من التمارين في مدة زمنية محددة كان مقبولاً ليس بصفته مقياساً للإتقان فحسب، بل بصفته دليلاً على النبوغ، وإمكانية القيام بأعمال متقدمة. وفي الجانب المقابل، تتطلب مهارات التفكير العليا في الرياضيات، التي تُعدُّ بطبيعتها معقدة ومتعددة الأوجه، التأمل والتخطيط وأخذ الإستراتيجيات البديلة في الحسبان. ولعل الشيء الوحيد الذي يجعل من الاختبار الذي يهدف إلى تقويم هذا النوع من التفكير ذا معنى، هو محددات الوقت الذي يتطلبه إتمام المهمة.

وقد أوصى برجان (Burjan, 1991) باستخدام الآتي:

- الاستقصاء المفتوح والأسئلة ذات الإجابة المفتوحة بدلاً من الاختيار من متعدد.
- المسائل التي تسمح باستخدام مجالات مختلفة ومتعددة.

- مهام غير معيارية بدلاً من المهام المعيارية.
- المهام التي تركز على القدرات العالية بدلاً من المهارات متدنية المستوى.
- المهام المعقدة التي تتطلب استخدام أجزاء متعددة من المعرفة الرياضية من موضوعات مختلفة، بدلاً من المعرفة المستندة إلى حقيقة أو أسلوب محدد.
- المهام المستقلة معرفيّاً بدلاً من المهمة المستندة إلى المعرفة تسير في الاتجاه ذاته.

وياللأسف، فإن الجزء الأكبر من برامج الرياضيات مكرس باتجاه تطوير المهارات الحسابية، كما أشار جرينز (Greenes, 1981) إلى ذلك من قبل، ونحن نميل إلى قياس قدرات الطلاب استناداً إلى الأداء الناجح لهذه العمليات الحسابية (التي يطلق على الطلاب الذين يتقنونها منفذي التمارين الجيدين) ، ولا نولي اهتماماً كبيراً لملاحظة مهارات الاستدلال العالية لدى الطلاب.

أحياناً، يمكن لمسألة عادية جدّاً أن توصل رسالة واضحة لتمييز الطالب الموهوب من الطالب الجيد. وفي هذا السياق، حلّل «جرينز» مسألة بسيطة جدّاً (عُرضت على طلاب الصف الخامس الأساسي) ، هي:

قطعت السيدة جونسون مسافة 360 كم في 6 ساعات. فكم كيلومتراً قطعت في الساعة؟

وقد فاجأ طالب ألمعيّ المعلم بوجود صعوبة لديه في حل هذه المسألة السهلة. وأخيراً، أدرك المعلم أن الطالب قد اكتشف عدم الإشارة إلى عدد الكيلومترات نفسها التي تقطعها هذه السيدة كل يوم. ويظهر هذا المثال قدرة الطالب على اكتشاف الغموض والالتباس في المسألة، وهذا ما يجعله ضمن الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

لـذا، أصرّ جرينز في عمله الأخير علـى أهمية تقديم مواقف تمكّن الطلاب من إظهار مواهبهم: «ومن هذه الوسائل التي تتحدى الطلاب وتشجعهم على إظهار مواهبهم، استخدام المسائل والمشروعات الثرية». ويرى أن مثل هذه المسائل تحقق ما يأتي:

- دمـج فـروع المعرفة (تطبيـق المفاهيـم والمهـارات والإستراتيجيـات من فروع الرياضيات المتعددة، أو من مجالات المحتوى الأخرى (وفيها غير الأكاديمية).
- انفتاحهـا علـى التفسيـرات أو الحلـول (المسائـل ذات البدايـات أو النهايـات المفتوحة).
- صوغ التعميمات (إدراك البنى الشائعة بصفتها أساساً للاستدلال القياسي).
- استخـدام طرائق الاستـدلال المتعـددة (الاستقـراء (Inductive)، والاستنتاج (Deductive)، والاستـدلال المكانـي (Spatial)، والنسبي (Proportional)، والاحتمالي (Probabilistic)، والقياسي (Analogue).
- تحفّز تكوين الأسئلة الممتدة (Extension Questions)
- توفيـر فرصـ للأسئلة المباشـرة (استكشـاف المسائل الواقعيـة وإجراء تجارب وتحقيقات ومسوحات).
- لها أثر اجتماعي (رفاهية المجتمع و سلامة أفراده).
- التفاعل مع الآخرين.

أشـار كثير مـن الباحثين إلى الـدور الخاص الذي يقـوم به المعلم فـي عملية تحديد الأطفـال ذوي القـدرة الرياضية، حيث أكد كينـارد (Kinnard, 1998) علـى طبيعة الدور المهـم للمعلم من حيث تسهيل استكشاف الطلاب للمادة التـي تتحداهم. ومن هنا، تصبح مسألـة تحديد الطـلاب ذوي القـدرات العالية مرتبطة ارتباطـاً وثيقاً بتوفير هـذه المادة، وبأشكال التفاعل بين المعلم والطالب القادرة على إظهار القدرات الرياضية الرئيسة. ويؤيد المؤلـف استخدام النموذج التفاعلي المتواصـل في تحديد الطلاب من خلال التحدي الذي يجمع بين الخيوط الآتية:

- الإطار التفسيري.
- اختيار المادة الرياضية ذات التحدي الملائم.

- أشكال التفاعل بين المعلمين والطلاب التي تقدم فرصاً لتعرّف السمات الرياضية وتطويرها.
- توفيـر الفرص على نحوٍ مستمر للأطفال ذوي القدرة الرياضية للتفاعل مع المادة التي تتحدى قدراتهم.

جـرت عملية الكشف عن المواهب في دراسة حالة كينارد المستندة إلى هذا النموذج، وفـي فئات كروتتسكـي بوساطة ما يطلق عليه اسم «المعلم الباحـث» في بيئة غرفة الصف، حيـث يتعلم الطـلاب، ويُلاحظون في آنٍ معاً. وقـد استُخدم منحى طـرح الأسئلة في كشف جوانب فهم الطلاب الرياضيات ومناحيهم في حل مسائلها ومواهبهم الرياضية.

اقتـرح ريـدج ورينزولي ثلاثة أنـواع من الأنشطـة المهمة لرعاية المواهـب الرياضية وتنميتها، هي:

- الأنشطة الاستكشافية العامـة لتحفيز الاهتمام في موضوعات محددة: كالتجارب التـي تظهر إجـراءات متعددة فـي العالم المهنـي أو العلمي (عـن طريق متاحف الطـلاب ومراكز العلـوم)، حيث تتاح الفرصة للطالب ليختـار ويستكشف ويجرب دونما حاجة إلى إعداد تقارير، أو تقديم أي نوع من الملخصات الرسمية.
- أنشطة تدريب جماعي لتطوير عمليات ذات صلة بمجالات الاهتمام التي طُوّرت من خـلال الأنشطة العامة. ويتمثل هـدف هـذه الأنشطة في تمكين الطلاب من التعامل مع المحتـوى على نحوٍ أكثر فاعلية من خلال قوة العقل. ومن الأمور المألوفة لمثل عمليـات التفكير والشعور هذه: التفكير النـاقد، وحل المشكلات، والتفكير التأملي، والتدريـب الاستقصائـي (Inquiry Training)، والتفكيـر التباعـدي، وتدريـب الحساسيـة (Sensitivity Training)، وتطويـر المعرفة، والتفكيـر الإنتاجي أو الإبداعي. وينطبق حل المشكلات على:
    1. تطبيق الرياضيات على حلول مشكلات في حقول أخرى.
    2. حل الألغاز أو المسائل المنطقية البحتة.
    3. حل المسائل التي تتطلب محتوى وعمليات رياضية محددة.

- استقصاء للمسائل الحقيقية إما فرديّاً أو ضمن مجموعة صغيرة. وعندما تصبح الموهبة واضحة نتيجة رغبة الطالب في الانتظام والمشاركة في أنشطة أكثر تعقيداً، ومبتكرة من الشخص ذاته، فإن جوهر هذا النوع من الأنشطة يكمن في أن الطلاب يصبحون مبتكرين للمسائل وحلولها، ويسقصون أيضاً المسائل الحقيقية مستخدمين طرائق الاستفسار التي تلائم طبيعة المسألة (ص. 231).

طوّر كروتتسكي في دراسته مجموعات كثيرة من المسائل الرياضية التي تتحدى الطلاب، وأجرى أيضاً مقابلات مع كل واحد من الطلاب الذين وقع عليهم الاختيار، مقدّماً طريقة أصيلة لدراسة القدرات الرياضية، ضمن نشاط رياضي ملائم يشتمل على حل أنواع كثيرة من المسائل بالمعنى الواسع للكلمة في إطار التعليم المدرسي، وفيها مسائل تتعلق بالبرهان والحساب والتحويل والبناء. وحلّل الباحث سبعة مبادئ تتعلق بكيفية اختيار المسائل الرياضية الملائمة لاكتشاف الطلاب ذوي القدرة الرياضية، هي:

1. تمثل المسألة الأجزاء المختلفة للرياضيات المدرسية على نحوٍ متساوٍ تقريباً، وهي الحساب والجبر والهندسة.
2. يجب أن تكون المسائل التجريبية بدرجات متفاوتة الصعوبة.
3. يجب أن تحقق المسائل هدفها المباشر، بحيث يساعد حلها على توضيح بنى القدرات الرياضية.
4. يجب ألا تكون المسائل موجهة بصورة كبيرة نحو التعبير الكمي للظاهرة التي دُرست تماماً كإظهار السمات النوعية لها (العملية مقارنة بالنتائج).
5. ينبغي لنا أن نحاول اختيار المسألة التي يكون حلها مستنداً إلى القدرات على نحوٍ أساسي، وليس إلى المعرفة أو العادات أو المهارات.
6. يجب أن تحدد المسائل سرعة تقدم الطالب نحو حل مسائل من نوع معيّن، ومدى التقدم في تحقيق المهارات المتصلة بحلها، ومدى الإمكانات القصوى لديه في هذا الصدد (التعليم مقارنة بالتشخيص).
7. يفترض أن تسمح المسائل ببعض التحليلات الكمية والنوعية.

بعـد تحليل المناحـي المختلفة التي يستخدمهـا الأطفال في حل المسائـل، قدّم إلينا كروتتسكـي كثيراً من العناصر الرئيسة للقدرة الرياضيـة تبين كيف تساعدنا هذه المسائل التي تتسـم بالصعوبة والتحدي على تعرّف مواهب الأطفال المختلفة في الرياضيات. ونحن غالبـاً ما نُدرّس الطلاب في غرفة الصف العاديـة طرائق مباشرة لحل المسائل الرياضية، وبعدئـذٍ نعطيهـم النوع نفسه من المسائل بهـدف اختبار معرفتهم، ونتوقـع منهم أن يعطوا الحلول ذاتها.

وربمـا يقود هذا إلـى بعض المفارقـات، كتلك التي قدمهـا بروسو وأطلـق عليها اسم مفارقـات انتقـال المواقـف (Devolution of Situations)، حيث يخبـر المعلم الطلاب بكيفيـة حـل المسألة المعطـاة أو الجواب الـذي سيقدمونـه، وبذلك ليس عليهـم اختيار أو تجريـب أي طريقة، أو تعديل معارفهـم أو معتقداتهم، وعندئذٍ لن يتمكن الطالب من إعطاء الأدلـة المرجـوة. لـذا، يدّعي بروسو أن كل شـيء يقوم به المعلم بهدف جعـل الطالب ينتج السلـوك الـذي تتوقعه، يميل إلى حرمان الطالب من **الظروف والشـروط الضـرورية لفهم الفكرة المستهدفة وتعلمها.**

ومـع ذلك، تشيـر كثير من الدراسـات إلى الحقيقـة القائلة أنه كي يتمكـن المرء من الوصـول إلـى مستـوى عالٍ من المعرفـة أو الفهـم، عليه أن يكون قـادراً على الشـروع فوراً بدمـج المعرفـة السابقة وإعادة تنظيمها. ويـرى سيربنسكا أن الحاجة إلـى إعادة التنظيم (Reorganization) واحـدة من أكثر المشكلات خطورة فـي التعليم. ولكننا لا نستطيع أن نخبـر الطلاب كيف سيعيدون تنظيم فهمهم السابـق، ولا نستطيع إخبارهم ما يتعين عليهم تغييـره، أو كيف يحولون تركيزهـم أو يعمّموا؛ لأننا سنفعل ذلك بموجب معرفة لم يكتسبوها بعد.

قدم شيدروفتسكي أمثلة مدهشة لمفارقات أخرى في معرض بحثه عن طرائق منهجية جديـدة في التعليم والتعلـم عندما نريد بصفتنا مربين، أن يتقن طلابنا عملاً ما عن طريق تعليمه على نحوٍ مباشر من خلال إعطاء الطلاب مهام تماثل هذه الأعمال. لكن الممارسات

الصفية تظهر أن الطلاب لا يتعلمون الخطوات التي تتجاوز المهمة، ولا يتعلمون أيضاً الخطوات التي نعلمهم إياها ضمن هذه المهام.

يقترح المؤلف في نموذج موقف التحدي الخاص به، استخداماً يومياً فاعلاً للأنشطة الرياضية المفتوحة التي تشرك الأطفال في عملية استكشافٍ واستجوابٍ وتقصٍّ واتصالٍ وتأملٍ ذات معنى فيما يتصل بالبنى والعلاقات الرياضية. ويمثل هذا النموذج رؤية واسعة للتفوق الرياضي ترتبط بفكرة شيفيلد للوعد الرياضي (Sheffield, 1999)، وبذلك، تهدف إلى منح السعادة لمزيد من الأطفال من خلال التفكير والتصرف بطريقة رياضية ذات معنى.

السياق العام للدراسة

تظهر تجربتنا سبع سنوات من الأنشطة والملاحظات الصفية لطلاب الروضة حتى الصف السادس (K-6) في أثناء تدريس موضوعات رياضية صعبة. وقد أجرينا هذه التجربة في مدرسة ابتدائية خاصة ثنائية اللغة (الإنجليزية والفرنسية)، في مدينة مونتريال بكندا. وقد أصرت المدرسة على أن تقدم إلى طلابها كافة، بغض النظر عن قدراتهم وأدائهم الأكاديمي، برامج إثرائية في المواد جميعها وفيها الرياضيات، وذلك جنباً إلى جنب مع برنامج لغوي قوي (لغة ثالثة إضافية: الأسبانية أو الإيطالية).

وبذلك تعزز المدرسة التعليم، بصفته قيمة أساسية، بغرس الرغبة في التعلم، في حين تطور وتنمي القدرات المعرفية الآتية:

- القدرة على التحليل والتركيب
- التفكير الناقد
- فن التعلم

يتألف المنهاج الرياضي من مساق أساسي قوي متقدم المستوى بنحو سنة مقارنة ببرنامج وزارة التربية والتعليم في مقاطعة كويبيك (Programme de Formation de l'ecole Quebecoise, 2001)، ومن الإثراء الذي يتضمن استكشافاً معمقاً للمفاهيم

والموضوعات الصعبة: المنطق والكسور والهندسة والأعداد، إضافة إلى التركيز على إستراتيجيات حل المسألة. ويساعدنا الاستخدام الفاعل المكثف لكتب الرياضيات الصعبة (Lyons & Lyons)، إضافة إلى الاختيار الموفق الدقيق للمواد الإضافية، على إيجاد بيئة تعلمية، يشارك فيها الطلاب باتخاذ قرارت تتصل بتعلمهم؛ كي ينموا ويتقدموا بالسرعة التي تناسبهم، حيث يتنافس كل طفل مع ذاته، ويُشجَّع على النبوغ عليها.

ولمّا كانت المدرسة لا تنتقي الطلاب لمساقات الرياضيات الإثرائية، فقد شارك طلابها جميعهم والبالغ عددهم (238 طالباً) في التجربة. وبصفتي معلم حاسوب، بدأ الباحث في العمل مع بعض هؤلاء الأطفال الذين تراوحت أعمارهم بين 3 – 5 سنوات. وهناك كثير من الطلاب الذين بوسعنا ملاحظتهم مدة طويلة من الوقت (مثلاً، بعض طلاب الصف السادس للعام الدراسي 2002–2003 كانوا من طلاب المدرسة منذ الصف الأول الأساسي، وبعضهم منذ أن كانت أعمارهم تتراوح بين 3–5 سنوات). وفي أثناء هذه المدة، ترك بعض الطلاب المدرسة، في حين التحق بعضهم الآخر بالصف في وقت لاحق (وكان هناك طالبان في الصف السادس نفسه، بدأ الدراسة لدينا من الصف السادس). أما من حيث القدرات، فيمكننا تصنيف طلاب الصف على أنهم خليط من القدرات، مع وجود تباين كبير في مستوى التحصيل.

هدف المساق الإثرائي في هذه الدراسة إلى تعزيز الاستدلال المنطقي، ومهارات حل المسائل لدى الأطفال جميعاً، وقد استند إلى مواقف التحدي الموجودة في مجموعة كتب مدرسية يُطلق عليها اسم «الرياضيات المتحدية» (Challenging Mathematics)، إلى جانب مصادر حاسوبية، ومطبوعة متنوعة مثل (اللوجو Logo، والكابري Cabri، ولعبة الحياة، وشبكة الاتصالات، وهلم جرّا)، إضافة إلى مواقف من أفكار الباحث نفسه، تشتمل على كثير من الموضوعات المتقدمة على المنهاج العادي. وقد قُدّمت بعض الموضوعات على نحوٍ أكثر عمقاً من المنهاج العادي، وكثير من الموضوعات غير المضمنة في المنهاج العادي. وهكذا، فإن مثل هذا المنهاج يتطلب حشد المصادر الداخلية جميعها للطفل: الدافعية والعمل العقلي الجاد والفضول والمثابرة والقدرة على التفكير. ولمّا كان هذا المنهاج الإثرائي يشمل طلابنا جميعاً، فإن الفروق بينهم تتضح بصورة أكبر.

سنوضح في تحليلنا اللاحق المفصل، دور موقف التحدي نفسه، مبينين أنه من دون مجال التحدي هذا، سوف يؤدي ذلك إلى ضياع مثل هذه الفرصة على الطلاب والمعلمين.

مهام التحدي بصفتها أدوات تعليم وتعلّم قوية تساعد على اكتشاف الموهبة الرياضية وتعزيزها

تعد قصة غاوس (Gauss) في حل مسألة تتسم بالرتابة لإيجاد مجموع المئة الأولى من الأعداد الطبيعية، واحدة من أكثر الأمثلة المشهورة على هذا النوع من مهام التحدي. فبينما كان الأطفال الآخرون جميعاً، يحاولون يائسين إضافة الأعداد واحداً تلو الآخر، أدهش غاوس المعلم بحل السؤال بطريقة سريعة سهلة (See, For Example, Dunham, 1990).[1]

وتجعلنا هذه القصة نتساءل: ما خصائص الموقف الصفي التي سنحت للطالب المتفوق إظهار موهبته في الرياضيات؟

تقول القصة نفسها: إن المعلم عمد إلى اختيار المهمة التي يسهل على الطلاب جميعهم الوصول إليها (مهمة متكررة)، وربما عمد أيضاً إلى اختيار الوقت الطويل الذي يستغرقه الطلاب للتوصل إلى الحل. لذا، فقد كان يأمل في إبقائهم مدة طويلة هادئين منشغلين بالحل. أما الأمر الذي لم يكن متوقعاً، فهو مبادرة أحد الطلاب بحل سريع سهل، الأمر الذي حوّل المهمة المتكررة إلى مهمة للتحدي، بالتوصل إلى حل سهل سريع على غير ما هو متوقع لتمرين شاق يتطلب حسابات طويلة. ولم تكن خطة الموقف إظهار موهبة رياضية، ومع هذا فقد كان الأمر كذلك، ولكن على نحوٍ «عفوي»، وأصبح الموقف من مواقف التحدي الصعبة بمحض المصادفة.

---

1) يوهان كارل فريدريك غاوس، عالم الرياضيات الألماني (1855-1777)، لقب بأمير الرياضيات، ويعد واحداً من العلماء الثلاثة الأهم في تاريخ الرياضيات. ويعرف بنظريته عن الأرقام العقدية، وقد استنبط حلاً للمعادلات الرياضية ذات الحدين. ومن المواقف الطريفة في الرياضيات ما حصل له عندما كان في سن العاشرة من عمره، عندما طلب المعلم إلى طلاب الصف جمع الأعداد من 1 إلى 100. وبعد وقت قصير جداً، فوجئ المعلم أن غاوس حل المسألة قبل الآخرين وبطريقة أدهشت المعلم- المراجع

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن تحديد الموهبة الرياضية في كثير من الحالات المماثلة. ويمكننا القول أن استخدام مهام تدريب متكررة تشتمل على كثير من الخوارزميات المعيارية لا تقدم بصورة عامة فرصة جيدة لتحديد الموهبة الرياضية وتغذيتها ورعايتها.

وصفت ليندا شيفيلد (Sheffield, 1999) مثل هذه المهام المتكررة بأحادية الجوانب. مثلاً، دعت طلاباً من الصفين الثالث والرابع لمراجعة جمع أعداد من منزلتين بإعادة تنظيمها من جديد. وطلبت إلى الأطفال إتمام صفحة تمارين، مثل: 45+57, 48+68, 37+59. وكما هي العادة، فإن الطلاب الأذكياء المتوقدين ينهون التمارين جميعها قبل زملائهم في الصف. لذا، على المعلم أن «يتحداهم» بجمع أعداد من ثلاث إلى أربع منازل. وعلى الرغم من أن عملية الحساب تصبح أطول وتحتاج إلى وقت، فإن المهام نفسها لم تكن أكثر صعوبة أو أكثر إثارة للاهتمام الرياضي.

ارتأت شيفيلد استخدام مهام ذات معنى؛ بصفة ذلك حلاً تعليميّاً أفضل لمثل هؤلاء الأطفال، مثل: **أُوجِد ثلاثة أعداد صحيحة متتالية يكون مجموعها 162**:

«يواصل الطلاب ممارسة التمرّن على جمع أعداد من منزلتين من خلال إعادة التجميع، ولكن ستتوافر لديهم فرصة التوصل إلى اكتشافات مثيرة. أما الطلاب الذين يُطلب إليهم التوصل إلى إجابة بالطرق الممكنة كلها، وطرح أسئلة ذات صلة وتقصي أنماط مهمة، وبوضع فرضيات حول ملاحظاتهم وتقويمها، ومشاركة أقرانهم ومعلميهم والآخرين فيما توصلوا إليه من نتائج، فسيحصلون على قدر كبير من الممارسة بجمع عددين من منزلتين، ولكنهم أيضاً سيحصلون على فرصة للعمل الحقيقي في الرياضيات» (Sheffield, 1999; 47).

نتوقع من الطلاب عند إعطائهم مهمة صعبة أن يبذلوا جهوداً لفهم المسألة، والبحث عن إستراتيجية فاعلة تعينهم على حلها، والتوصل إلى الحل الملائم والتعميمات الضرورية.

توضح الأمثلة الآتية ثلاثة أساليب مختلفة تماماً، استخدمها أطفال موهوبون رياضيّاً في حل المسألة التي تتطلب **إيجاد عدد المصافحات التي نحصل عليها عندما يصافح عدد «ن» من الأشخاص بعضهم بعضاً.**

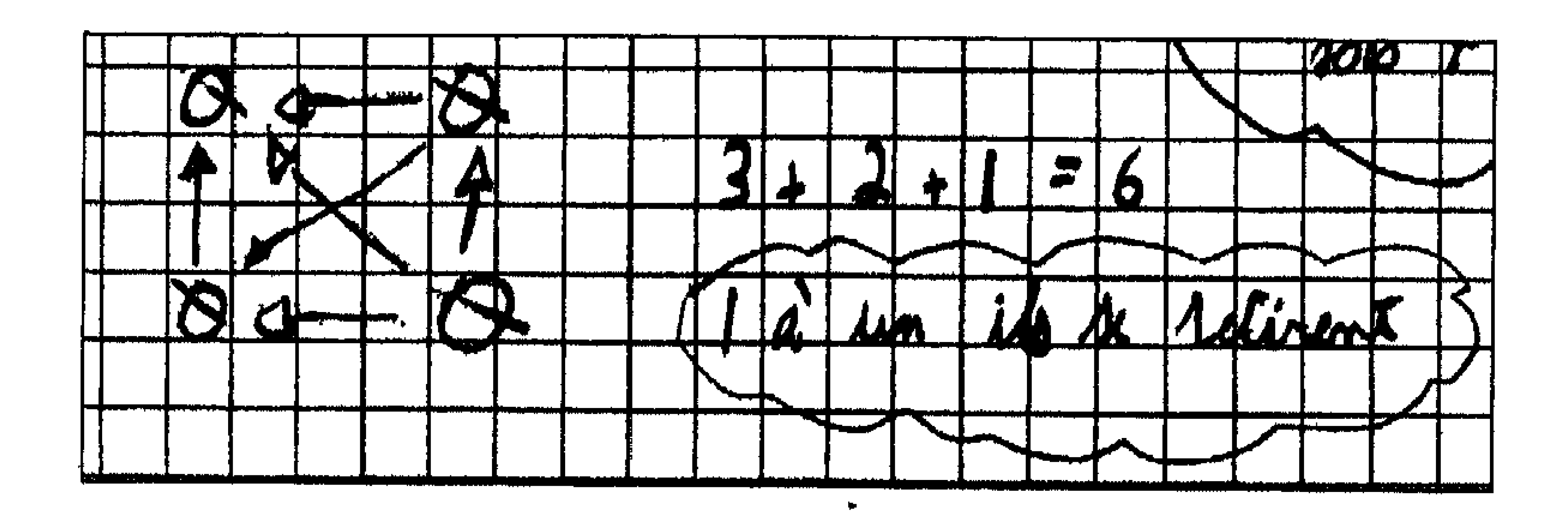
نظّم الطالب مارك (10سنوات) تجربة مع زملاء صفه، مراعياً انتظام حالات:

N=2, N=3, وهكذا. وعندئذٍ عمل التعميمات اللازمة. وإليكم نسخة من تقريره الذي يتضمن خطوات عدة:

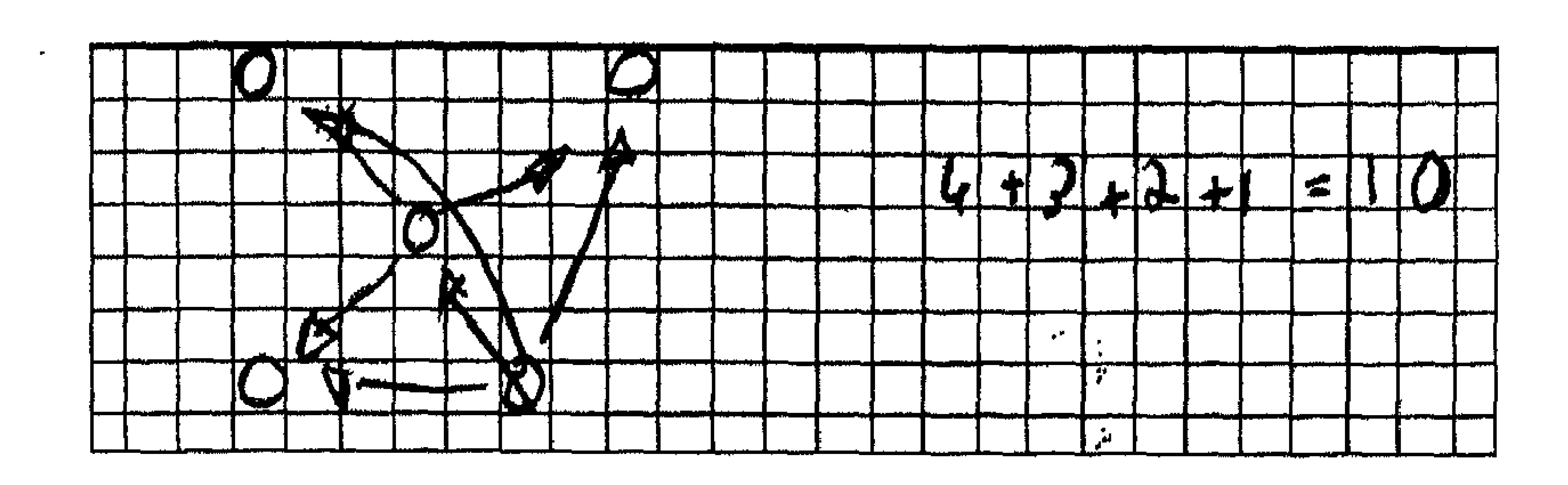
الخطوة الأولى: دائرتان موصولتان بسهم تشيران إلى شخصين ومصافحة واحدة. كتب إلى جوار الصورة «1 =».

الخطوة الثانية: ثلاث دوائر على صورة مثلث متصلة بثلاثة أسهم، تمثل ثلاثة أشخاص – ثلاث مصافحات. كتب إلى جوار الصورة «3=».

الخطوة الثالثة: أربع دوائر على صورة مربع موصولة بستة أسهم، تشير إلى أربعة أشخاص- ست مصافحات. كتب إلى جوار الصورة «6=1+2+3»، معلقاً بقوله: «يغادرون واحداً تلو الآخر».



الخطوة الرابعة: خمس دوائر تكوّن «ترتيب حجر الدومينو ذي النقاط الخمس» موصولة بستة أسهم فقط (بعض الأسهم مفقودة). ومع ذلك، كتب قائلاً: «10=1+2+3+4» مواصلاً النمط نفسه.



الخطوة الخامسة: ست دوائر منظمة في صفين (ثلاثة في كل صف)، ولا يوجد أسهم. كتب قائلاً:

«5+4+3+2+1=15».

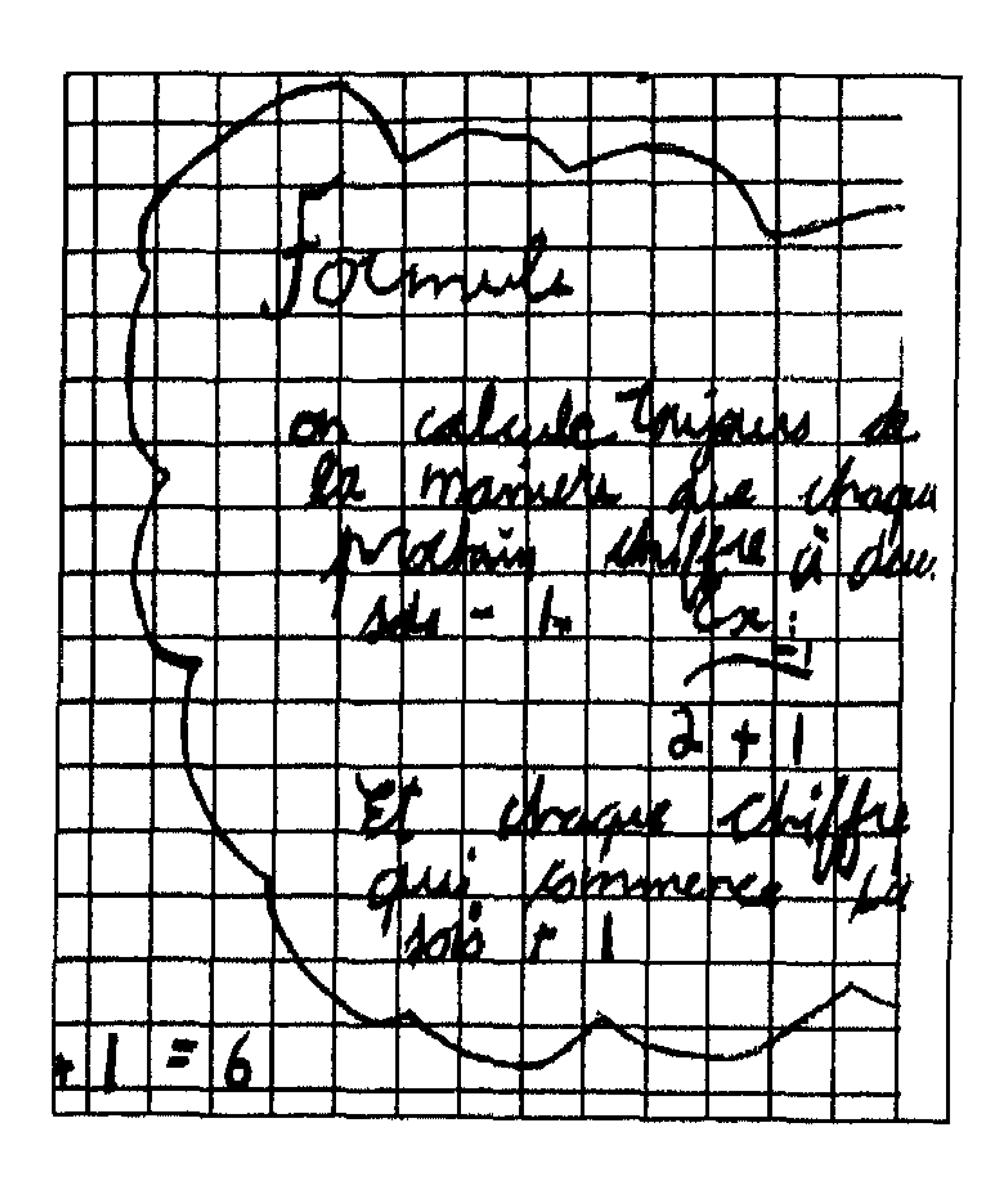
الخطوة السادسة: سبع دوائر منظمة في صفين (ثلاثة + أربعة)، لا يوجد أسهم. كتب قائلاً:

«6+5+4+3+2+1=21».

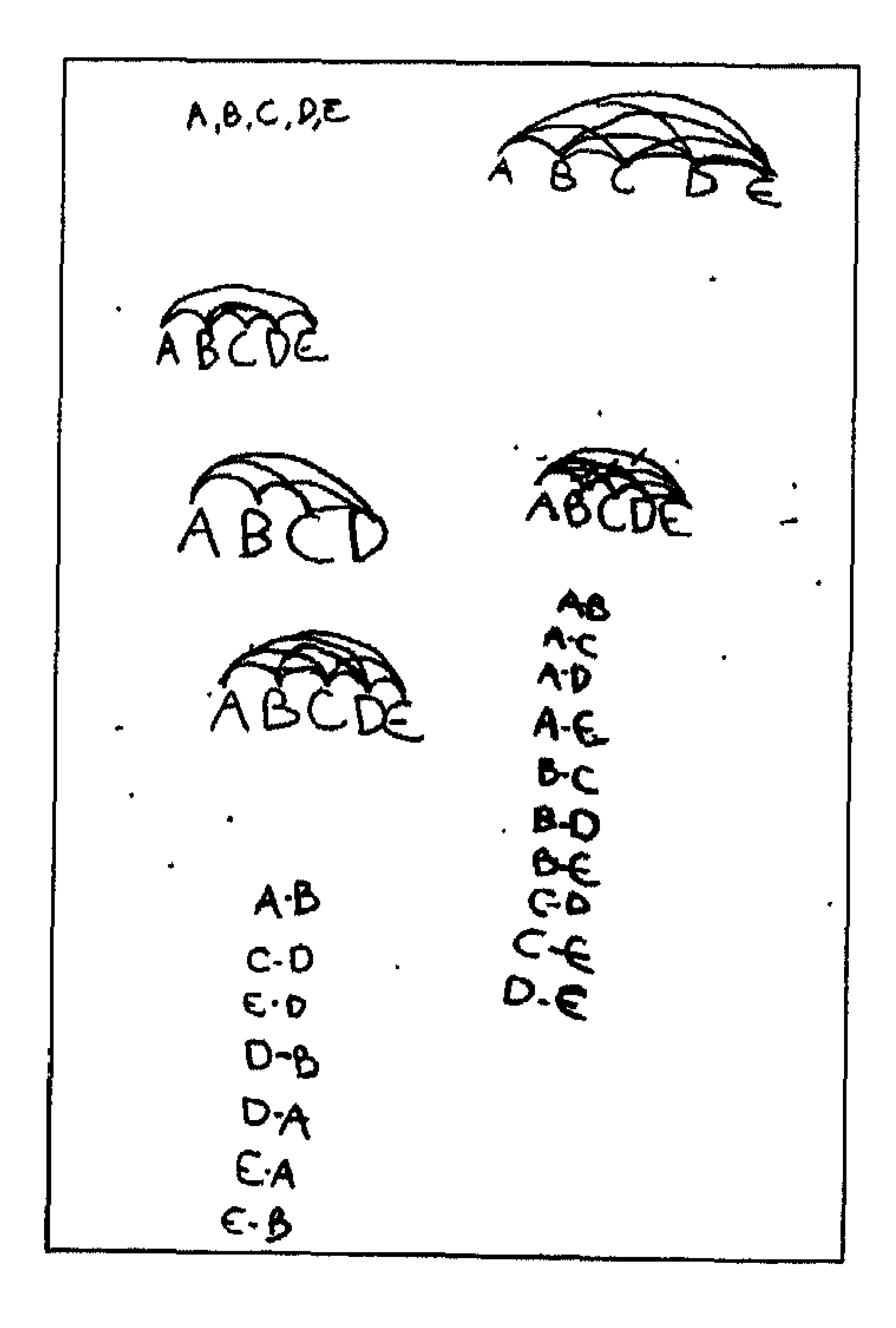
الخطـوة السابعة: ثماني دوائر منظمة في صفين (أربـع دوائر في كل صف)، لا يوجد أسهم. كتب قائلاً: «7=6+5+4+3+2+1=28».

اختتم تعميمه بالجملة الآتية التي أطلق عليها اسم:

الصيغة الرياضية: (نحسب دائماً بالطريقة نفسها من أجل أن يكون كل عدد تالٍ في حاصل الجمع أقل بواحد. 1+2 وكل عدد سابق سيكون 1+).



واستخدمت شارلوت (10سنوات) حالة خاصة لخمسة أشخاص يرسمون أشكالاً، ويبحثون بصورة منظمة عن جميع الروابط الممكنة.



أمــا كريستوفر (10 سنــوات) فكان مقتضباً جدّاً في تقديمــه، حيث كتب جملة واحدة فقط:

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

وأرفـق ذلــك بتفسير شفهي قائلاً: إنــه إذا كان لدينا مجموعة مــن الأشخاص، بحيث يصافـح كل شخصــ الأشخاصــ جميعهــم الذين سبقــوه، وعلى هــذا، سيكــون لشخصين مصافحة واحدة، ولثلاثة أشخاص مصافحتان أخريان (2+1)، وهلم جرّا.

نستطيــع أن نرى أن البحث في الموقــف الأول «للمصافحة» سمح للأطفال باستكشاف المسألــة، والبحث عن أنماط، ومن ثم عمل تعميمات رياضية مهمة. وإضافة إلى ذلك، فإنه بسؤال بسيط على النحو الآتي: ماذا سيكون عدد المصافحات لمئة شخص وواحد (101)؟ توصــل الصف إلى المسألة نفسها التي كان على غاوس أن يعالجها، لكنها افتُرضت بطريقة مختلفــة تتســم بالتحدي والصعويــة. وهكذا، قد يمكــن استثارة مزيد مــن الاستقصاء هنا بطريقة طبيعية.

ومــن وجهة نظــر المعلم الممارســ، نستطيع أن نفهم علــى نحوٍ أفضــل **كيفية تنظيم أنشطة الأطفال الرياضية، بحيث نحفزهم إلى العمل على هذا النحو.**

من مهام التحدي إلى مناهج التحدي: مثال من مساق إثرائي في الروضة

هنــاك منحيان أساسيــان لتصميم منهاج الرياضيات للأطفــال في سن 5-6 سنوات: أحدهما، يدعى المنحى التقليدي، أما الآخر، فيدعى المنحى الابتكاري أو الإبداعي. ويستند الأول منهمــا إلــى العــدّ، والترتيب، والتصنيــف، والتعريف بالأعــداد الأساسيــة والعمليات (الجمــع والطــرح) والعلاقات (أكثر من، أقل من، أكبر من، أصغر من، أعظم من)، إضافة إلى الأشكال. في حين يركز الآخر على التعلم بصورة أكبر في الوقت الذي يتيح فيه للأطفال اللعب، باستخدام الأشيــاء والألوان والفن والحرف والألعاب بالأعداد والأشكال. حاول كثير

من المعلمين المبدعين في الماضي استخدام أفضل الأفكار في كلا المنحيين، وأضافوا أيضاً أنشطة الاستدلال إلى منهاج الرياضيات.

استخدمنا في مدرستنا المنحى التقليدي المستند إلى كتاب جواز السفر الرياضي (Passeport Mathématique) الخاص بالصف الأول، إلى جانب مجموعة فرنسية جديدة تدعى الحلزونية (Spirale Maths CP2) التي تمثل المنحى الحديث الثاني. ومع ذلك، فإن هذا المزيج لا يزود أطفالنا بالمواد اللازمة لتطورهم الرياضي، إذ لا تزال هناك فجوة بين مستوى قدراتهم، ومتطلبات منهاج التحدي الذي نستخدمه ابتداءً من الصف الأول (مجمع الرياضيات)، الذي يستند إلى الاكتشاف والاستدلال والفهم.

ولجسر الهوة، طوّرنا مساقاً إثرائيّاً قُدِّم إلى طلاب الروضة جميعهم (لدينا من 30 إلى 35 طفلاً كل عام). وكان المساق يُعطى أسبوعيّاً (ساعة في الأسبوع)، حيث كنا نبني مواقف التعليم على أساس منحى مواقف التحدي، ونضع أنشطة تحفز على التساؤل الرياضي والاستقصاء إضافة إلى التفكير التأملي.

تبدأ كل حصة بأسئلة، مثل: **ماذا فعلنا في الحصة السابقة؟ ما المسألة التي يجب علينا حلها؟ ما الطريقة التي اتبعناها في حل المسألة؟ ما الإستراتيجيات التي استخدمناها؟**... إلخ. تهدف هذه التساؤلات إلى استثارة التأمل في المسائل التي حلها الطلاب والطرائق التي استخدموها. ولن يحدث الانقطاع في هذا الموقف أبداً، من دون هذا التأمل من وجهة نظر شيدروفتسكي عن الخبرات السابقة؛ لأن هذا الانقطاع يعد تحطيماً للمعرفة السابقة، ودعوة إلى البحث عن وسائل وآليات جديدة.

ومن شأن هذا التأمل أن يبقينا على تواصل مع المعرفة السابقة التي نحتاج إلى تذكّرها واستدعائها.

وفي الوقت ذاته، سوف نطرح أسئلة تشير إلى فهم الأطفال للمفاهيم الرياضية الأساسية، والطرائق التي نهدف إلى تقديمها (باستخدام المفردات المناسبة و/أو الرمزية).

نحــاول من خلال هذه المناقشة الأولية إيجاد جانب جديد يزود الأطفال بفرصة طرح أسئلـة جديــدة، والنظر إلى المسألة بطريقة مختلفة. وقد نسألهــم أحياناً بكل بساطة: **ماذا تتوقع أن نفعل هذا اليوم؟**

وهكــذا نستطيع الوصول إلى الموقف الجديد/ المسألــة الجديدة، أو جانب جديد من مسألة قديمة. وقد نتوصل إلى ذلك عن طريق إثارة الأسئلة، أو القصص المثيرة، أو الألعاب التمهيديــة. وبحسب ما يرى شيدروفتسكي وبروسو، نحــاول أن نتفادى من تعليم المفارقات مــن خلال عــدم إعطاء الأطفــال وصفاً مباشــراً للمهــام أو طرائق الحل، كمــا نحاول لفت انتباههم وتحفيزهم.

وبعــد هذه المرحلة التمهيدية، يبدأ الأطفال باستقصاء المسألة مستخدمين معالجات مختلفــة، مثــل: المكعبــات والأشكال الهندسيــة والعــدّادات، إلخ. ويعملون فــرادى أو ضمن مجموعــات. ويصبــح دور المعلم فــي أثناء مرحلــة الاستقصــاء أكثر تواضعــاً، حيث يمنح الأطفــال استقلالاً معيناً لتعــرّف المسألة، واختيار المواد الضروريــة اللازمة، وتنظيم بيئة عملهم، واختيار الإستراتيجية المناسبة.

ومع ذلك، يتعين على المعلم أن يقوم ببعض الأشياء لتوجيه الأطفال من خلال أعمالهم، إذ يجــب تحقق فهم الطفل للمسألة، والشروط المعطاة (قوانين ولعبة)، وكذلك الهدف من النشاط. ومع تقدم الطفل في عمله، يجب تحقق سيطرته على الموقف: ما الذي تفعله الآن؟ وما هدف العمل؟ (تنشيط الفعل التأملي). ويجب الإدراك أن الاستكشاف لا يستعمل وسيلة لدفــع الطفل نحو القيــام ببعض الأعمال فحسب، بل يستعمل أيضــاً، وقبل كل شيء، مدخلاً للمفاهيم أو الطرائق الرياضية.

وبنــاءً عليه، يجب أن يكون المعلــم مستعداً للتعريف بالمفــردات الرياضية الضرورية إلى جانــب معانيها الرياضية، إضافة إلى طرائق الاستــدلال الرياضية المتصلة بالمفاهيم والاستــدلال. وقد حاولنا أن نختار في تجربتنــا الجوانب الرياضية التي تعدُّ صعبة، ولا تكون عادة متضمنة في منهاج الروضة.

عندما نرغب في تقديم نشاط مع أنماط، ننظم مثلاً لعبة. ونبدأ بعمل خط على النسق الآتـي: «ولد، بنت، ولد، بنت،....» بحيث يجد الأطفال هذا سهلاً، ويكونون سعداء باكتشاف النمـط. ثم نعاود البدء بنمط جديد: «ولد، بنت، ولـد، بنت، ولد، ولد.»، وقد يحتج كثير من الأطفال على هذا النمط بصفته خطأ. لكن بعضهم قد يحاول البحث عن نمط مختلف، مثل: «نظارات، لا نظارات، نظارات، لا نظارات،....»

ومع استمرار هذه اللعبة، يعتاد الأطفال على البحث عن أنماط مألوفة. وهذا هو الوقت المناسب لتحديهم أكثر. مثلاً، نطرح عليهم السؤال الآتي: كم طفلاً في الخط بالنمط الآتي: «ولـد، بنت، ولد، بنت،...؟» ولما كان عدد الأطفال في غرفة الصف ثمانية، فيمكن أن يعمل أحدهم فرضية على النحو الآتي: 8 بنات +8 أولاد في الخط. بعد إتمام الخط، يمكن أن يعلو صوت أحد الأطفال قائلاً: «يمكننا إضافة طفل آخر إلى الخط – بنت في البداية».

تشتمـل هذه الدروس على مواقف صعبة متعددة نوجدها؛ لنمنح الأطفال فرصة النظر إلى الأنشطة الرياضية بطريقة مختلفة عما اعتادوا عليه، إضافة إلى تعرُّف مستوى معرفتهم المتصلة بالرياضيات في محاولة اكتشاف الروابط الخفية بين الأشياء المختلفة، واكتشاف البنـى والعلاقـات بين البيانـات، وتعلم كيفية الاستـدلال الرياضي استنـاداً إلى الاستدلال المنطقي، ونترك في الوقت ذاته مساحة لإبداع الأطفال في الرياضيات. ونستخدم متغيرات تعليميـة مختلفة بهـدف إيجاد عوائـق تجعل الأطفال يعيـدون تنظيم معرفتهـم، ويبتدعون وسائل جديـدة للتغلب على هذه العوائق. وطلبنا أيضاً إلـى أطفالنا التعريف باستقصائهم، ودعوناهم إلى نقل اكتشافاتهم إلى الآخرين بوساطة تطوير الأدوات المناسبة، مثل: الرسم البياني والمخططات والرموز والإشارات.

توجيهات لتصميم مواقف التحدي

هناك ثلاثة أنواع من المواقف الصعبة:

- المسائل والاستقصاءات ذات النهايات المفتوحة
- تحويل المعلم العمل المتكرر إلى موقف تحدٍّ
- تحويل الطالب العمل المتكرر إلى موقف تحدٍّ

وسوف نناقش هذه الخيارات بالتفصيل:

المسائل والاستقصاءات ذات النهايات المفتوحة

يمكننا أن نلاحظ ونحن نشاهد «فيلم الفيديو» الذي يعرض مقابلات مع أطفال تتراوح أعمارهم بين 4-6 سنوات، أجراها برنارد وبوربيه (Bednarz And Poirier 1987) ضمن دراستهما عن اكتساب الأطفال الصغار الأعداد، وكيف يصبح الدليل على تباين تنظيم الأطفال الصغار جدّاً للعمل الرياضي واضح المعالم في المهام المفتوحة.

يظهر «الفيديو» عمل الأطفال في مهام مختلفة ذات صلة بمفهوم الأعداد، مثل: العد وتكوين المجموعات، والترتيب، والاحتفاظ، والمقارنة. وقد عرض الباحثان كل مهمة قد يُنظر إليها في الصف العادي بصفتها مهمة عادية، بطريقة صعبة جدّاً ديناميكية مفتوحة النهاية.

حيث كان يطلب إلى إحدى الطفلات باستمرار أن تفكر على الفور في العملية المتصلة بعملها (كيف عملت ذلك؟)، وأن تطوّر إستراتيجية فاعلة، وتعيد تنظيم عمليتها إذا تطلب الأمر ذلك، وتنسق أعمالها. وهكذا، تحولت المهمة المتكررة إلى مهمة مفتوحة النهاية، وأُعطيت الطفلة فرصة أن تكون المنظّمة لعملها الرياضي.

وحاولنا أيضاً في تجربتنا أن نجعل المسائل أكثر انفتاحاً، بخلاف الطريقة التي تُقدّم فيها للطلاب في العادة. مثلاً، يمكننا اقتباس مسألة من إحدى المسابقات الرياضية:

⟶	1	2	3	
	4	5	6	
	7	8	9	⟶

في الجدول أعلاه، ندخل بالعدد 1 ونخرج بالعدد 9.

يستطيع الطالب أن يتحرك عموديّاً أو أفقيّاً، ومن المستحيل أن يسير خطوتين في المربع نفسه، مثلاً، بالانتقال بين المربعات 1-2-5-8-9، نحصل على مجموع مقداره 25. ولكن لا تقودنا المسارات جميعها إلى العدد 25. لذا، أعطى المربعات الباقية جميعها تسعة أعداد.

عُرضت هذه المسألة على المشاركين في نهائي البطولة الدولية لألعاب الرياضيات والمنطق، (International Des Jeux Mathematiques Et Logiques) عام 2000 لأطفال الصفين الرابع والخامس الذين تتراوح أعمارهم بين (10-11 عاماً) Http://Cijm.Org/Cijm.Html، وتبين لنا أن هذه المسألة يمكن أن تصبح أكثر صعوبة بالنسبة إلى الأطفال إذا وضعت بطريقة مختلفة (مفتوحة النهاية):

> يريد شخص زيارة متحف يتألف من تسع قاعات عرض مرتَّبة في مربع 3×3. وعدد اللوحات في كل قاعة مكتوب في المربع. فما عدد اللوحات التي قد يستطيع هذا الزائر رؤيتها، علماً أنه لا يرغب في أن يوجد مرتين في القاعة الواحدة؟

في هذه التجربة، لم نُخفِ عدد الطرق المختلفة التي جعلت هذه المسألة مفتوحة فحسب، بل عرضناها أيضاً على طلاب الصف الأول الأساسي الذين تتراوح أعمارهم بين (6-7 سنوات). وأعطي كل طالب/طالبة مهمة بحسب مستواه/مستواها (سيتمكن جميعهم من التوصل إلى حلين على الأقل).

يوضح المثال الآتي عمل شانتال(Chantal 6)

يظهر هذا المثال كيف ساعد هذا الموقف المفتوح النهاية، الطالبةَ على تطوير قدرات مختلفة لتنظيم البحث، والمحافظة على تتبع عملها.

تحويل المعلم العمل الروتيني إلى موقف تحدٍّ

أكـد منهاج مدرسة كويبيـك (Quebec's School Curriculum) الأخير على أهمية إتقـان حقائق الأعداد الأساسية (مثل جدول الضرب). ويمكن تحويل هذه المهمة المتكررة إلـى مهمـة أكثر صعوبـة بطرق مختلفة. مثـلاً، كتبنـا في أحـد الأيام على السبـورة عمليات الجدول 9:

$9\times1=$

$9\times2=$

$9\times3=$، وهلّم جرّا.

قال طلاب الصف الثالث الأساسي على الفور: إن هذا الجدول سهل بسبب وجود انتظام واضح (نكتب المنازل الأولى من الناتج بالترتيب من 0 إلى 9، في حين نكتب الأعداد الأخرى من 9 إلى 0، وبذلك نحصل على جميع مضاعفات العدد 9: 09, 18, 27 وهكذا). ومن هذه الإجابات نجد أن 54 = 9 × 6.

وهكذا، يكتب المعلم على السبورة 56=9×6، مخبراً الأطفال بقصته عندما كان صغيراً، حيث كان عليه حفظ الإجابات جميعها عن ظهر قلب، ليس مجرد «خدعة»، ولكنه متيقن أن 56=9×6. وهنا يصاب الطلاب بالحيرة والإرباك، ويبدأ بعضهم بالتفكير في كيفية إثبات أن إجابتهم (54 هي الإجابة الصحيحة).

ذهب كثير منهم إلى السبورة ليشاركوا الآخرين في أفكارهم عن الطرق الأخرى للحصول على جدول ال 9. ونتيجة لهذا الدرس، ظهر جدول ال 9 مرتين على السبورة، قرأه الطلاب بصوت جهوريّ مرات عدة، وبذلك تمكّنوا من حفظه غيباً، وفي الوقت ذاته، عملوه بطريقة ذات معنى من خلال استطلاع طرائقهم في الاستدلال وإثباتها.

تحويل الطالب العمل الروتيني إلى موقف تحدٍّ

عندما يطلب إلى طلاب الصف الرابع الأساسي أن يمثلوا 8/1 المستطيل، فإنهم يجدون هذه المهمة اعتيادية سهلة. لذا، دُهشنا من طريقة كريستوفر في تقسيم المستطيل إلى أربعة وستين مربعاً (8 صفوف 8 × أعمدة)، وتلوين ثمانية مربعات عشوائيّاً. وتبيّن له أن المهمة لم تكن صعبة بدرجة كافية، لذا، أراد زيادة صعوبتها.

تحويل التحدي ضمن موقف واحد

تجدر الإشارة إلى أن طرق إيجاد مواقف التحدي الثلاثة جميعها غير منعزلة بعضها عن بعض، إذ يمكن أن يتحول أحدها باتجاه الآخر. مثلاً، يحل طلاب صف الروضة (الذين تتراوح أعمارهم بين 5 – 6 سنوات) مسألة مفتوحة على النحو الآتي:

تريد إميلي أن تبني بيوتاً جديدة في حظيرة حيواناتها. عندما ينظر المرء إلى البيت من السماء، يرى أن هذه البيوت جميعها لها سطح على صورة «أعداد». وهي تريد حالياً بناء بيت لبقراتها، فأي «عدد» تقترح عليها أن تستخدم لسطح هذا البيت الجديد؟

استخدم الأطفال مكعّبات على صورة مواد صلبة مختلفة. ويهدف النشاط إلى جعلهم يستكشفون المواد الصلبة ليستخدموها في عمل مباني مختلفة. هناك طريقتان لعمل المباني: إما ثلاثية الأبعاد، وإما ثنائية الأبعاد. وبذلك، تتكوّن علاقات مكانية مختلفة. مثلاً، تعلم الأطفال تحقق الأشكال المتماثلة بهدف استعادة شكل سطح معيّن. ولم يهدف النشاط الذي قدمناه لأطفالنا إلى تعليم أي طريقة بناء؛ لأنهم يتعلمون ذلك من الكتب المدرسية التي تحتوي على تمارين كثيرة لبناء الأشكال. لقد صمّمنا هذه الحالة لمساعدة الطلاب على الحصول على «شعور مكاني» من نوع معيّن، بمحاولتهم استخدام طرق متعددة في وضع المكعّبات. تكمن الصعوبة والتحدي الرئيسان في هذا التمرين في تنظيم استقصاء رياضي ذي معنى في مسألة غير معرّفة جيّداً أو غير واضحة.

اختار بعضهم تقليد أشكال الأعداد بالطريقة التي نكتبها، في حين بحث آخرون عن طرق مختلفة لإيجاد بنى اقتصادية أكبر مع الاهتمام بالخصائص الهندسية (مثل رؤية هل تتناسب المكعّبات فيما بينها). وأخيراً، انتقلت مجموعة من الأطفال من الموقف الذي أُعطي لهم في البداية لبناء بيت جديد، وبدؤوا ببناء كثير من الأعداد وكتابتها (حتى العدد 1000).

وتحوّل النشاط الذي كنا نعده في الأساس صعباً وإبداعيّاً إلى نشاط متكرر لدى كثير من الأطفال. لذا، قررنا وضع بعض القيود (بصفتها متغيرات جديدة) بهدف إشراك الأطفال في استقصاء مسألة مختلفة نرغب من خلالها في بناء بيت على صورة العدد «5» بأقل عدد ممكن من المكعّبات. وهكذا، فقد تحولت المسألة المتكررة بفضل تدخل المعلم إلى مسألة صعبة مرة أخرى.

تُعدُّ طريقة التحول المفاجئ للمتغير التعليمي هذا (Brousseau, 1997) مهمة في دراستنا العلاقة بين تنظيم الطفل حل المسألة والنبوغ الرياضي، حيث إنها تثير التفكير

التأملي (ما الجديد؟) وإعادة تنظيم عملية التفكير والعمل برمتها (ما الذي أحتاج إلى تعديله؟)، ومن ثم تمنح الطلاب فرصة إظهار إمكاناتهم.

حصلنا في عملنا التجريبي مع الأطفال الصغار على تأكيد راسخ بجدوى مثل هذا المنحى، لا سيما إذا أراد المرء تحديد الأطفال النابغين ورعايتهم. كان ديفيد ابن الخمسة أعوام يؤدي مهمة الحد الأدنى (انظر الشكل7 :1)، وكان سعيداً بحله (4 مكعّبات)، ولكنه كان لا يزال يبدو في «حالة تأهب». وفي هذه الأثناء، بدأنا مناقشة حلول الأطفال. وقدمت إحدى المجموعات حلاً بثلاثة مكعّبات. وفجأة، بدأ ديفيد بعمل تغييرات على الترتيب الذي لديه، حيث اختفى شكل (التخميس)، في حين كان يركز على تقليص المهمة إلى حدودها الدنيا. ولكن اللافت للنظر في هذا، هو ردود فعل هذا الطفل وتجاوبه مع الشروط المتغيرة (هناك من توصّل إلى حل أفضل). تُعدُّ حالة التأهب المستمرة هذه سمة مهمة من سمات الموهوبين، التي يمكن تفعيلها على نحوٍ أفضل في مواقف التحدي مقارنة بالموقف العادي.



شكل 7 ، 1

تقودهم حالة «التأهب» هذه إلى التحقق دائماً من الشروط جميعها، ومراجعة الموقف باستمرار. وإليكم ملاحظة أخرى: يجيب طالب في الصف الرابع الأساسي في أحد اختباراته عن السؤال الآتي: «هل صحيح أنه إذا كان مجموع $a + c = 8$، فإن أ و ب عددان مختلفان؟» تردد كريستوفر كثيراً بالقول أن العددين يجب أن يكونا مختلفين. ومع التقدم في حل أسئلة الاختبار، كان عليه أن يحل مسائل من معادلتين بمتغيرين: $ab = 16$، $a+b = 8$، فتوصل بسهولة إلى أن $a = 4$ و $b = 4$ ، ومن ثم عاد إلى مهمته السابقة، وصحّح إجابته.

ويمكننا أيضاً ملاحظة ظاهرة أخرى مثيرة، وهي أن ابتكار المعلم لموقف صعب قد يجعل الطلاب الموهوبين يحاولون استكشافه أكثر.

مثلاً، نستطيع القول أننا عندما نفّذنا النشاط ذاته مع طلاب الصف الأول الذين تتراوح أعمارهم بين (6-7 سنوات) ، نظر كثير منهم إلى المسألة على أنها اعتيادية، وفقد

بعض الطلاب الاهتمام بها. ومع ذلك، فقد لاحظنا إحدى الطالبات تبحث عن طرق متعددة مختلفة لبناء شكل «5» باستخدام 4 مكعّبات.

لم تبق هذه الطالبة نفسها منشغلة بهذه المسألة فحسب، بل أوجدت مسألة جديدة عندما بدأت البحث عن إمكانات بناء العدد «4» بأقل عدد ممكن من المكعّبات. وهنا، حوّلت الطالبة المسألة إلى مسألة صعبة.

دور المعلم

يصبح دور المعلم حاسماً في بيئة التحدي الصعبة في المراحل جميعها:

- اختيار المسألة
- طريقة عرضها على الطلاب
- تنظيم عمل الطلاب
- تفسير النتائج
- المتابعة

يُعدُّ موقف المعلم وسلوكه من أهم شروط نجاح منحى مواقف التحدي. ولكن، كيف يستطيع المعلمون ضبط عمل الطالب؟ بالإشارة إلى مفارقات التعلم (التي شرحناها في الفصل السابق)، لا يزال الغموض يكتنف طريقة التوصل إلى حل لهذه المشكلة. فمن جهة، إن كل كلمة أو إيماءة تصدر عن المعلم يكونِ لها أثرها الإيجابي أو السلبي إزاء موقف التحدي. ومن جهة أخرى، يجب على المعلم أن يسيطر سيطرة تامة على الموقف (وبخلاف ذلك، فقد يصبح نشاط التعلم الرياضي نوعاً من أنواع الفنون والحِرف تحت غطاء رياضي).

لم تهدنا تجربتنا إلى طريقة إجرائية واضحة، لكنها زودتنا بأمثلة يمكن أن تخضع لمزيد من الاستقصاء والبحث. وقد أتاحت لنا هذه الأمثلة صياغة مناحي المعلمين المفضلة في مواقف التحدي، وهي:

- منح الطفل فرصة التفكير: أن تكون معلماً مرناً.
- دعم رغبة الأطفال في تعلم المزيد عن الرياضيات.

- تحدّي الطلاب بمواقف غير رسمية: روح الدعابة.
- دعم رغبة الأطفال في الانتقال إلى ما هو أبعد من المواقف المخطط لها مسبقاً.
- إعطاء تلميحات عن الإجابة، لكن ليس الإجابة نفسها.
- إدارة الحالات الخاصة بالنبوغ الرياضي.
- استخدام خدع بسيطة على النحو الآتي:

– في أثناء توزيع مواد تُعالج يدوياً (Manipulative Materials) (قوالب، مكعبات إلخ) نسمح للأطفال بلمسها واللعب بها والإحساس بها إذ إن ذلك يزودنا أحياناً بأدلة مهمة على كيفية تنظيم الأطفال الأشياء (كيف يضعون المادة ويرتبونها، وينظمونها، ويصنفونها، ويبنون أشكالاً مختلفة.. إلخ).

– عندما ينتهي الأطفال من اللعب بالمجسّمات المواد، نطلب إليهم كتابة تقرير؛ لأنه من المفيد في بعض الأحيان منحهم بعض الوقت لتفكيك ما بنوه. وهذا يفتح الباب أمام مجموعة متنوعة من العروض التوضيحية (هل سيعيد الطفل البناء مضيفاً إليه تفاصيل جديدة، أم سيرسم صوراً مختلفة تماماً).

– عندما يُطلب إلى الأطفال أن يُطلعوا الآخرين على نتائجهم، من المهم أن نحفزهم إلى تقديم إيضاحات مفصلة، إذ غالباً ما نطلب إليهم أن يؤدوا دور المعلم الصغير، حيث يشرحون لشخصٍ ما لم يفهم المسألة.

– غالباً ما يطلب إلينا الطلاب أن نعلمهم أشياء معقدة. وأحياناً يكون الأثر التعليمي أكبر بكثير إذا تركهم المعلم ينتظرون. وعندئذٍ، قد يصبح الأطفال أكثر تحفيزاً عند البدء بتعليمهم ويقولون: لقد فهمناها، أخيراً!

دور الطالب

يختلف دور الطلاب في موقف التحدي اختلافاً كبيراً عن دورهم في نشاط التعلم العادي، إذ يتعين عليهم التكيف مع بيئة جديدة منفتحة، حيث لا يوجد لديهم أعمال حسابية محددة، أو تعليمات بما يجب عمله. وبناءً عليه، فإن أمامهم فرصة لِـ:

- إظهار مناحٍ مختلفة إزاء المسألة.

- التصرف على نحوٍ مختلف في المواقف المختلفة.
- التغلب على العوائق، وبناء وسائل متنوعة، واكتشاف علاقات جديدة.
- حل المسألة الرياضية استناداً إلى التراكيب والنظم مستخدمين الخصائص والتعريفات والتخمينات والبراهين.
- استخدام الاستدلال المنطقي بطلاقة وسيطرة ودقة.
- دمج المنطق والإبداع في حل المسائل.
- اختراع رموز وإشارات جديدة، واستخدام المخططات والرسوم التجريدية.
- استخدام التفكير التأملي.
- طرح أسئلة رياضية، ابتداع مسائل جديدة، استقصاء، استخدام الرياضيات في المواقف غير الرياضية، النظر إلى ما حوله «بعين الرياضيات الثاقبة».

النتائج والتوصيات

هناك عدد من الدراسات التربوية المتصلة بالموهبة الرياضية، وقد طوّر الباحثون مجموعة متنوعة من نماذج الموهبة، وطبقوها استناداً إلى سمات وخصائص متنوعة للطلاب الموهوبين في الرياضيات. ويوفّر المختصون المؤهلون تأهيلاً عالياً للطلاب الموهوبين مجموعة مختلفة من برامج الإسناد مع مناهج متقدمة ومبادئ توجيهية. وتساعد كثير من المسابقات والمباريات والمنافسات الرياضية على البحث عن الأطفال الموهوبين في الرياضيات، ومن ثم العناية بتطويرهم.

ومع ذلك، لا تزال مشكلات تحديد الموهبة الرياضية ورعايتها بعيدة عن الحل، إذ يصاب كثير من الأطفال بملل منذ سن مبكرة بسبب المنهاج المبسط، الأمر الذي يترتب عليه فقدانهم الاهتمام بالرياضيات، وهذا ما يبدد قدراتهم العقلية. وعلى الرغم من نظام الاختبار الإبداعي، فإنه لا يسمح أبداً لبعض الأطفال بدخول البرامج الخاصة بالطلاب الموهوبين، إضافة إلى أن نظام التدريس العادي غير معد لتقديم المساعدة لهم بهذا الخصوص.

تهدف هذه الدراسة إلى جسر هذه الهوة، وتزويد معلمي المرحلة الابتدائية (K-6) بطرائق تعين على تحديد الأطفال الموهوبين في الرياضيات ورعايتهم داخل صفوف الطلاب ذوي القدرات المتعددة. وقد أطلقنا على هذا المنحى اسم «مواقف التحدي». ويرتكز هذا المنحى نظريّاً على مفهوم كروتتسكي للقدرة الرياضية، ونموذج شيدروفتسكي التطوري للأعمال التأملية، ومفهوم باشلارد (Bachelard, 1938) للعقبة المعرفية، وتمييز سيربنسكا بين التفكير النظري والتفكير العملي في الرياضيات، إضافة إلى نظرية بروسو للمواقف التعليمية.

استناداً إلى وجهة نظر كروتتسكي (Kruitiski, 1976)، فقد عرّفنا القدرة الرياضية بصفتها «السبيكة الرياضية للعقل» (Mathematical Cast Of Mind) التي تمثل مزيجاً فريداً للسمات النفسية التي تمكّن الأطفال الصغار من التفكير في البنى المختلفة، وفي تكوين العلاقات بين المفاهيم والبنى والبيانات والنماذج المختلفة وتعميمها وفهمها، وهذا ما يمكّنهم من حل المسائل الرياضية بنجاح أكبر مقارنة بالطلاب العاديين أو ذوي القدرات المتدنية.

يظهر هؤلاء الطلاب إمكانات تفكير عالية في الاستدلال على المفاهيم الرياضية ونظم المفاهيم في سن مبكرة جداً، وذلك إلى جانب القدرة على تعليل البراهين التي يقدمونها. ويكونون أيضاً مستعدين منذ البداية للتفكير النظري بطريقة أفضل من غيرهم من الأطفال، الأمر الذي يكوّن أساساً متيناً للتفكير الرياضي البحت.

وقد تمثلت النقطة الحاسمة في دراستنا هذه في إدراك عدم إمكانية اكتشاف التفكير النظري ورعايته، إذا ظل الأطفال يتعاملون مع مسائل رياضية اعتيادية، ويطبقون العمليات الحسابية التي يعطيهم إياها المعلم، ويقول لهم ما الذي يتعين عليهم أن يفعلوه، وكيف يفعلونه.

لقد شرح بروسو مفارقات المواقف الصفية في نظريته المسماة نظرية المواقف التعليمية (Theory of Didactical Situations). ووفقاً لهذه النظرية، فقد ضمّنّا

نموذجنا للتفوق الرياضي مفهوم «موقف تحدٍّ»، مفترضين أن الطفل سوف يظهر موهبته في الرياضيات في مواقف محددة فقط عند طرح سؤال حقيقي، وافتراض مسألة حقيقية.

تستخدم «مواقف التحدي» المسائل مفتوحة النهايات والاستقصاء الرياضي. يفتتح الموقف الصعب عمل الطالب في البدء ببناء المسألة، والبحث عن روابط بين البيانات وخبراته السابقة. ولما كان التحدي الحقيقي ممكناً عندما يكون الموقف جديداً بالنسبة إلى الطالب، فإن موقف التحدي يجب أن يحتوي على قطع للعلاقات مع ما تعلمه الطالب في السابق، حاثّاً إياه على التفكير مليّاً في عدم كفاية المعرفة السابقة، بحيث يبني وسائل وآليات عمل جديدة تتوافق والشروط الجديدة، مفعّلاً بذلك إمكاناته الفكرية كلها.

يعطي موقف التحدي، بطبيعته، كثيراً من الفرص المتنامية للموهبة الرياضية من خلال:

- تزويد الطالب بفرصة مواجهة عائق ذي طبيعة رياضية بحتة يطلق عليه اسم «العقبة المعرفية». ولكي يتغلب على هذا العائق، ينبغي للطالب أن يعيد تنظيم معرفته الرياضية، وإيجاد روابط وبنى جديدة تتبع قوانين الاستدلال المنطقي. ونحن نرى أن المواقف التي تتوافر فيها هذه الشروط، تمكّن المعلم من الكشف عن الموهبة الرياضية بين طلابه ورعايتها.
- تقديم مسألة ذات مستوى صعوبة يفوق قدرات الطلاب العاديين، حيث يطلب إلى الطالب تخطي ما هو متوقع طبيعيّاً من الأطفال في مثل سنّه، وإظهار النضج المبكر الذي يُعدُّ علامة على الموهبة الرياضية.
- المساعدة على إيجاد بيئة صديقة حيث يتنافس الطالب مع نفسه، ويُطلع الأطفال الآخرين على مكتشفاته، ويتعلم من الآخرين. وبذلك، تتاح الفرصة للطلاب الموهوبين في الرياضيات من غير ذوي التحصيل العالي، المشاركة على نحوٍ فاعل في الصف، وتحقيق النجاح.

لا يمكن إيجاد مواقف التحدي بصفتها مهمة تعلُّم بمعزل عن غيرها، حيث يمكن تحقيق إمكاناتها التطورية بصورتها الكاملة فقط ضمن نظام تعليمي متكامل يستند إلى

منهاج صعب شامل. وهذا يفسح المجال لإيجاد بيئة تعلّم تتيح لكل طفل إظهار الحد الأقصى لقدراته.

لذا، فإننا باستخدام نموذج مواقف التحدي لن نكون قادرين على إشراك الأطفال الموهوبين في النشاط الرياضي الحقيقي فحسب، بل مساعدتهم على زيادة قدراتهم العقلية.

وأخيراً، تتيح مواقف التحدي فرصة أخرى للطلاب النابغين: إذ بوسعهم التقدم أكثر على الدوام، والذهاب إلى أبعد من المواقف، وطرح أسئلة جديدة، والبدء باستقصائهم الخاص بهم، إضافة إلى أنهم يصبحون أكثر إبداعاً في أعمالهم الرياضية، وهذا ما يجعل ردة الفعل الرياضية العفوية هذه تظهر في بيئة التعلم بطريقة إيجابية.

ونحن نرى أن هذه السمة من سمات هذا المنحى مهمة من منظور تعليم الرياضيات للأطفال جميعهم. وفي الحقيقة، فإن دراستنا هذه تشجع على اتباع إستراتيجيات تعليمية مختلفة في الرياضيات، إذ لم يعد دور المعلم مقتصراً على إعادة ترجمة المعرفة أو تدريس طرائق حل المسائل، بل أصبح دوره، في مواقف التحدي، وسيطاً بين النقاشات، ومستمعاً إلى أفكار الطلاب، وموجهاً لهم نحو الاكتشاف.

ونحن بمساعدتنا الطلاب على تخطي العوائق المتنوعة، يتعين علينا تشجيعهم على:

- **تنظيم** عملهم الرياضي
- **الاستدلال** الرياضي
- **ضبط** شروط متعددة (التحقق، التعديل، التغيير، إعادة التنظيم، معرفة المتناقضات، تحقق الصحة).
- **اختيار** إستراتيجيات فاعلة وأدوات لحل المسائل **وتطويرها.**
- **التفكر** مليّاً في طرائق العمل الرياضي.
- **إيصال** نتائجهم بطريقة «رياضية» (شفهي/خطي، استخدام الرموز، تقديم تفسيرات صحيحة).

وهكذا يكون بوسعنا تحديد الأطفال النابغين الذين:

- يطرحون أسئلة عفوية تتجاوز المهمة المعطاة.
- يبحثون عن الأنماط والعلاقات.
- يبنون الروابط والبنى الرياضية.
- يبحثون عن مفتاح للمشكلة.
- ينتجون أفكاراً جديدة عميقة.
- يسيطرون على موقف حل المسألة.
- يولون اهتماماً بالتفاصيل.
- يطورون إستراتيجيات فاعلة.
- يتحولون بسهولة من إستراتيجية إلى أخرى، ومن بنية إلى أخرى.
- يفكرون تفكيراً ناقداً.
- يثابرون على الوصول إلى الأهداف.

وفي الوقت ذاته، يمكننا رعاية وإشباع فضولهم ورغبتهم في تعلم المزيد من الرياضيات، وتزويدهم بفرصة التقدم في تعلم الرياضيات، وإيجاد بنى جديدة، وافتراض مسائل جديدة، وبذلك نعزز تطور قدراتهم الرياضية.

وبوجه عام، يُعدُّ هذا المنحى صعباً جدّاً في التدريس، إذ يتعين على المعلم التفكير باستمرار في كيفية تحدي الطلاب، والبحث عن طرق مختلفة لتحفيز عملهم، ويتعين عليه أيضاً إظهار قدر كبير من المرونة، والمقدرة على التصرف بعفوية لتغيير شروط الموقف الصفي، وأن يكون مستعدّاً لحث الطلاب والاستجابة لهم عند طرحهم أسئلة لا يحضره حلُّها فوراً.

إن من شأن الفهم الأفضل لكيفية مساعدة الأطفال ذوي الموهبة العالية على تطوير تفكير رياضي أكثر عمقاً أن يقودنا إلى تطوير المناحي التعليمية الفاعلة للطلاب جميعاً. وفي اعتقادي، أنه ينبغي لنا أن نتفق مع الملاحظة العامة الآتية التي أوردها يونغ وتاير (Young & Tyre, 1992): «إذا ما تفحصنا عن كثب العوامل التي تؤدي إلى إيجاد النابغين

والعباقـرة والموهوبين وذوي التحصيل العالي والأبطـال وحاملي الأوسمة، فربما نكون أكثر قدرة على زيادة عددهم على نحوٍ كبير.»

قائمة المراجع

Bachelard, G. (1938). *La Formation De L'esprit Scientifique*. Paris: Presses Universitaires De France.

Bednarz, N., & Poirier, L. (1987). *Les Mathématiques Et L'enfant* (Le Concept Du Nombre)– Bande Vidéo. Montreal: UQAM.

Brousseau, G.(1997). Theory Of Didactical Situations In Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Burjan, V.(1991). Mathematical Giftedness—Some Questions To Be Answered. In F.Moenks, M. Katzko, & H. Van Roxtel (Eds.), *Education Of The Gifted In Europe: Theoretical And Research Issues: Report Of The Educational Research Workshop Held In Nijmegen (The Netherlands) 23–26 July 1991* (Pp. 165–170). Amsterdam/Lisse: Swetz & Zeitlingen Pub. Service.

Dunham ,W.(1990). *Journey Through Genius.* New York: Penguin Books.

Greenes, C. (1981). Identifying The Gifted Student In Mathematics. Arithmetic Teacher, 14–17.

Greenes, C. (1997). Honing The Abilities Of The Mathematically Promising. *Mathematics Teacher,* 582–586.

Kennard, R. (1998). Providing For Mathematically Able Children In Ordinary Classrooms. *Gifted Education International, 13* (1), 28–33.

Krutetskii V. A.(1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children.* Chicago: The University Of Chicago Press.

Kulm, G. (1990). New Directions For Mathematics Assessment. In G. Kulm (Ed.) *Assessing Higher Order Thinking In Mathematics.* Washington, Dc: American Association For The Advancement Of Science.

Lyons, M., & Lyons, R. (1989). *Défi Mathématique. Manuel De L'élève. 3–4–5–6.* Laval: Mondia Editeurs Inc.

Lyons, M., & Lyons, R. (2001–2002). *Défi Mathématique. Cahier De L'élève. 1–2–3–4.* Montreal: Chenelière Mcgraw–Hill.

Miller, R.(1990). Discovering Mathematical Talent. Eric Digest #E482.

Mingus, T., & Grassl, R. (1999). What Constitutes A Nurturing Environment For The Growth Of Mathematically Gifted Students? *School Science And Mathematics,* 99(6), 286–293. Programme De Formation De L'école Québecoise (2001). Québec, 2001.

Renzulli, J. (1977). *The Enrichment Triad Model.* Connecticut: Creative Learning.

Ridge, L., & Renzulli, J. (1981). Teaching Mathematics To The Talented And Gifted. In V. Glennon (Ed.), *The Mathematical Education Of Exceptional Children And Youth: An Interdisciplinary Approach* (Pp. 191–266). Reston, VA: NCTM.

Shchedrovitskii, G. (1968) *Pedagogika I Logika.* Unedited Version (In Russian).

Sheffield, L.(1999) Serving The Needs Of The Mathematically Promising. In L. Sheffield (Ed.), *Developing Mathematically Promising Students* (Pp. 43–56). Reston, VA: NCTM.

Sierpinska, A.(1994). *Understanding In Mathematics,* London: The Falmer Press. Young, P., & Tyre C. (1992). *Gifted Or Able?: Realising Children's Potential.* Open University Press.



عمليات حل المسائل الرياضية لدى الطلاب التايلانديين الموهوبين

معهد تطوير تدريس العلوم والتقنية

سوباترا باتفيزان

مارغريت نيس

ملخص

هدفت هذه الدراسة إلى فحص عمليات حل المسائل التي يستخدمها الطلاب التايلانديون الموهوبون في حل المسائل الرياضية غير الاعتيادية. وقد شارك في هذه الدراسة خمسة طلاب تايلانديين موهوبين، حيث مارس كل واحد منهم طريقة التفكير بصوت عالٍ قبل الشروع في حل ثلاث مسائل غير اعتيادية تركز على نظرية الأعداد (Number Theory) والتوافيق (Combinatorics) والهندسة (Geometry) على التوالي. واشتملت بيانات الدراسة على أشرطة فيديو للتفكير بصوت عالٍ، ومقابلات، وحلول الطلاب المكتوبة، إضافة إلى الملاحظات الميدانية للباحثة. نجم عن هذه النتائج نموذج تايلاندي لعملية حل المسائل التي فصّلت السلوك المتبع في كل مرحلة من المراحل الأربع، وهي: الفهم والتخطيط والتنفيذ والتحقق. وأسهمت السلوكات فوق المعرفية في أنشطة المشاركين في كل مرحلة من هذه المراحل، وقدمت النتائج أيضاً خمس فئات للأدلة ذات صلة بعمليات حل المسائل لدى الطلاب تمثلت في: المعرفة الرياضية المتقدمة، الاستعداد

لاستخدام طرائق حلول بديلة متعددة، تذكُّر المعارف والخبرات السابقة والاستعداد لأخذها في الحسبان، والاعتماد على الوجدان، ودعم الآباء والمعلمين.

خلفية الدراسة

يُعـدُّ حل المشكلات أحد أشـكال التعلم الاستقصائي، حيث تطبـق المعرفة الموجودة فـي موقـف جديـد أو غيـر مألـوف مـن أجـل اكتسـاب معرفـة جديـدة (Killen, 1996; Sternberg, 1995). وتتطلـب المشاركـة فـي حـل المسـائـل تنسيق عمليـات المعرفة وما فـوق المعرفـة، واختيـار الإستراتيجيات المناسبـة وتطبيقهـا، إضافة إلى تعديـل السلوك ليتـواءم ومطالـب المهام المتغيـرة (Montague, 1991). وقد اقترحـت مجموعة متنوعة مـن النمـاذج لوصـف العمليات التـي يستخدمها مـن يحلّون المسائـل منذ البدايـة إلى أن يتمكنـوا من حـل مهامهم. مثـلاً، يتألف نموذج بوليا مـن أربع مراحل، هي: فهـم المسألة، وضـع خطة، تنفيذ الخطة، والنظر إلى الـوراء (Polya, 1957). وقد عدّل كاروفالو وليستر (Carofalo And Lester, 1985) أخيـراً نمـوذج بوليا، بإضافة مكونـات المعرفة وما فوق المعرفة موضحة في أربع مراحل على النحو الآتي: التوجه، التنظيم، التنفيذ، والتحقق. وقدم منتاغو وأبلجيـت (Montague And Applegate, 1993) نموذجاً يركز على سبع عمليات معرفية، هي: (القراءة، إعادة الصياغة، التصور، الافتراض، التقدير، الحساب، والتحقق، إضافة إلى ثلاث عمليات فوق معرفية، هي: (التعليم الذاتي، والاستجواب الذاتي، والمراقبة الذاتية). وقد أكد نموذجان فقط، هما نموذج غاروفالو وليستر (Garofalo And Lester) ونمـوذج مونتـاج وأبليجيت، على استخـدام الطلاب الموهوبين العمليات فـوق المعرفية في الأدب. وقد أشارت البحوث التي أجريت على هذه النماذج إلى استخدام الطلاب الموهوبين إستراتيجيـات فوق معرفية في حـل المسائل. وأشارت أيضاً إلـى استخدام جوهري للتعليم الذاتـي (Self-Instruction) على امتداد المسألة، إضافة إلى الاستجواب الذاتي (Self-Questioning) علـى نحـوٍ متكرر فـي أثناء قـراءة المسألة وبعد قراءتهـا، وكذلك أنشطة التقويم والمراقبة الذاتية الفاعلة.

يُعـرّف الطلاب الموهوبون في الرياضيات أنهم الطلاب القادرون على القيام بعمليات رياضيــة تماثـل تلك التــي يقوم بهــا الطلاب الكبــار، حيــث يستطيعون استخـدام عمليات تفكيــر نوعية مختلفة فــي حــل المسائـل (Sowell, Zeigler, Bergwell, & Cartwright, 1990). وفــي الوقــت ذاته، تتطلب عملية الحــل الناجحة للمسائــل الرياضية قدرة الطلاب علــى اختيار الإستراتيجيــات المعرفية الملائمــة، واستخدام فهم المسألــة وتمثيلها وحلها (Mayer, 1992; Schoenfeld, 1985). تتضمــن هذه القدرات المعرفة فوق المعرفية التي تعدُّ ضرورية للتعلم وحــل المسائل عالية المستوى(Brown, 1978). وقد أثبتت البحوث أن المعرفــة والعمليات فوق المعرفية تساعد من يحلون المسائل ليصبحوا أكثر كفاية في تناول المسائــل من جوانب ثلاثة، هي: (أ) تحديد المسألــة وتكوين تمثيل عقلي لعناصرها، (ب) اختيار خطط وإستراتيجيات معرفية ملائمة لتحقيق الهدف، (ج) تحديد العوائق التي تعيق عمليــة التقدم والسيطرة عليهــا (Davidson & Sternberg, 1998). وتشتمل العملية فوق المعرفية لحل المسائل على عمليات تخطيط مسائل محددة ومراقبتها وتقويمها لا سيما في تكوين التمثيلات العقلية، واختيار الإستراتيجيات الملائمة (Flavell, 1992; Mccormick, 2003). يؤدي استخدام العمليات فوق المعرفية إلى دعم من يحلون المسائل في أثناء عملية الحــل، ويحسّن قدراتهم نحو تحقيق الهدف، إذ كلمــا زادت سيطرتهم على الإستراتيجيات التــي يستعملونهــا ومراقبتها، أصبحت قدرتهــم على حلها أفضــل (Furtunano, Hecht, Tittle, & Alvarez, 1991; Kapa, 1998; Swanson, 1990).

تُعــرَّف المسائــل غيــر الاعتيادية أنها تلــك المسائل التــي لا يكون الطــلاب فيها على معرفة بمواقف المسألة، ولا يتوقع أن يكونوا قد حلّوها في الماضي، أو صادفوها في المنهاج بانتظــام. وتستلــزم المسائل غير الاعتياديــة مرونة في التفكير وامتــداداً للمعرفة السابقة، ويمكــن أيضــاً أن تشتمل علــى مفاهيم وأساليــب ستُدرَّس بوضوح في مراحــل متأخرة، وقد تتضمن اكتشاف روابط بين الأفكار الرياضية. واكتشف الباحثون أن المسائل الأكثر صعوبة تحتــوي علــى إمكانــات تفعيل وتنشيــط الأداء فوق المعرفــي إلى حد يتمكن فيــه من يحلون المسائــل من تنظيــم عملياتهم المعرفية وضبطها علــى نحوٍ واعٍ. وإضافــة إلى ذلك، يحبذ الطــلاب الموهوبــون حل المسائل غيــر الاعتيادية؛ لما تحويه من صعــاب في التعامل معها.

وهكـذا، فمن المرجح أن تساعـد المسائل غير الاعتيادية على تنشيـط الطلاب الموهوبين لإظهار قدراتهم العالية في حل المسائل.

درس الباحثون كيفية حل طلاب الثانوية الموهوبين المسائل الرياضية غير الاعتيادية. وأشـارت النتائج التي توصلوا إليها إلى أن الطـلاب الموهوبين يقضون وقتاً أطول في قراءة مسائل الرياضيات، وإعادة صوغها بمفرداتهم الخاصة، حيث تعينهم قدرة إعادة الصياغة هـذه علـى فهم المسألة، وتشير أيضاً إلى إحدى السمات التي يتميزون فيها عن الآخرين في حـل المسائل؛ فهم أكثـر قدرة على التعبيـر اللفظي من غيرهم، وتـزداد قدرتهم هذه عند مواجهتهـم مسألة أكثر تعقيداً. إنهم يتذكـرون النظريات لتوليد معلومات جديدة، ويطبّقون أيضـاً المعرفة السابقة على المسألة، ويستعملونها بهـدف الوصول إلى معرفة إضافية ذات صلـة بالمسألـة (Lawson & Chinnappan, 1994; Sriraman, 2003). ويحدد الطلاب الموهوبـون فرضياتهـم في المسألة، وكثيـراً ما يضعون معادلة أو حلـولاً حسابية بعد قراءة المسألـة، وعادة ما يلجؤون إلى تقسيم المسألة إلى مسائـل فرعية. ويحددون أيضاً الهدف قبـل وضع خطة لحل المسألة، ويحلونها بطريقة منتظمـة، ويستعملون إستراتيجيات فاعلة. ويعيـدون أيضاً حل المسألة من خلال قراءتها كلهـا، ويعيدون عمليات الحساب، ويفحصون الخطوات والعمليات ويتحققونها.

وعلـى أي حال، فالمشاركـون في كتابة الدراسة هم من أصحـاب الثقافة الغربية التي تختلـف عن الثقافة الآسيويـة ولا سيما الثقافة التايلاندية، ويقولـون إن الطلاب الآسيويين يتعرضـون للرياضيـات فـي المدرسة والبيت على نحـو يفوق ما يتعرض لـه طلاب الولايات المتحـدة (Geary, 1996)، ويـؤدي أيضاً الجانب الاجتماعي، مثـل الثقافة واللغة، دوراً في القـدرة على حـل المسألة، ولا سيما مـن حيث إدراكهـا وفهمها وتعريفها وتمثيلهـا. وارتأوا أيضـاً أن الجانـب الاجتماعي ربمـا يعين على تسهيل فهـم المسألة والتفكيـر التباعدي في الحلـول الممكنـة (Pretz, Naples, & Sternberg, 2003). ومـن المنطقي أن نفترض أن الاختلافات الثقافية قد تقود الطلاب إلى الأداء بطرق متباينة عند انهماكهم في حل مسألة رياضية.

وإذا نظرنـا إلى وضع تربية الموهوبين فـي تايلاند، فإننا نلاحظ عدم توافر معرفة أو مصادر كافية لتعزيز تطور قدرات النابغون ورعايتها. وينجم عن هذه المشكلات وجود نظام فاشـل وغير مجدٍ في رعاية الطلاب الموهوبيـن (Office of The National Education Commission– Onec, 2004). يُضـاف إلـى هـذه الصعـاب عدم إجراء عـددٍ كافٍ من البحوث تتعلق بحل المسائل الرياضية لدى الطلاب التايلانديين الموهوبين، حيث إن هناك دراستين فقط ركزتا على تطوير برنامج إثرائي، بدلاً من فهم عملية حل المسألة لدى هؤلاء الطلاب (Klaimongkol, 2002; Thipatdee, 1996). وبناءً على ذلك، فإننا نرى أن هناك حاجـة إلـى دراسة كيفية تفكير طـلاب الثانوية التايلانديين، ومعرفـة الإستراتيجيات التي يستخدمونهـا عنـد حل مسائل غير اعتيادية. أما هدف هـذه الدراسة فيتلخص في تفحص سؤالي الدراسة، وهما:

1. مـا طبيعة عمليات حـل المسألة التي يستخدمها الطـلاب التايلانديون عند حلهم مسائل رياضية غير اعتيادية؟
2. ما السلوكات فـوق المعرفية التي يظهرها الطلاب التايلانديون عند حلهم مسائل رياضية؟

خلفية البحث

من الطرق المستخدمة في تايلاند لتعزيز قدرات الطلاب الموهوبين في الرياضيات، مشاركتهم في أولمبياد الرياضيات الدولي (International Mathematical Olympiad, Imo). ويُعـدُّ هـذا الأولمبياد بطولـة عالمية في الرياضيـات تُعقد سنويّـاً لطلاب المرحلة الثانويـة. وينظر إلـى هذا الحدث بصفتـه إستراتيجية لتعزيز الموهبـة الرياضية وتقويتها (Wieczerkowski, Cropley, & Prado, 2000). وقـد خولـت الحكومـة التايلانديـة معهـد تعزيـز التدريس في العلـوم والتقانـة صلاحية اختيـار الممثليـن التايلانديين لهذه المسابقة السنوية منذ عام 1989. وفيما يتعلق بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات (Thai Mathematical Olympiad, Tmo)، يتعيّـن علـى طـلاب المرحلة الثانويـة النابغين في الرياضيـات مـن أنحاء البـلاد جميعها إتمـام جولتين من الاختبـارات كل سنـة للمشاركة

في المشروع. يركز الاختباران على المسائل الرياضية غير الاعتيادية التي يتضمنها كتاب الصف الحادي عشر وفقاً للمنهاج الوطني. وقد تقدم إلى مشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات في شهر يونيو عام 2005 ما مجموعه سبعة آلاف وتسعمئة واثنان وثمانون طالباً متفوقاً، تقدم منهم ما مجموعه ستة آلاف وثمانمئة وواحد وستون طالباً للجولة الأولى من الاختيار، الذي تضمّن فحص قدراتهم على حل المسائل الرياضية من خلال أسئلة من نوع اختيار من متعدد، وأسئلة ذات إجابات قصيرة. وقد وقع الاختيار على اثنين وأربعين منهم فقط من الجولة الأولى للاختبار ليتقدموا للجولة الثانية، وكانت أسئلة الرياضيات جميعها مفتوحة النهاية، حيث يطلب إلى المشاركين إظهار حلولهم المكتوبة خطيّاً. وأخيراً، اختير أربعة وعشرون طالباً ممن اجتازوا الاختبار الثاني ليشتركوا في مشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات. وأُلحق هؤلاء الطلاب بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات في المعسكر التدريبي في معهد تعزيز تدريس العلوم والتقانة (Institute For The Promotion Of Teaching In Science And Technology, Ipst). وفي أثناء التدريب، اختير ستة طلاب ليمثلوا تايلاند في أولمبياد الرياضيات الدولي. وقد أُجريت هذه الدراسة البحثية عندما كان أربعة وعشرون طالباً موهوباً يشاركون في المعسكر التدريبي لمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات.

المشاركون

استخدم الباحث العينة القصدية في اختيار المشاركين من مجموع الطلاب الموهوبين الأربعة والعشرين داخل المعسكر. وعلى الرغم من اختيارهم بموجب اختبار القبول، حيث كان محتوى المنهاج مخصوصاً بالصف الحادي عشر، فإن صفوفهم تفاوتت من الثامن حتى الثاني عشر. وهكذا، فقد تباينت مستويات الطلاب من حيث الخلفية الرياضية. وعلى الرغم من ذلك، فهم يمتلكون خبرات سابقة في حل المسائل الرياضية غير الاعتيادية عبر امتحان القبول الذي طلب إليهم في حينه أن يكتبوا حلولاً مكتوبة. وبالنظر إلى التعريف المستخدم للطلاب الموهوبين في هذه الدراسة، فقد اقتصرت مشاركة الطلاب على الصفوف الثامن والتاسع والعاشر، مع أن هؤلاء الطلاب كانوا قادرين على حل مسائل

رياضيــة كتلك التي يحلها عادة الطلاب الأكبر سنّــاً (Sowells, Et Al., 1990). واستخدم الباحــث أيضاً معايير أخرى في تحديد الطلاب ذوي الخلفية المماثلة في الرياضيات، حيث أُخــذ في الحسبان مــا يأتي: (أ) حصـول الطــلاب على العلامات نفسها فــي الجولة الثانية مــن امتحان القبول بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيــات، (ب) عدم مشاركتهم بالمعسكر التدريبــي فــي العام السابق، و (ج) كونهــم في مستوى الصف العاشــر أو أقل. وبذلك، فقد اختيــر خمسة طلاب ممــن انطبقت عليهم المعايير من الطلاب السبعة مع ضمان التنوع في المدارس، والصفوف، والنوع الاجتماعي، والعمر. وكان المشاركون أربعة ذكور وفتاة واحدة، تراوحت أعمارهم حين مشاركتهم بين ثلاثة عشر عاماً وثلاثة شهور، وستة عشر عاماً وستة شهــور، وكانوا ملتحقين بأربــع مدارس وصفوف مختلفة (الثامــن والتاسع والعاشر). كانت ثــلاث مدارســ منها في العاصمة التايلاندية، بانكوك، في حيــن كانت مدرسة واحدة خارج العاصمــة. وقــد أُعطي المشاركون أسماءً مستعارة، مثل: براديــا، سيرا، وودي، نيبا وساكدا (Pradya, Sira, Wude, Nipa, Sakda) لغرض إعداد تقرير النتائج.

اختيار المسألة

تألفــت المسائــل الرياضية لهــذه الدراسة من ثــلاث مسائل غير اعتياديــة، اختيرت وعُدّلــت من مصــادر متعددة، منهــا: مجلات الرياضيــات، والكتب المدرسيــة، واختبارات المسابقات (Apssimon, 1991; Covington, 2005; Gardiner, 1987; Krantz, 1996; Posamenteir & Schulz, 1996; Posamenteir & Salkind, 1996; Schoenfeld, 1985). ودرســ الباحث أيضاً منهاج التدريب قبل وضع مجموعة من المسائل وفقاً للمعايير الآتية:

- تكــون المسائــل غير اعتيادية، أي لا تكون مألوفة لــدى الطلاب، ولم يسبق لهم أن حلّوها من قبل، ولم يسبق لهم أيضاً أن وجدوا مثلها في منهاج الرياضيات. تتطلب المسائــل غير الاعتيادية مرونة في التفكير، وتوسيعاً للمعرفة السابقة، وقد تشتمل أيضاً على مفاهيم وأساليب ستُدرّس صراحة في مرحلة لاحقة، إضافة إلى أنها قد تتضمن اكتشاف الروابط بين الأفكار الرياضية.

- تشمل المسألة مجالات المحتوى الرياضي فيما يتصل بنظرية الأعداد والتوافقيات (Combinatorics) والهندسة، التي تمثل الموضوعات الرئيسة لتدريب الطلاب على أولمبياد الرياضيات الدولي.
- تتحدى المسائل عمليات تفكير الطلاب، أي أنها يجب أن تختبر المستويات العليا لمجال المعرفة وفقاً لتصنيف بلوم المتمثل في: التحليل والتركيب والتقويم (Bloom, Et Al., 1956).
- لا تتطلب الحلول مهارات ومفاهيم رياضية لم يسبق للطلاب تعلمها بموجب المنهاج الوطني.

تألفت مجموعة المسائل من ثلاث عشرة مسألة: ست منها عن نظرية الأعداد، وثلاث منها عن التوافقيات، في حين كانت المسائل الأربع الأخرى عن الهندسة. اختبرت مجموعة المسائل من حيث الصدق من سبعة خبراء ضالعين في الرياضيات وفي تدريسها. اختار الخبراء مسألة في كل مجال، واقترحوا تغذية راجعة مهمة للدراسة. أما المسائل الثلاث التي استخدمت في الدراسة فهي موضحة في الشكل (1:8).

- **المسألة الأولى:** هل يأتي يوم الجمعة الثالث عشر Friday the 13th كل عام؟ وضح ذلك.
- **المسألة الثانية:** هناك 15 فريقاً يشاركون في بطولة ما. ويلعب كل فريق مع كل فريق من الفرق الأخرى مرة واحدة فقط. ويحصل الفريق على ثلاث نقاط للفوز، ونقطتين للتعادل، ونقطة واحدة للخسارة. وعند انتهاء المباراة، يحصل كل فريق على مجموع نقاط يختلف عن الآخر. وتكون مجموع نقاط الفريق الذي يحصل على أقل مجموع للنقاط 21 نقطة. اشرح لماذا يكون لدى الفريق صاحب أعلى مجموع نقاط تعادل واحد على الأقل.
- **المسألة الثالثة:** ABC مثلث متساوي الساقين، حيث الضلع AB = AC. والزاوية ABC تساوي 20 درجة. D نقطة على الساق AB، حيث الزاوية ACD تساوي 60 درجة. E نقطة على الساق BC، حيث الزاوية EAC تساوي 50 درجة. جد مجموع الزاوية CDE.

شكل 1:8 المسائل الثلاث المستخدمة في الدراسة

جمع البيانات

جُمعـت البيانات على أساس فردي بين المشاركين والباحث. وحدد كل مشارك موعداً لثلاثـة لقاءات لحل واحدة من ثـلاث مسائل باستخدام طريقة التفكيـر بصوت عالٍ، تبعها مقابلـة شخصية. وكانت مواعيد المقابلات أسبوعية في أثنـاء عملية التدريب، وكانت هذه المقابلات تتم قبل التدريب أو بعده. وعرض الباحث في المقابلة الأولى صورة عامة للمشارك عـن الإجـراءات الواجب اتباعها ولا سيما طريقة التفكير بصوت عالٍ. حيث يتأمل كل طالب فـي التعليمات، ويطرح أي سؤال قبل البدء بحل عينـة من المسائل. وتستغرق عملية التدرب علـى طريقة التفكير هذه مدة خمس عشرة دقيقة. وقد أعاد الباحث تشغيل شريط الفيديو، وناقش إستراتيجيات تطوير مهارات المشارك لإتقان هذا الأسلوب.

ومن ثم أُعطي المشاركون المسألة الأولى وبدؤوا بقراءتها بصوتٍ عالٍ، وطرحوا أسئلة ليتحققـوا فهم الكلمات الواردة فيها قبل البدء بحلها. ولم يطرح الطلاب جميعهم أسئلة في هذه المرحلـة. وتحدّث المشاركون بصوت عالٍ موضحيـن تفكيرهم وهم يكتبون الحل على الورقـة، وقد أُعطـوا الوقت الذي يريدون لحل كل مسألة. وكان معـدل الوقت الذي استغرقه المشاركون نحو عشرين دقيقة لكل مسألة، تبعها مقابلة مدتها خمس عشرة دقيقة. ومع نهاية كل لقـاء، كان الباحث يصرّ على كل مشارك عـدم الإفصاح عن طبيعة المسائل للمشاركين الآخرين.

النتائج

حُللـت البيانات المدونة لتكوّن في مجموعها نموذجـاً لعملية حل المسألة لدى الطلاب التايلاندييـن. وقـد اتُّخذ لهذه الغايـة نموذج كاروفالـو وليستر ونمـوذج مونتاغيو وأبلجيت مرجعين لتحليل الجوانب فوق المعرفية، حيث يركز النموذجان على السلوكات فوق المعرفية، إضافـة إلى استعمالهما وصف عمليات حل المسألة في الدراسة لدى الطلاب النابغين. ولما كان تصنيـف السلوكات بصفتها معرفيـة وفوق معرفية على نحوٍ دقيق، يُعدُّ أمراً صعباً، فقد استخـدم بعض الباحثيـن مصطلح معرفي- ما وراء معرفي. ولأغراض هذه الدراسة، فقد ربطت هذه السلوكات بمراحل حل المسألة، وحددت على أنها عمليات فوق معرفية. وقد نجح

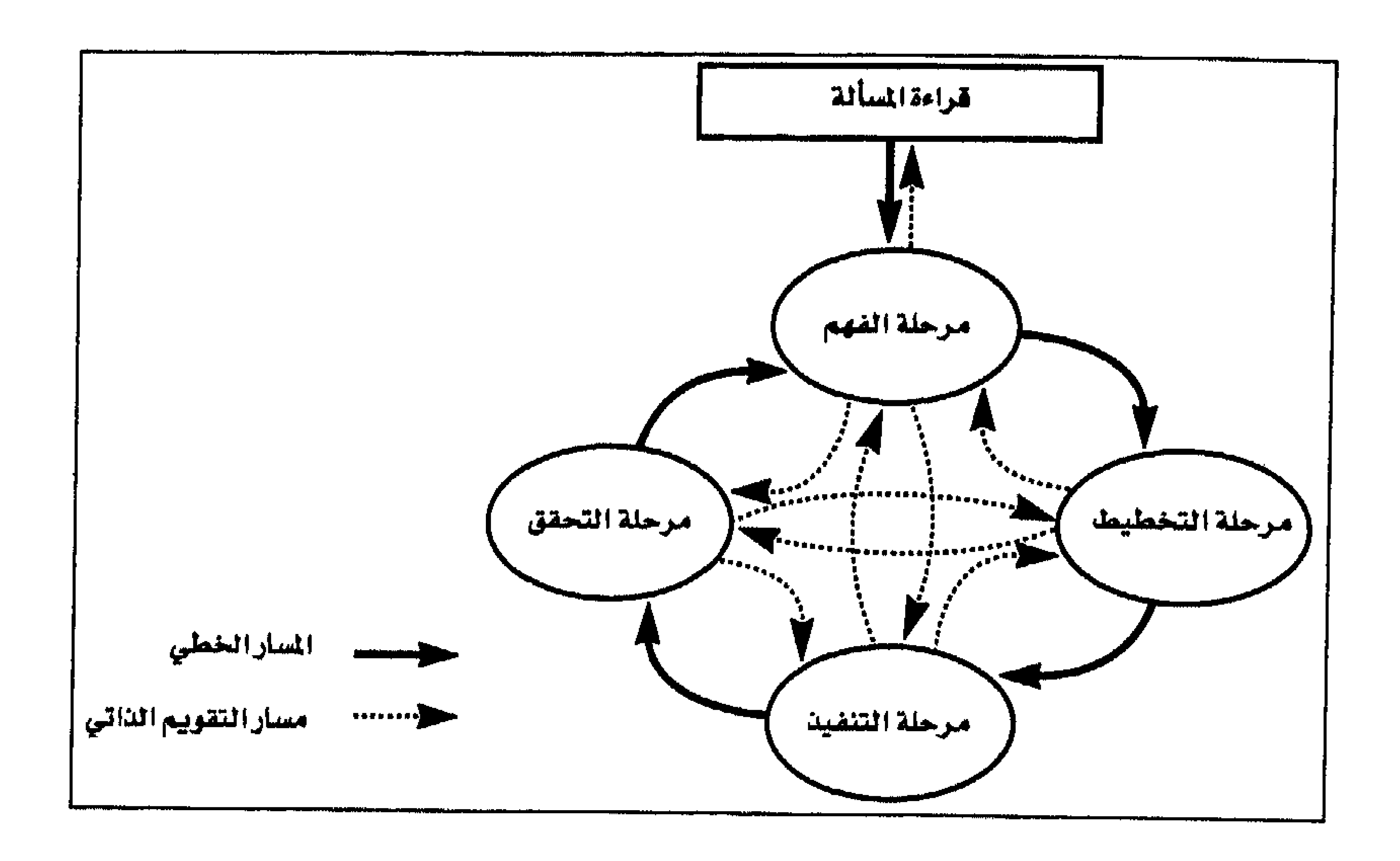
الطلاب النابغون في هذه الدراسة عموماً في عرض عملياتهم لحل المسائل الرياضية غير الاعتيادية، إذ قد حلوا المسألتين الأولى والثانية دون أدنى تردد، على الرغم من أن بعضهم لم يحل المسألة الأولى بصورة كاملة (حيث نسوا أن يأخذوا في الحسبان السنة الكبيسة في حلولهم). ومع أن اثنين من الطلاب قد واجها صعوبة في التوصل إلى إجابة للمسألة الثالثة في بداية الأمر، فإنهما قد أفلحا في حلها في نهاية المطاف.

نموذج الطلاب التايلانديين لحل المسألة

جرى تصوّر سلوكات الطلاب التايلانديين التي نوقشت ضمن نموذج من أربع مراحل موضحة في شكل (2:8)، أُطلق عليها اسم: الفهم والتخطيط والتنفيذ والتحقق، طُوّرت من دراسة غاروفالو وليستر. وكانت مرحلة الفهم من أهم المراحل في توجيه الطلاب الموهوبين نحو النجاح في حل مجموعة المسائل. بعد قراءتهم المسألة قراءة جهرية، حدد الطلاب الأسئلة التي ينبغي طرحها. وقد ذكر الطلاب معطيات المسألة وفسروها ومثّلوها في صور أو جداول، إضافة إلى تنظيمها تنظيماً منهجيّاً. واستخدم الطلاب أسلوب إعادة قراءة المسألة بهدف تحقق صحة تمثيلاتهم. ولوحظ أن معرفة الطلاب المسبقة كانت ضرورية عند تفسيرهم المعطيات، وعادوا إلى أي مفهوم ذي صلة قبل تطوير خطة الحل، وتضمنت هذه المرحلة أيضاً التأمل في صعوبة المسألة ومألوفيتها.

كانت المرحلة الثانية هي مرحلة **التخطيط**، حيث توصل الطلاب إلى معطيات جديدة، ومثلوا المسائل بصور أو رموز أو جداول، إضافة إلى تنظيمها على صورة خطة، واستخدموا الإستراتيجيات الفاعلة، منها: رسم الصور، أو عمل الجداول، أو البحث عن أنماط عن طريق تطبيق المفاهيم الرياضية ذات الصلة بنظرية الأعداد وأساسيات العد والهندسة في حل المسائل، وقد أُعيد تقويم الخطط وتحقق صدقها، واشتقّت خطط جديدة عندما تبين عدم صدق الخطط الحالية.

أما المرحلة الثالثة فكانت مرحلة التنفيذ، حيث اقترح الطلاب جواباً نهائيّاً عن طريق إجراء حساباتهم في هذه المرحلة، وكتابة جمل رياضية منطقية تدعم خططهم، وأخيراً كتابة النتائج التي توصلوا إليها.



شكل 2،8 نموذج الطلاب التايلانديين لحل المسألة

كانت المرحلـة الأخيرة هي مرحلة التحقق التي تشتمل علـى تحقق الطلاب إجاباتهم المكتوبة. وربما يكونون في هذه المرحلة قد أعادوا قراءة المسألة ليتحققوا حلولهم.

عندمـا كان الطـلاب منهمكيـن فـي حل المسائـل، لم تسـر عملية تفكيرهـم بترتيب خطـي بدءاً من مرحلة الفهم وصولاً إلى مرحلة التحقـق، حيث أظهرت أعمالهم أنهم، وهم ينفـذون كل مرحلة من مراحل الحل، لم يكونـوا يتقدمون بطريقة خطية من المرحلة الأولى إلـى الأخيرة، ومن ثم، فقـد كان من أهم ما توصلت إليه هـذه الدراسة هو أن هذا النموذج ليـس خطيّـاً. وقد استخدم مصطلـح التقويم الذاتي المقتبس من مونتاغـو وأبلجيت في كل مرحلـة؛ لمعرفة متى يراقب المشارك تفكيـره وأعماله، ويظهر سلوكاً وجدانيّاً في أثناء حله المسألـة. وبعبـارة أخرى، فقد أثّـر التقويم الذاتي في أفعال المشاركيـن في كل مرحلة من مراحل النموذج.

المرحلة: الفهم

1. تحديد المسألة
   - قراءة/إعادة قراءة/ إعادة كتابة المسألة والمعطيات والسؤال.
2. تحليل المسألة
   - تمثيل المسألة بصور أو جداول.
   - توضيح/تفسير/تنظيم المعطيات.
   - الربط بالخبرات السابقة.
   - التأمل في المسألة.
3. التقويم الذاتي

المرحلة: التخطيط

1. وضع خطة
   - معالجة المعطيات وتوليدها.
2. قياس الخطة
   - تطبيق المعرفة السابقة/المفاهيم الرياضية، والنظريات.
   - استخدام الإستراتيجيات (البحث عن الأنماط/عمل جداول).
   - التنبؤ بالإجابات الصحيحة/ استخدام التقديرات.
3. مراجعة الخطة
   - تحديد هل كانت الخطة ذات معنى.
   - تغيير الخطة إذا لم تنجح.
4. التقويم الذاتي

المرحلة: التنفيذ

- تنفيذ الحسابات
- بناء جمل رياضية منطقية
- كتابة النتائج/ الإجابة
- التقويم الذاتي

المرحلة: التحقق

- تفحص معقولية النتائج.
- أعد قراءة المسألة والحلول لكي تتحققها.
- انتقل إلى خطة جديدة بناءً على تحقق النتائج.
- التقويم الذاتي .

شكل 8 : 3 وصف مراحل حل الطلاب التايلانديين المسألة

وصف عمليات حل الطلاب التايلانديين المسألة

يظهر الطلاب في أثناء مرحلة الفهم سلوكاً محدداً في محاولتهم لفهم المسألة بعد قراءتها بصوت جهوري. تشتمل أعمالهم على قراءة المسألة، وكتابة و/أو إعادة كتابة المعطيات، وكتابة السؤال باستخدام بعض الكلمات الواردة فيه، وإعادة كتابته. ولما كانت المسألة الأولى على صيغة سؤال قصير جدّاً، فقد أعادوا كتابة السؤال باستخدام بعض الكلمات الواردة فيه. وعندما واجه المشاركون معلومات كثيرة في المسائل الطويلة، حاولوا كتابة المعطيات من خلال فهمهم المسألة. أما في المسألة الثانية، فاستعرض الطلاب معطيات كل جزء على حدة في أوقات مختلفة. وأظهرت تصرفاتهم أنهم لم يأخذوا في الحسبان المعطيات جميعها في وقت واحد. وفكر الطلاب أيضاً في المطلوب في المسألة، ولماذا طُرح.

وود (Wude): عمَّ تسأل المسألة؟ تسأل عن أعلى مجموع للنقاط.
ساكدا (Sakda): لماذا يحصل الفريق الأقل نقاطاً على 21 نقطة؟ ولماذا يجب أن يكون لدى الفريق الأعلى نقاطاً تعادل واحد على الأقل؟

وأما ما يخص المسألة الهندسية كالمسألة الثالثة، فقد كتب الطلاب المعطيات جميعها، في حين كانوا يرسمون صورة لتحقق حصولهم على كل شيء تعرضه المسألة قبل مواصلة حلولهم. وفي الوقت ذاته، أشارت الأشكال التي رسمها الطلاب إلى استعمالهم تمثيلاتهم في عمليات الحل. ولم يكن التمثيل بالصورة مهمّاً لفهم المسألة الهندسية فحسب، بل ساعدهم أيضاً على وضع خطة للحل. ورسم بعض الطلاب أكثر من صورة، وكانوا يكررون رسم الصور إذا أخفقوا في التوصل إلى طريقة لحل المسألة، إذ اعتقدوا أن الصورة الكبيرة تزودهم بتصور أفضل للمسألة وحلها. وأظهرت الدلائل أيضاً تمثيلات أخرى استخدمها الطلاب في عملياتهم لمساعدتهم على فهم المسألة، كعمل جداول أو كتابة تقويم (مفكرة).

نيبا (Nipa): أفكر في التقويم، هناك سبعة أيام في التقويم، أنا أكتب تقويماً الآن.

براديا (Pradya): أعمل أولاً جدولاً للسنة.

حاول الطلاب بعد كتابتهم المعطيات، توضيحها إلى أكبر قدر ممكن، وفي الواقع، كانت إيضاحاتهم مستندة إلى معرفتهم السابقة بالرياضيات. وعلى نحو ما هو الحال في المسألة الثانية، فقد فكروا جميعاً في عبارة «يلعب كل فريق مع الفريق الآخر مرة واحدة فقط». وأشارت تفسيراتهم إلى أنهم يمتلكون فكرة حول أساسيات العدّ.

براديا: حسناً يلعب كل فريق أربع عشرة مرة.

سيرا: خمسة عشر فريقاً يلعبون مع كل فريق آخر، مرةً واحدة. وهذا يعني أن الفريق الأول سيلاقي الأفرقاء الأربعة عشر الأخرى.

نيبا: يلعب كل فريق أربع عشرة مرة.

وودي: دعونا نرى الفريق الأول. يجب أن يلاقي الفريق الأول الفرق الأربع عشرة الأخرى.

ساكدا: أي أن كل فريق يلاقي الأفرقاء الأخرى أربع عشرة مرة. وبذلك، يلعب الفريق أربع عشرة مرة.

كتب الطلاب في المسألة الثالثة المعطيات جميعها، كل جزء على حدة، عندما كانوا يرسمون الصورة. وفي الوقت ذاته، دمجوا معرفتهم السابقة فيما يخص المثلث المتساوي الساقين بالمعطيات والحسابات لمعرفة الزوايا الأخرى وطول الضلعين في أثناء عملية الرسم.

ويلاحظ خلال مرحلة الفهم، أن الطلاب فكروا في المسائل من حيث مألوفية معرفتهم المسألة والصعاب التي واجهوها في أثناء عملهم لفهم المسألتين الأولى والثالثة.

ساكدا: أما ما يتعلق بهذه المسألة، فلم أر مثلها من قبل، الجمعة الثالثة عشرة.

سيرا: كيف نحل هذه المسألة؟ أنا مرتبكة. الجمعة الثالثة عشرة.

نيبا: لا أستطيع حلها.

التخطيط: بحث الطلاب التايلانديون في أثناء مرحلة التخطيط عن خطط حل عن طريق المعطيات، والإتيان بمعلومات جديدة. وعندما وضعوا خطتهم للمسألة الثانية، ركزوا على جملة معينة، ألا وهي: «يحصل الفريق على ثلاث نقاط للفوز، ونقطتين للتعادل، ونقطة واحدة للخسارة.» ساعدتهم هذه الجملة على الإتيان بالمعلومات نفسها، كل لعبة تنتج أربع نقاط.

ثم انتقل الطلاب إلى الجملة الآتية، وهي: (عند انتهاء المباراة، يحصل كل فريق على مجموع نقاط يختلف عن الآخر. ويكون مجموع نقاط الفريق الذي يحصل على أقل مجموع للنقاط 21 نقطة)، وكوّنت هذه الجملة قيداً على خططهم. وقادت عملية التلاعب في المعطيات، والمعلومات الجديدة، هؤلاء الطلاب نحو تحديد الخطط الآتية لمعرفة المجموع الكلي للمباريات المنجزة، ومجموع النقاط التي حصل عليها أعلى فريق قبل إثبات السؤال المطروح (أي، لماذا يجب أن يكون لدى الفريق الأعلى نقاطاً تعادل واحد على الأقل؟).

أوضح الطلاب الأسباب الكامنة وراء خططهم للمسألة الأولى على النحو الآتي: بدأت خطة وودي بتحديد يوم الجمعة في الأول من يناير، وبحث بعد ذلك عن الجمعة الثالثة عشرة في العام نفسه. استمر في بحثه بتحريك الأول من يناير إلى السبت فالأحد وهلم جرّا، إلى أن حدد سبع حالات للسنة (السنة التي يكون فيها عدد أيام شهر فبراير ثمانية وعشرين يوماً)، وعلى نحوٍ مماثل للحالات السبع الأخرى للسنوات التي يكون عدد أيام شهر فبراير فيها تسعة وعشرين يوماً. وخططت نيبا في البداية لحل هذه المسألة مستخدمة التناقضات كما قالت، «كيف سأحلها؟» أعتقد أن يوم الجمعة الثالث عشر يحدث سنويّاً، أو أفترض عدم حدوثه سنويّاً، وعندئذٍ أجد التناقض. «بينما لم ينته بها الأمر إلى استخدام هذه الطريقة، فقد درست مجموعة متنوعة من المسائل الرياضية لتحديد طريقة حل المسألة، حيث قالت: «أتُعدّ هذه المسألة مسألة توافقيات أم مسألة نظرية أعداد؟» لقد وجدت الآن طريقة للحل.

واجـه بعض الطلاب صعوبة في وضـع خطط للمسألة الثالثة. وفي الوقت ذاته، أشارت الأدلـة إلـى محاولـة بحثهـم عن طرق متعـددة لحل هـذه المسألـة. إذ حاول ساكـدا حلها باستخـدام الهندسـة الإقليدية وعلم المثلثات. وقـد بحث عن طرق متعددة لحـل المسألة، كرسم خط ورسم دائرة واستعمال قانون الجيوب (Law of Sines). وقام أيضاً باستحضار ما تعلمه في اليوم السابق عندما توصل إلى خطة حل تستخدم الفرجار في رسم الدائرة التي تمـر بالنقطتيـن (G, D)، وتلتقي مع الساق (BC) عند النقطـة (F). وواجهت نيبا صعوبة وهـي تدرس كثيراً من الخطط للمسألة الثالثة، حيث رسمت خطّاً عموديّاً وخطّاً موازياً، لكن هذين الخطين لم يؤديا الغرض. وأخيراً، تمكنت من التوصل إلى طريقة لحل المسألة، حيث رسمت الخط (C, F) وحصلت على الجواب.

تنبأ الطلاب بالحل عندما وضعوا خطة للمسألة الأولى. مثلاً، اعتقد كل من نيبا وسيرا وبراديـا أن يوم الجمعة الثالث عشر يحـدث كل سنة، وكان سكادا يعرف من خبرته السابقة أن ذلك يحدث كل عام.

أشار الطلاب عندمـا وضعوا الخطط إلى المفاهيم الرياضية التي اعتقدوا أنها يمكن أن تستعمـل في خططهم، فقد فكّر سكادا في مبدأ برج الحمام، لكنه لم يستخدمه في خطة الحل، في حين استخدم وودي نظرية الباقي للعدد 7 للمسألة الأولى، وعلم المثلثات للمسألة الثالثـة. وأشارت هذه المناحـي إلى استخدام الطلاب معرفتهم الرياضيات في الحلول التي قدموها.

ساكدا: أو ربما نحتاج إلى استخدام مبدأ برج الحمام.
وودي: أخذت التاريخ في الحسبان باستخدام نظرية الباقي للعدد 7.
وودي: أفكر في كيفية استخدام علم المثلثات في حل هذه المسألة.

عند تقويم الطلاب لخطةٍ ما، طبّقوا معرفتهم السابقة بنظرية الأعداد وأساسيات العد والهندسـة، حيث استخدموا مفهوم الباقي في المسألة الأولى؛ ليظهروا أن يوم جمعة الثالث عشـر (Friday 13) يحدث كل عام، حيث وضـع وودي الأول من يناير بصفته يوم جمعة، ثم أخـذ يبحـث عن يوم جمعة الثالث عشر فـي العام نفسه، وأي جمع أخـرى في العام نفسه لا

يصــادف فيها يوم الجمعة الثالث عشــر، وواصل هذه العملية بنقله اليوم الأول من يناير إلى السبــت فالأحد وهلّم جــرّا، إلى أن حصل على سبع حالات للسنة التــي يكون عدد أيام شهر يناير فيها ثمانية وعشرين يوماً، وسبع حالات أخرى للسنوات التي يكون عدد أيام شهر يناير فيها تسعة وعشرين يوماً.

تمثّــل هدف الطلاب في المسألــة الثانية في محاولة إثبات، لمــاذا يجب أن يكون لدى الفريــق الحاصــل على أعلى عدد من النقاط تعادل واحد على الأقل. ومع أنهم أثبتوا حلولهم بطريقــة البرهان المستندة إلى التناقضات، فإن استدلالاتهم قد تباينت. وقد عدّ براديا أن الفريــق الحاصل علــى أعلى عدد من النقاط قــد لعب أربع عشرة مــرة، وحصل على خمس وثلاثيــن نقطة، وعلّل ذلك بقوله أنه إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، فسيكون لدى الفريــق فوز وخسارة فقط، ومــن ثم، يجب أن يكون عدد النقاط فرديّــاً؛ لوجود ثلاث نقاط للفــوز أو نقطــة واحدة للخسارة. وعندما ضُرب العدد الزوجــي في العدد الفردي تبين له أن الناتــج كان عــدداً زوجيّاً. ولمّا كان العــدد 14 هو عدداً زوجيّاً، فإن مجمــوع النقاط النهائي يجب أن يكون زوجيّاً، لكن العدد 35 عدد فردي.

فــي حيــن اعتقدت سيرا أنه إذا لــم يحصل هذا الفريق على أي تعــادل، فعندئذٍ يجب أن يفــوز الفريــق إحــدى عشرة مــرة، ويخسر ثلاث مــرات بحيث تكون النتيجــة على النحو الآتــي: 36=3+33 نقطة. وتعني هــذه النتيجة أن الفريق الحاصل علــى أعلى نقاط دون أي تعــادل يجــب أن يحصل على ســت وثلاثين نقطة علــى الأقل، لكن هذا الفريــق حصل على خمســ وثلاثين نقطة فقــط. أمّا نيبا، فقد افترضــت أن الفريق لم يحصــل على أي تعادل، فوضعــت المعادلة الآتية التي تمثل النقــاط عندما يلعب الفريق أربع عشرة مرة ويفوز بـ(x) مــن المــرات: $3x + (14 - x) = 14 + 2x = 2(7 + x)$ نقطة. ولاحظت أن $2(7+x)$ عدد زوجيّ، وأن 35 عدد فردي.

افترض وودي أن القيم x, y تشير إلى عدد مرات الفوز والتعادل. وبعد أن حل المعادلات تبيّــن لــه أن قيــم $y = 21 - 2x$، وأن $21-2x$ عدد فردي، وأن قيمة x كانت أكبر من صفر؛ وبذلــك، توصــل إلى أن $(y \geq 1)$. في حين عدّ سكادا أن مجموع نقاط الفريق الكلية ستكون

اثنتيـن وأربعين إذا فـاز في المباريات جميعها. وفي كل مرة يخسر فيها الفريق ينقص عدد نقاطه بواقع نقطتين من أصل اثنتين وأربعين نقطة، لكن مجموع نقاطه كان خمسة وثلاثين. وعلـى هذا، تكون هذه النتيجـة مستحيلة، أي حصول الفريق على خمسـ وثلاثين نقطة إذا نقص رصيده بواقع نقطتين من مجموع النقاط الاثنتين والأربعين مع كل خسارة.

طبّـق وودي قانـون الجيوب علـى المسألة الثالثة. وبهـذا التطبيق، توصـل إلى معادلة المثلثـات، وحاول معرفة قيمة الزاوية (CDE) ومع ذلـك، لم يحل هذه المعادلات. ولجأ إلى استخـدام طريقة التجربة والخطأ، بدلاً عن ذلك. وظل يغيّـر قيمة الزاوية في المعادلة إلى أن توصل إلى الحل.

يلاحـظ في مرحلة التخطيط، استعمال الطلاب إستراتيجيات ذات كفاية كبيرة، مثل: عمـل الجـداول، واستخدام الرمـوز، والبحث عن أنمـاط لتمثيل المعلومـات، حيث افترض براديـا في المسألـة الأولى اليوم الخاص بتاريخ 13 يناير واستخـدم المتغير x ليمثله، حيث مثل المتغير x الأحد أو الاثنين أو الثلاثاء أو الأربعاء أو الخميس أو الجمعة أو السبت، ووضع الباقي الذي وجده في الجدول. أما سكادا، فرسم جدولاً يحتوي على الشهور وعدد الأيام في ذلك الشهر، والباقي لحل المسألة الأولى.

استخـدم ثلاثـة طلاب، هم: سيـرا، وودي ونيبا الرمـوز عند وضع معـادلات للمسألة الثانيـة، واستخدم الطلاب أيضاً متغيرات لتمثيـل قيمة الزاوية التي كانوا يحاولون معرفتها في المسألة الثالثة. وعندئذٍ بدؤوا بمقارنة هذه الزاوية بغيرها من الزوايا، وبحثوا أيضاً عن أنمـاط عندمـا حلوا المسألة الأولى. مثلاً، بحث وودي عن نمط يوم الجمعة الثالث عشر بعد أن وضع الأول من يناير بصفته يوم جمعة، وبحث عن أيام الجمع الأخرى في شهر يناير بِعَدّ الأيـام يوماً يومـاً، وأوضح الأربع عشرة حالة التي يقع فيهـا الأول من يناير في يوم الجمعة، السبت، الأحد....... الخميس، وذلك للسنوات التي يكون فيها عدد أيام شهر فبراير ثمانية وعشرين يوماً، والسنوات التي يكون عدد أيام شهر ينـاير فيها تسعة وعشرين يوماً.

وتبيّن وجود أدلة تثبت أن الطلاب قد تحققوا جدوى خططهم، وأنهم بحثوا عن خطط فاعلة، وأنهم كانوا يغيرون من خططهم في أثناء هذه المرحلة.

ساكدا: أربع عشرة حالة فقط. هل من المفيد كتابة مفكرة؟ ليس بالأمر الجيد فعل ذلك.

وودي: ثمة طرق أخرى أسهل من هذه الطريقة؟

براديا: في الخطوط يتعيّن عليّ أن أمدّها؟ هل هو الخط الممدود الذي يُعدُّ الأكثر فائدة للحصول على الإجابة؟ أي الخطوط أفضل؟ حسناً، قد يكون هذا الخط جيداً.

التنفيذ: نفّذ الطلاب في أثناء هذه المرحلة العمليات الحسابية عن طريق تطبيق الصيغ الرياضية للوصول إلى الجواب النهائي. وكما هو الحال في المسألة الثانية، فقد كتب ثلاثة طلاب «جمع 15 و 2» عندما حسبوا عدد المباريات في هذه المسابقة. وتشير هذه الجملة إلى معرفتهم المعادلة ذات الحدين $C_{(15,2)}$. ويلاحظ أن نيبا لم تذكر هذه الكلمات، لكنها حسبت النتيجة بالطريقة ذاتها. فيما حسب سيرا النتيجة عن طريق إيجاد مجموع تسلسل المباريات التي أقيمت، وهو $105=2/(14\times15) = 1+2+3+....+12+13+14$ = مرات». واستخدم الطلاب كافة مجموع صيغة التسلسل الحسابي لحساب مجموع التسلسل $21, 22, 23,....,35$ في حلهم هذه المسألة. وحل بعض الطلاب معادلات للتوصل إلى متغير غير معروف كما فعل كلّ من وودي وسيرا في المسألة الثانية.

وودي: نحصل من هاتين المعادلتين على: $2x+y=21$

سيرا: نطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى فنحصل على:

$2a+b\geq21$. آه...لحظة من فضلك، إذا افترضنا أن الفريق صاحب أعلى نقاط ليس لديه أي تعادل، فهذا يعني أن $B=0$. وعندئذٍ نحصل على: $3a+c\geq35$ و $a+c=14$. ولما كانت $2a\geq21$، فإذن $a\geq10.5$.

عادةً ما استخدم الطلاب عبارات رياضية منطقية تدعم خططهم قبل كتابة النتيجة أو الجواب النهائي.

نيبا: إنهـا تحدث كل عـام، لأنني أعتقد أن الثالث عشـر من يناير يصادف يـوم الجمعة، في حين يقـع الثالث عشر من الأشهـر الأخرى في بقية الأيـام الستة. وبناءً عليه، هناك يوم جمعة يقع في الثالث عشر في كل سنة.

سيرا: إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، يجب أن يفوز إحدى عشرة مرة ويخسر ثلاث مرات كي يحصل على النتيجة 36 = 3+33 نقطة. وهـذا يعنـي، أن الفريق الحاصـل على أعلى النقـاط دون أي تعادل، يجـب أن يحصل على مجموع نقاط يسـاوي 36 في حده الأدنى، لكنه حصل على 35 فقط، وهذا تناقض واضح. وبناءً عليه، يجب أن يكون لدى الفريق صاحب أعلى نقاط تعادل واحد على الأقل.

التحقق: فحص الطلاب التايلانديون في أثناء المرحلة الأخيرة وهي مرحلة التحقق، عملياتهـم ونتائجهم أحيانـاً، للتحقق أن الحل ذو معنى. وكانوا عـادة يراجعون خطط الحل عندمـا لا تنجح هذه الخطط، وأعادوا فحص ما عملوه، وكانـوا قادرين على توضيح أسباب الحلول التي قدموها. وعندمـا تحققوا صحة الحلول، أعادوا قراءة المسألة، وتحققوا صحة الحلول المكتوبة باستخدام عمليات دورية للتثبت من الخطة الموضوعة من حيث فائدتها في حـل المسائل. وكانت نيبا الطالبة الوحيدة التي أولت اهتماماً بتحقق إجابة المسألة الثانية. وقد توقفت عن الكلام في أثناء هذه المرحلة ثلاث دقائق إلى أربع. لذا، طلبت إليها الباحثة أن تتحدث بصوتٍ عالٍ بما كانت تفكر فيه.

الباحثة: بمَ تفكرين؟

نيبا: أتفحصـ إجابتـي، أتفحصـ ما كتبت، أهـو صحيح أم خطـأ؟ عاودت قراءة السؤال، ثم قرأت إجابتي مرة أخرى، والآن انتهيت من كل ذلك.

ومـع أن الطلاب الآخرين لـم يظهروا أنهم تحققوا إجاباتهم على نحوٍ مباشر، فإن من الواضح أن نيبا قد فعلت ذلك، وتحقق الطلاب أيضاً ما فعلوه في الخطة قبل تأكيد إجاباتهم.

وودي: لقد سبق لي أن تحققت الحالات كلها، أربع عشرة حالة، تحدث الجمعة الثالثة عشرة في الحالات جميعها، وبناءً عليه، فهي تحدث كل عام.

برادیا: حصلنا عليها جميعاً، لدينا اثنا عشر شهراً في السنة.

وتثبّت وودي أيضاً من عملياته الحسابية مرة أخرى بعد حصوله على النتيجة باستخدام صيغة المعامل ذي الحدين لمعرفة مجموع المباريات التي أُقيمت، ثم أعاد كتابة النتيجة لتحقق صحتها.

وودي: هل هي صحيحة؟ صحيحة. هل هي مجموع المباريات البالغ عددها 105 مباريات؟

بعد تنفيذ سكادا حساباته لمعرفة عدد المباريات التي أُقيمت، لاحظ أن النتيجة أكبر كثيراً مما قاله: «إنها كبيرة جدّاً، هل أخطأت في مكان ما؟ هناك 105 مباريات لخمسة عشر فريقاً». عند هذه النقطة، تحقق الأمر ليتأكد أن إجابته ذات معنى. ومع ذلك، لم يظهر أي طريقة محددة لتحقق الإجابة.

التقويم الذاتي: إضافة إلى المراحل آنفة الذكر جميعها، أظهر الطلاب مراراً عبارات تشير إلى التقويم الذاتي، تعينهم على مواصلة حل المسألة، إلى أن تمكنوا من إنجاز المهمة. لقد استخدم مصطلح «التقويم الذاتي» (Self-Evaluation) بصفته فئة للترميز في دراسة مونتاغ وأبليجيت عندما قوّم الطلاب أنفسهم بصفتهم قادرين على حل المسائل، أو عندما استخدموا جملة المتكلم عند الحديث عن أدائهم. ولأغراض هذه الدراسة، قُسّمت عبارات التقويم الذاتي إلى نوعين: أولاً، أظهر الطلاب المراقبة الذاتية لأعمالهم وهم يحلّون المسألة، إلى أن توصلوا إلى الحل كاملاً. وثانياً، استخدم الطلاب جملاً وجدانية عند تقويمهم أنفسهم بوصفهم قادرين على حل المسائل، من حيث مدى ثقتهم بأنفسهم والصعاب والإحباطات التي واجهوها، إضافة إلى ما يبذلونه من جهد في أثناء حلهم المسائل. يمثل جدول 8 :1 مجموعة من الأمثلة على عبارات التقويم الذاتي في كل فئة من الفئات.

جدول 1-8 مقتطفات من عبارات التقويم الذاتي

التقويم الذاتي	مقتطفات من الأمثلة
المراقبة الذاتية	ماذا بعد؟ ما الذي أفعله الآن؟
	ساكدا: أين الطريق إلى الحل؟ كيف ستجد الإجابة؟
	ساكدا: استمر بالمحاولة، واصل العمل.
الوجدان	نيبا: آه... فهمت، وجدتها.
• الثقة	وودي: هل هي صحيحة؟
	براديا: لا أعرف إن كان بمقدوري حلها أم لا.
	براديا: لا أجد شيئاً غير صحيح مما قمت به كله.
	ساكدا: أعتقد أن بوسعي تخمينها.
الوجدان	نيبا: لا أعرف ماذا سأفعل، ليس بوسعي حلها.
• الصعوبة/ الإحباط	سيرا: كيف نحل هذه المسألة؟ أنا مرتبك.
	ساكدا: آه...لا أستطيع التفكير في كلمات لتفسير ذلك.
	نيبا: أرسم صورة جديدة. هذه الصورة صغيرة جدّاً. لقد أربكتني كثيراً. عندما أراها لا أستطيع التفكير البتة.
	ساكدا: لا أستطيع تخمين المسألة. أنا مرتبك ومتوتر جدّاً.
	ساكدا: لماذا لا أستطيع التفكير فيها؟ لا أستطيع التوصل إلى أي شيء.
الوجدان	وودي: يجب أن نفكر ببطء، فكر ببطء.
• الجهد	وودي: ام م م..يحتاج الأمر إلى تفكير كثير.
	ساكدا: آه...أنا كسول للتفكير في المجموع.
	براديا: أنا كسول جداً الآن.

مناقشة النتائج

تصف هذه الدراسة نموذجاً يستحوذ على عمليات الحل للطلاب التايلانديين النابغين. وأشارت النتائج إلى أن عمليات حل الطلاب كانت ترتكز على التحليل المنطقي والإستراتيجيات المنظمة. وقد أظهروا مقدرة عالية في التعبير لفظيّاً عن أفكارهم،

وتفسير استدلالاتهم للحلول. وقد أظهرت هذه المقدرة مدى فهمهم للبنى والإستراتيجيات الرياضية الشبيهة بتلك الموضحة في دراسة هينز (Heinz, 1993). وكانت نتائج الدراسة منسجمة مع الدراسات الأخرى، حيث كان المشاركون فيها من الثقافات الغربية. وقد كانت النتائج منسجمة ولا سيما ضمن سياق إستراتيجيات المسألة التي استخدمها الطلاب النابغون مثل؛ رسم الصور، وعمل الجداول، أو البحث عن أنماط بهدف تسهيل فهمهم المسائل (Gorodetsky & Klavir, 2003; Montague, 1991; Montague & Applegate, 2000; Sriraman, 2003). تبيّن بحوث الثقافة الغربية أن الطلاب التايلانديين النابغين طبقوا معرفتهم السابقة على المسألة، أو الموقف غير المألوف. وقد استفادوا من المعرفة الرياضية المتنوعة في استحضار النظريات، والاعتماد عليها بهدف إيجاد معلومات إضافية ذات صلة بالمسألة واستنباطها (Goro Detsky & Klavir, 2003; Lawson & Chinnappan, 1994; Overtoon–Corsmit, Dekker & Span, 1990). وقد لوحظ أن الطلاب التايلانديين الموهوبين يكثرون من المحادثة والحوار عند مواجهتهم بمسائل صعبة جدّاً. وتُعدُّ هذه النتيجة مماثلة لما قام به الطلاب الأمريكيون في دراسة سريرامان.

واستناداً إلى تحليل النتائج، برزت أدلة رئيسة ذات صلة بعمليات الطلاب لحل المسائل تتألف من خمس فئات، هي: المعرفة الرياضية المتقدمة، الرغبة في أخذ طرائق الحلول البديلة المتعددة في الحسبان، تذكر المعرفة والخبرات السابقة والرغبة في استخدامها، الاعتماد على الحالة الوجدانية، ودعم المعلمين والآباء. ففي الفئة الأولى، دمجت المفاهيم الرياضية المتقدمة في حلول الطلاب، منها: قانون الجيوب، وصيغة المعامل ذي الحدين، وصيغة مجموع التسلسل الحسابي. وكانت تلك المفاهيم جميعها تدرس في الصفين الحادي عشر والثاني عشر ضمن المنهاج التايلاندي الوطني. ومع ذلك، فقد اكتسب الطلاب، الذين ليسوا في هذين الصفين، المعرفة السابقة بطريقة ما. وأشارت هذه النتيجة إلى وجود فهم لدى هؤلاء الطلاب للمفاهيم الرياضية عالية المستوى، وهي إحدى سمات الطلاب الموهوبين. وأشارت النتائج أيضاً إلى القدرة العالية على حل المسائل، وتطبيق هذه المفاهيم المتقدمة للتوصل إلى حل صحيح للمسألة.

وفي الفئة الثانية، بحث الطلاب عن طرائق بديلة للحل في أثناء تفكيرهم في المسائل؛ إذ حاولوا فهم المسألة وحلها باستخدام مجموعة متنوعة من الطرائق عند مواجهتهم لأي صعاب. وكما هو الحال في المسألة الثالثة، فقد أظهر كل من سكادا ونيبا في حلهما، رغبتهما وقدرتهما على دراسة مسارات مختلفة، بدلاً من الإصرار على المسارات التي لا خير فيها. ومع ذلك، فقد اعتمدت الطرق التي اتبعاها في البحث عن مسارات بديلة على معتقداتهما وخبراتهما السابقة المتصلة بالتعامل مع المسائل الرياضية.

أما الفئة الثالثة، فتشير إلى وضوح تأثير معرفة الطلاب السابقة، حيث طبّق الطلاب أساليب وإستراتيجيات كانوا قد استخدموها في السابق، فقد أشار وودي إلى استخدامه منحى علم المثلثات في المسألة الهندسية؛ لأن هذه الطريقة، وبحسب خبرته في حل هذا النوع من المسائل، قد أوصلته إلى الحل في أكثر من 60% من الحالات. وكان متخوفاً أيضاً من إخفاقه في حل المسألة إذا استخدم الهندسة الإقليدية. ومع ذلك، فقد كان ينوي محاولة رسم بعض الخطوط إذا أخفق في التوصل إلى الإجابة باستخدام علم المثلثات. أما ما يتعلق بالمسألة الأولى، فقد اكتسب سكادا خبرة معرفة الجمعة الثالثة عشرة في التقويم السنوي، حيث قال «في الحقيقة، أنا دائماً أبحث عن يوم الجمعة الثالث عشر في كل تقويم سنوي. مثلاً، سيكون في شهر يناير في العام القادم، يوم الجمعة هو الثالث عشر من يناير. وتبين لي أن هذا يحدث كل عام، وهذه مسألة رياضية، يجب أن تربط الجمعة الثالثة عشرة بنظرية الأعداد. واعتقد أن ثمة مسألة أخرى كنت قد قرأتها وهي تتعلق بيوم رأس السنة الجديدة».

ويلاحظ أن السلوك الوجداني (السلوك المستند إلى العاطفة أكثر من المعرفة والأفكار والأفعال) في الفئة الرابعة أدى دوراً مهمّاً في عملية حل المسائل لدى الطلاب الخمسة النابغين. وكانت هذه النتائج منسجمة مع نتائج كارلسون وبلوم (2005 Carlson And Bloom) وديبيلس (Debellis, 1998). وكما أوضح جولدن (Goldin, 2000) فقد زاد القائمون على حل المسائل الرياضية من الطرق التي يمكن استعمال الوجدان فيها لتوجيه خطواتهم، والتأثير في معرفتهم بطريقة بنّاءة في حل المسائل. ففي هذه الدراسة، كان الوجدان واضحاً جليّاً من حيث الثقة بالنفس، والإحباط،

والجهد. فقد اعتمد الطلاب على ثقتهم بأنفسهم لمراقبة إحباطهم وقلقهم، محوّلين هذه المشاعر إلى تحفيز قادهم في نهاية المطاف إلى التوصل إلى الحل. لقد حافظت دافعيتهم على الاهتمام الذي لديهم، وشجعتهم على مواصلة العمل لحل المسألة بفاعلية. وزيادة على هذا، فقد عبر الطلاب عن مشاعر إيجابية، وهم يحاولون حل المسألة. وأشار أحد الطلاب، مثلاً، إلى أنه كان متوتراً بسبب مستوى صعوبة إحدى المسائل المعطاة، مع أنه لم يكن تحت وطأة تحديد الوقت، كما قال سكادا: «شعرت بالتوتر. ومع ذلك، هذا ليس اختباراً، وبوسعي أن أستغرق الوقت الذي أريد. لذ، واصلت العمل».

أما الفئة الخامسة، فتتمثل في ملاحظة دعم المعلمين والآباء الواضح بحسب إجابة وودي لسؤال طرح في المقابلة. إذ يعتقد أن الدعم الكبير قد ساعده كي يصبح قادراً على حل المسائل.

الباحثة: ما الذي يجعل المرء قادراً على حل المسائل، في رأيك؟

وودي: كل شيء على ما أظن. أما أنا، فقد حظيت بدعم متميز من والديّ، وساعدني معلميّ كثيراً. وكانت أمي تبحث على الدوام عن مسألة رياضية هنا وهناك، وتطلب إليّ أن أحلها، وكنت أحب أيضاً قراءة الكتب الرياضية.

لا تظهر إجابة الطالب هذه مثالاً على دعم المعلمين والآباء للطلاب فحسب، بل إنها توضح جانباً من تأثير الثقافة التايلاندية. وينسجم هذا الدليل مع الدراسات في هذا المجال، إذ ينظر الآباء في الثقافة الآسيوية إلى تعليم الأبناء بصفته أعلى سلم أولويات التربية والتنشئة. وتؤكد هذه الثقافة على تعليم الأبناء، مع وجود أولوية لتعلم الرياضيات (Hatano, 1990; Geary, 1996)، وأظهرت هذه القيمة الثقافية للرياضيات أيضاً الاختلافات في استثمار الأبناء وأولياء الأمور والمعلمين تعلم الرياضيات (Geary, 194; Stevenson & Stigler, 1992). وربما يكون تركيز الثقافة التايلاندية على أهمية تعليم الأطفال عاملاً مهمّاً في نجاح هؤلاء الطلاب في عملية حل المسائل الرياضية.

محددات الدراسة

مع أن الطلاب لم يسبق لهم أن رأوا المسائل من ذي قبل، فإن هناك احتمالاً بانحراف النتائج بسبب المعرفة السابقة لدى الطلاب، إذ يمكن أن تكون خلفيتهم ومعرفتهم وخبراتهم في حل المسائل الرياضية السابقة قد أثرت بعض الشيء في طريقة تناولهم المسألة والحلول التي توصلوا إليها. وكان عدد المسائل الرياضية التي طرحت على الطلاب قليلة ومحدودة بمحتوى رياضي معيّن. وربما تكون الأنماط المحددة من المسائل قد أثرت في أدائهم إذا كانوا غير مرتاحين، أو غير متخصصين في هذا الجانب من المحتوى. ولم يواجه المشاركون أي معضلة في التعبير لفظيّاً عن عملية تفكيرهم، على الرغم من أنها كانت تجربتهم الأولى في ممارسة التفكير بصوت عالٍ. وربما تكون طريقة التفكير بصوت عالٍ قد طورت من عمليات تفكيرهم، وساعدت على تحسين طرائقهم مقارنة بطريقة التفكير التقليدية. وقد لا يكون المشاركون قد عبروا عن أفكارهم جميعها، بسبب الجهد الإضافي الذي يتعين عليهم القيام به نتيجة تطبيقهم أسلوب التفكير بصوت مرتفع. إضافة إلى ذلك، يفترض أن يكون الطلاب قد أجابوا عن أسئلة المقابلة كلها بعيداً عن التحيز أو الاهتمام باحترام الذات.

التداعيات المستقبلية للبحث

لقد أُجريت الدراسة في أثناء وجود المشاركين الخمسة في معسكر للتدريب. وربما تختلف النتائج لو أجريت على عدد أكبر من المشاركين مدة أطول من الوقت. وهناك حاجة إلى إجراء دراسة مستقبلية تراقب العمليات والسلوكات وتقارن بينها، عند التعامل مع الطلاب داخل بيئتهم المدرسية بدلاً من بيئة معسكرات التدريب. وقد ساعد غياب تحديد الوقت على التخفيف من عبء الضغط على الطلاب، وأعانهم أيضاً على تفعيل قدرتهم على حل المسائل. وهناك حاجة في الدراسة المستقبلية إلى أخذ عامل الوقت في الحسبان، عند قيام الطلاب بحل مسائل رياضية غير اعتيادية؛ من أجل تعزيز بحث الطلاب عن مسار حلهم. وتشير النتائج إلى استخدام الطلاب التايلانديين النابغين المعرفة السابقة على نحوٍ فاعل، مستعملين مجموعة متنوعة من المعرفة، وامتلاكهم القدرة العالية على التعبير

لفظيّاً، وتفسير تعليلاتهم للحلول التي توصلوا إليها. وأنهم قادرون أيضاً على دمج المفاهيم الرياضية المتقدمة في عملية حل المسألة. ومن ثم، يجب أن تأخذ البحوث المستقبلية في الحسبان هذه العوامل، وتدرس مدى تأثيرها في العملية، وفي قدرة الطلاب الموهوبين على حل المسائل. تشير النتائج إلى استخدام الطلاب الموهوبين عبارات التقويم الذاتي في أثناء جلسات التفكير بصوت عالٍ لتساعدهم على أن يصبحوا متضلعين من حل المسائل. ومن المنطقي أن يعمل الباحثون على استكشاف المتغيرات الأخرى المتصلة بهذه العمليات، وطرق تحسين هذه المتغيرات من أجل العمل بفاعلية أكبر في أثناء حل المسائل.

قائمة المراجع

Alexander, J. M., Carr, M., & Schwanenflugel, P. J. (1995). Development Of Metacognition In Gifted Children: Direction For Future Research. Developmental Review, 15, 1–37.

Apsimon, H. (1991). Mathematical Byways In Ayling, Beeling, And Ceiling. Oxford, Ny: Oxford University Press.

Artzt, A. F., & Armour–Thomas, E. (1992). Development Of A Cognitive–Metacognitive Framework For Protocol Analysis Of Mathematical Problem Solving In Small Group. Cognition And Instruction, 9, 137–175.

Bloom, B., Englehart, M. Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). Taxonomy Of Educational Objectives: The Classification Of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain. New York: Longman.

Brown, A. (1978). Knowing When, Where And How To Remember: A Problem Of Metacognition. In R. Glaser (Ed.), Advances In Instructional Psychology (Pp. 77–165). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature Of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem Solving Framework. Educational Studies In Mathematics, 58, 45–75.

Covington, J. (2005). Solutions To January Calendar. Mathematics Teacher, 98, 334–336.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart Problem Solving: How Metacognition Helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), Metacognition In Educational Theory And Practice (Pp. 47–68). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Debellis, V. A. (1998). Mathematical Intimacy: Local Affect In Powerful Problem Solvers. Proceedings Of The 20Th Annual Meeting Of The North American

Group For The Psychology Of Mathematics Education (Pp. 435-440). Columbus, Oh: Eric Clearinghouse For Science, Mathematics, And Environmental Education.

Flavell, J. H. (1992). Metacognitive And Cognitive Monitoring: A New Area Of Cognitive Development Inquiry. In T. O. Nelson (Ed.), Metacognition–Core Readings, (Pp. 3-8). Library Of Congress.

Fortunanto, I., Hecht, D., Tittle, C. K., & Alvarez, L. (1991). Metacognition And Problem Solving. Arithmetic Teacher, 39, 38-40.

Gardiner, A. (1987). Mathematical Puzzling. Oxford, England: Oxford University Press.

Garofalo, J. (1992). Number–Consideration Strategies Students Use To Solve Wordproblems. Focus On Learning Problem In Mathematics, 14, 37-50.

Garofalo, J. (1993). Mathematical Problem Preferences Of Meaning–Oriented And Number–Oriented Problem Solvers. Journal For The Education Of The Gifted, 17, 26-40.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, And Mathematical Performance. Journal For Research In Mathematics Education, 16, 163-176.

Geary, D. C. (1994). Children's Mathematical Development: Research And Practical Applications. Washington, Dc: American Psychological Association.

Geary, D. C. (1996). Biology, Culture, And Cross–National Differences In Mathematical Ability. In R. J. Sternberg, & T. Ben–Zeev (Eds.), The Nature Of Mathematical Thinking, (Pp. 145-171). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Goldin, G. A. (2000). Affective Pathways And Representation In Mathematical Problem Solving. Mathematical Thinking And Learning, 23, 209-219.

Gorodetsky, M., & Klavir, R. (2003). What Can We Learn From How Gifted/ Average Pupils Describe Their Processes Of Problem Solving? Learning And Instruction, 13, 305-325.

Hannah, C. (1990, April). Metacognitive Strategies Used By Learning–Disabled Gifted Students. Paper Presented At The Annual Meeting Of The American Association For Educational Research Association, Boston, MA.

Hatano, G. (1990). Toward The Cultural Psychology Of Mathematical Cognition. Monograph Of The Society For Research In Child Development, 55, 108-115.

Heinze, A. (2003, July). Mathematically Gifted Elementary Students' Problem Solving Strategies: Significant Differences To «Non–Gifted» Students. Paper

Presented At The Biennial Conference Of The World Council For Gifted And Talented Children. Adelaide, Australia.

Kapa, E. (1998). A Metacognitive Support During The Process Of Problem Solving In A Computerized Environment. Educational Studies In Mathematics, 29, 317–336.

Killen, R. (1996). Effective Teaching Strategies: Lesson From Research And Prac– tice, Sydney, Australia: Social Science Press.

Klaimongkol, Y. (2002). The Development Of An Instructional Process By Applying A Problembased Learning Approach To Enhance Mathematical Competen– cies Of Prathom Suksa Five Gifted Students In Mathematics. Unpublished Doctoral Dissertation, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand.

Krantz, S. G. (1996). Techniques Of Problem Solving. Providence, Ri: American Mathematical Society.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (1994). Generative Activity During Geometry Problem Solving: Comparison Of The Performance Of High–Achieving And Lowachieving High School Student. Cognition And Instruction, 12, 61–93.

Mayer, R. E. (1992). Thinking, Problem Solving, Cognition. New York: Freeman.

Mccormick, B. C. (2003). Metacognition And Learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.), Handbook Of Psychology, (Pp. 79–102). New York: John Wiley & Sons, Inc.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research And Case Study Applications In Edu– cation.San Francisco, Ca: Jossey–Bass Publishers.

Montague, M. (1991). Gifted And Learning Disabled Gifted Students' Knowledge And Use Of Mathematical Problem–Solving Strategies. Journal For The Ed– ucation Of The Gifted, 14, 393–411.

Montague, M., & Applegate, B. (1993). Middle School Students' Mathematical Problem Solving: An Analysis Of Think–Aloud Protocols. Learning Disabil– ities Quarterly, 16, 19–32.

Office Of The National Education Commission, Ministry Of Education, Thailand. (2004). Education In Thailand. Bangkok, Thailand: Author.

Overtoom–Corsmit, R., Dekker, R., & Span, P. (1990). Information Processing In Intellectually Highly Gifted Children By Solving Mathematical Tasks. Gifted Education International, 6, 143–148.

Polya, G. (1957). How To Solve It: A New Aspect Of Mathematical Method. Garden City, Ny: Doubleday & Company, Inc.

Posamenteir, A. S., & Salkind, C. T. (1996). Challenging Problems In Geometry. New York: Dover Publications.

Posamenteir, A. S., & Schulz, W. (1996). The Art Of Problem Solving: A Resource For Mathematics Teacher. Thousand Oaks, Ca: Corwin Press, Inc.

Pressley, M., Borkowski, J., & Schneider, W. (1989). Good Information Process–ing: What It Is And How Education Can Promote It. International Journal Of Educational Research, 13, 857–867.

Pretz, J. E., Naples, A. J., & Sternberg, R. J. (2003). Recognizing, Defining, And Representing Problems. J. E. Davidson, & R. J. Sternberg (Eds.), The Psy–chology Of Problem Solving, (Pp. 3–30). Cambridge, Ma: Cambridge Uni–versity Press.

Pugalee, D. K. (2001). Writing, Mathematics, And Metacognition: Looking For Connections Through Students' Work In Mathematical Problem Solving. School Science And Mathematics, 101, 236–245.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando, Fl: Academic. Schoenfeld, A. H., Burkhardt, H., Daro, P., Ridgway, J.,Schwartz, J., & Wil–cox, S. (1999). High School Assessment. White Plains, Ny: Dale Seymour Publications.

Sowell, E. J., Zeigler, A. J., Bergwell, L., & Cartwright, R. M. (1990). Identification And Description Of Mathematically Gifted Students: A Review Of Empirical Research. *Gifted Child Quarterly,* 34, 147–154.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. *The Journal Of Secondary Gifted Education, 14,* 151–165.

Sternberg, R. J. (1995). In Search Of Human Mind, Orlando, Fl: Harcourt Brace College Publishers.

Stevenson, H. W., & Stigler, J. W. (1992). The Learning Gap: Why Our Schools Are Failing And What Can We Learn From Japanese And Chinese Education. New York: Summit.

Swanson, L. H. (1990). Influence Of Metacognitive Knowledge And Aptitude On Problem Solving. Journal Of Educational Psychology, 82, 306–314.

Thipatdee, G. (1996). The Construction Of An Enrichment Curriculum Developing Complex Thinking Ability Of The Upper Secondary School Students With High Achievement. Unpublished Doctoral Dissertation, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand.

Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., & Prado, T. M. (2000). Nurturing Talents/Gifts In Mathematics. In K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), International Handbook Of Giftedness And Talent Education, (Pp. 413–425). Oxford, Uk: Pergamon.

Yimer, A. (2004). Metacognitive And Cognitive Functioning Of College Students During Mathematical Problem Solving. Unpublished Doctoral Dissertation, Illinois State University.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research Design And Methods,* Newbury Park, Ca: Sage.



المعرفة: أحد مظاهر النبوغ

إيجاد فرص للموهوبين

ألكساندر كارب



ملخص

تناقش هذه المقالة الصلة بين الموهبة الرياضية والمعرفة العميقة بالرياضيات، يستعرض فيها الباحث ملاحظات المعلمين في مدارس الطلاب الموهوبين، إضافة إلى السِّيَر الذاتية لعلماء بارزين في الرياضيات. ويحلل أيضاً الصلة بين الموهبة والمعرفة من المنظورين النظري والعملي، ويشير إلى ما يمكن فعله لتعرُّف الطلاب النابغين في الرياضيات وتطوير موهبتهم. وفي عملية التحليل هذه، اعتمد الباحث على الخبرة الروسية في التعامل مع الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

مقدمة

غالبـاً ما ينظر إلى الموهبة والمعرفة علـى أن كلّاً منهما نقيض الأخرى. وقد ترك لنا التراث الرومانسي كثيراً من صور «الكسالى» (Idle Loafers) الذين أتاحت لهم موهبتهم وحدهـا تحقيق ما عجزت عنه المعرفـة (Pushkin, 1954). وفي الروايات القصصية عن المدارس، ليس ثمة غرابـة أن تصادف موقفاً يصبح فيه طالب فاشل لا يفقه شيئاً من أكثر الطـلاب إبداعاً وموهبة في الصـف (انظر فالنتاين جلوشكـوGluskko)، عالم الصواريخ الروسـي الذي واصـل إبداعاته وهو في السجن أيام ستالين). ويمكننا ملاحظة أوجه التوتر بيـن المعرفة والإبداع فـي الدراسات العلميـة أيضاً. تناقش هذه المقالـة علامات المعرفة الواسعـة العميقة لدى كثير من الطلاب الموهوبين فـي الرياضيات، ونتائج المقابلات التي أجرينـاهـا مع المعلمين، وكذلك تحليل السيـر الذاتية لعدد من علماء الرياضيات البارزين، وسنـاقش أيضاً جوانب معيّنة من الخبرة الروسية في التعامل مع الموهوبين، وتقترح بعض التوصيات.

المعرفة والإبداع والموهبة: البحث في علاقة صعبة مضطربة

يقول ويسبيرج (Weisberg, 2000):

«من المعروف عالميّاً أن على المرء امتلاك معرفة في حقل ما، إذا أراد أن يأتي بجديد ضمن ذلك الحقـل، ويوجد اعتقـاد على نطاق واسع أن الخبرة الزائدة عن الحـد يمكن أن تجعل المرء يعيش فـي وضـع ممل؛ وهذا ما يجعله غير قادر على الذهاب إلى أبعد من الاستجابة النمطية. وبناءً على ذلـك، فقد افتُرض أن العلاقة بين المعرفة والإبداع تكون على شكل حرف U مقلوب، حيث يحدث الإبداع في حده الأقصى مع وجود مدى متوسط من المعرفة» (P.226).

مـن الأعمـال التـي يمكـن الاستشهاد بهـا لدعم هـذا الرأي، هـي دراسـة سايمنتون (Simonton, 1984) الـذي استقصـى فيها العلاقـة بين إنجازات الفـرد ومستوى تعليمه الرسمي. وفي الوقت ذاتـه، تشير دراسات أخرى (Hayes, 1989; Weisberg, 2000) إلى أن المعرفـة العميقـة الكافية تجعل من الممكـن تحقيق الإنجازات الإبداعيـة الأصيلة. لكن ويسبيـرغ، مع ذلـك، شكك في بعض الدراسـات السابقة مشيراً إلـى أن المزيد من التعليم

الرسمي لا ينطوي بالضرورة على زيادة في حجم المعرفة (وهذا يصدق على المواقف الموجودة منذ مئات السنين– حيث كان الحصول على التعليم حينئذٍ مختلفاً تماماً عما هو عليه الآن). وقد توصل ويسبيرغ إلى النتيجة القائلة بوجوب إعادة التفكير في العلاقة بين الإبداع والمعرفة. ولكي نقوم بذلك، علينا أن نعرّف على نحوٍ دقيق، ما نعنيه بالمعرفة والإبداع (مثال، انظر Sriraman, 2004).

وتجدر الملاحظة إلى أن من الممكن دراسة كثير من جوانب هذه العلاقة دون الدخول في مزيد من النقاشات للنظريات ذات الصلة بالمعرفة والإبداع. لقد اهتمت الدراسات المذكورة آنفاً في جزئها الأكبر بمدى تأثير المعرفة في الإبداع؛ أي: كيف تؤثر زيادة المعرفة في الإبداع؟ وسوف نركز اهتمامنا هنا على المعرفة على نحوٍ رئيس، بصفتها مظهراً من مظاهر الموهبة.

وقد ظل هذا الموضوع أيضاً محوراً للجدال النظري مدة طويلة، حيث عُرضت اقتراحات كثيرة لتعريف المفهوم الدقيق للموهبة الرياضية (Sriraman, 2005). من الواضح أن مثل هذا التعريف يُعدُّ خلافياً، ويعتمد على من سيُختار ليكون من ضمن الموهوبين. وبصورة عامة، من الطبيعي أن تعد شخصاً ناقش رسالة دكتوراة في الرياضيات بنجاح أنه موهوب أكثر من شخص غير قادر على اجتياز امتحان الثانوية العامة، على الرغم من تلقّيه كثيراً من الدروس الخصوصية على أيدي مدرسين خصوصيين. وفي الوقت ذاته، قد لا يكون من الممكن أن نعد الشخص الذي حصل على شهادة الدكتوراة المشار إليه آنفاً شخصاً موهوباً جدّاً عند مقارنته بِغاوس (Gauss)، مثلاً، حدّد يوسيسكين (Usiskin, 2000) ثمانية مستويات من الموهبة (يرجى ملاحظة أن التمييز بينها بموجب التعريف غير دقيق، أي: يمكن أن تكون سبعة مستويات لدى بعض العلماء، وتسعة لدى بعضهم الآخر، والحدود بين المستويات في كل حالة هي حدود اسمية). ومن الواضح أن النموذج الوصفي سوف يتغير وفقاً لمن سيُعد موهوباً، وسيؤثر هذا أيضاً في درجة الرغبة في الربط بين الموهبة والإبداع.

وبحسب المفهوم الواسع للموهبة، هذا المفهوم الذي ضم، مثلاً، الحاصلين على درجة الماجستير في الرياضيات جميعهم إلى صفوف الموهوبين، فمن السذاجة بمكان

أن نعدّ الإبداع سمة ضرورية للأفراد الموهوبين جميعهم، لكن من الطبيعي فعل ذلك عند استخدام مفهوم أضيق ومحدد للموهبة. ويُعدُّ تعريف رينزولي (Renzulli) للموهبة من التعريفات الأكثر انتشاراً في هذا السياق، وينص على أن «الموهبة تتألف من التفاعل بين ثلاث مجموعات أساسية من السمات البشرية، هي: قدرات عامة فوق المتوسط، ومستويات عالية من الالتزام بالمهمة، ومستويات عاليه من الإبداع» (Ridge & Renzulli, 1981, P. 204). وتستند المناقشات الآتية إلى المفهوم «الضيق» للموهبة والنبوغ في الرياضيات، ومن ثم فهي تستند إلى نموذج رينزولي. ومع ذلك، فمن المفيد الحديث في الأمثلة الرياضية المحددة المدروسة أدناه عن القدرات الرياضية المحددة بدلاً من الحديث عن القدرات العامة فقط.

خصائص الموهوبين في الرياضيات

أجرى عالم النفس الروسي كروتتسكي تحليلاً أساسيّاً للقدرات الرياضية، اشتمل على استقصاءات تجريبية تتعلق بكيفية حل الموهوبين المسائل، ودراسات طولية لمجموعات مختلفة من الطلاب، إضافة إلى بحث مبني على استبانة. واشتمل الجانب الأخير هذا من دراسته على مقابلات مع معلمي رياضيات هدفت إلى تحديد «ما يعنيه المعلمون بالقدرة على تعلم الرياضيات، والمعايير التي يستخدمونها في الحكم على القدرة، وأيُّ الأشخاص يمتاز بالقدرة؟ وأيُّهم غير قادر، ولماذا؟» (ص. 82). تبع ذلك توزيع استبانات خطية بين مجموعات مختلفة من المعلمين. واستناداً إلى الإجابات المقدمة من معلمي الرياضيات، فقد حُدّد عدد من المعايير والسمات للقدرات الرياضية، كان من أبرزها:

1. الاستيعاب السريع نسبيّاً للمعرفة والمهارات والمناحي الرياضية، والفهم السريع لتوضيحات المعلمين وشروحهم.
2. المقدرة على الاستدلال المستقل المنطقي.
3. الابتكار والكفاية في إيجاد الحلول.
4. الحفظ السريع للمادة الرياضية، واستبقائها.
5. المقدرة المتطورة جدّاً لابتداع المادة الرياضية وتحليلها وتركيبها.
6. المرونة العقلية، وغيرها.

وقـد أُعطيـت تعريفات أكثر دقـة للسمات المذكـورة في كثير من المقـالات اللاحقة. هناك سمتان من السمات التي حددها كروتتسكي تتعلقان بمعرفة الطلاب مباشرة. وبحسب وجهـة نظـر المعلمين، يمتلك الطلاب الموهوبـون استعداداً وميلاً طبيعيّـاً لتجميع المعرفة الرياضيـة، حيث يستوعبون المـادة الرياضية الجديدة ويحتفظون بها بسهولة. وعلى الرغم مـن ذلك، لم يكن الهـدف من دراسة كروتتسكي تحديد إتقـان الطلاب معرفة خاصة تفوق إطار البرنامج المدرسي.

وأظهرت استبانة مسح لبحوث علماء الرياضيات، أجراها كروتتسكي، وجود نزعة بين العلماء على التفريق بين المعرفة والقدرة على التفكير الأصيل: «الفرق بين نوعين من العقول الرياضيـة» يتمثل فـي أن بعضها يتميز بسرعة التقاط الأفـكار الجديدة وإتقانها «يصبحون أشخاصاً متعلمين»، في حين يفكر الآخرون بطريقة أكثر أصالة ولكن ببطء. (ص. 191).

المقابلات مع المعلمين الروس: الخلفية والمنهجية

تحتـوي الدراسـة التـي سيصار إلـى مناقشتها لاحقـاً علـى عناصر شبيهـة بدراسة كروتتسكـي من حيث منهجيتهـا وأهدافها. ففي الدراسة الحالية، طُلـب إلى المعلمين، كما فـي الدراسة السابقـة، الحديث عن الطـلاب الموهوبين والنـابغين جـدّاً، وتحديد السمات الرئيسة التي تميزهم من غيرهم (واستقصت المقابلات مع المعلمين أيضاً مسائل أخرى، كمـا وردت النتائج الأخـرى في مقالات أخرى). علـى النقيض من دراسـة كروتتسكي، فإن المشاركين المشار إليهم في الدراسة لم يكونوا معلمين في مدارس عادية، بل كانوا معلمين في مدارس خاصة مشهورة بتخصصها في تدريس الرياضيات.

وقـد وجـدت مثل هـذه المدارس في روسيـا (الاتحـاد السوفييتي سابقـاً) منذ مطلع ستينيـات القرن العشريـن (Vogeli, 1997). وجرت العادة أن يتعرض الطلاب لسلسلة من الاختبـارات لتتاح لهم فرصة الالتحاق بمثل هذه المدارس، حيـث إن منهاج الرياضيات في هـذه المدارسـ أكثر شمولاً وعمقاً مقارنـة بمنهاج المدارس العاديـة (Karp, 1992)، ومع مـرور الوقـت تمكنت هذه المدارس من بناء شهرة راسخة لها، ومن الإنصاف القول أن هذه

المدارس كانت تستقطب الطلاب الذين يتوافر لديهم عادة الاهتمام والرغبة والموهبة في الرياضيات. ولإيضاح مدى فاعلية هذه المدارس، فقد كان خريجوها يشكّلون ما يربو على 90% من قسم الرياضيات في جامعة سانت بيترسبورغ (Donoghue.Et Al., 2000).

أجرينا مقابلات مع نخبة من المعلمين (اثني عشر معلماً) من هذه المدارس في موسكو وجامعة سانت بيترسبورغ. وقد اعتمدنا المعايير الآتية في انتقاء المشاركين في هذه الدراسة: أولاً، أخذنا في الحسبان عدد الطلاب المشاركين أو الفائزين بمسابقات أولمبياد الرياضيات من المستويات العليا لكل معلم. وكان لدى غالبية المعلمين طلاب مشاركون وفائزون بمسابقة الأولمبياد الدولي. ثانياً، عدد طلابهم السابقين من الذين أصبحوا علماء رياضيات بارزين (علماء رياضيات وباحثين يحتلون مواقع مرموقة في كبرى الجامعات). وقد تمكّن الذين قابلناهم جميعاً من ذكر ثلاثة أسماء من طلابهم السابقين ممن أصبحوا أساتذة يشار إليهم بالبنان في دوائر أكاديمية ريادية في مجال الرياضيات. وأخيراً، اعتمد المبدأ الثالث في انتقاء المشاركين على نشاطهم المهني استناداً إلى عدد مؤلفاتهم المهنية، فقد كتب غالبية من قابلناهم ما لا يقل عن ثلاثة أعمال مهنية، وحقق أغلبهم إنجازات في المجالات الثلاثة آنفة الذكر. وعلى الرغم من ذلك، وفي عدد قليل من الحالات، قبلنا مقابلة من كانت لديهم إنجازات كبيرة في مجالين فقط. ومما تجدر ملاحظته، أن عدد معلمي الرياضيات الذين كانوا يعملون في مثل هذه المدارس، كان قليلاً بصورة عامة. ومع أننا لا نزعم أن الدراسة الحالية قد شملت خيرة المعلمين جميعاً، فإن من الواضح أنها اشتملت على نسبة كبيرة منهم. ومما لا شك فيه، أن جميع من وقع عليهم الاختيار كانوا متميزين بأعمال بارزة في هذا الحقل. ومن الواضح كذلك، أن المعلمين الذين وقع عليهم الاختيار كانوا يتمتعون بخبرة فريدة في التعامل مع الطلاب الموهوبين جدّاً، وقد سُجلت المقابلات جميعها صوتيّاً.

بعض نتائج المقابلات

أكدت المقابلات في كثير من النواحي نتائج كروتتسكي، حيث أكد عدد كبير من المعلمين السمات الآتية للطلاب الموهوبين جدّاً، مثل: **النجاح في حل المسألة، والدقة**

المتميزة، وعمق فهم الطلاب للحل. وقد صاغ أحد المعلمين هذا كله على النحو الآتي: «يتمكّن الطالب الموهوب من حل أي مسألة، ويفكر لحظات ومن ثم يقدم الحل. ولا جرم أن هذا يولد انطباعاً جيداً». في حين روى معلم آخر الحادثة الآتية:

«كان الطلاب الموهوبون متميزين بسرعة ردة الفعل، في كيفية فهمهم المسائل، ومدى عمق تفكيرهم. وكانوا يحللون المسألة كلها. أتذكر أنه كان لديّ طالب يعطيني حلاً فورياً لأي مسألة أطرحها. وكنت أختار أسئلة وأصوغها، ثم أطلب إليه الحضور إلى السبورة. وكان يقف برهة حيث السبورة خالية، دقيقة أخرى والسبورة فارغة، وفجأة يمسك بالطبشورة، ويرسم خطين قصيرين جدّاً ويعطيك الحل. ويعتقد المرء أنه كان يسبر أفكاره، ومن ثم يعد، واحد- اثنين- ثلاثة، انتهى الأمر،الجواب معدّ».

وعلى الرغم من أن كثيراً من المعلمين الذين قابلناهم أبرزوا بوضوح سرعة الطلاب الموهوبين جدّاً في حل المسألة، لكن هذه لا تكوّن بمفردها عاملاً رئيساً في الموهبة الرياضية، إذ يمكن «أن يكون الأشخاص البطيئون أقوياء»، بحسب رأيهم. وإضافة إلى ذلك، فقد ميز بعض من قابلناهم بين النبوغ الرياضي والنجاح في أولمبياد الرياضيات مؤكدين أنه لا يمكن شمول الفائزين جميعهم في مسابقات أولمبياد الرياضيات مع الطلاب الموهوبين جدّاً وفقاً لوجهة نظرهم، بل على النقيض من ذلك، لم يحصل بعض الطلاب الموهوبين جدّاً على مراكز متقدمة في أولمبياد الرياضيات (على الرغم من أن أداءهم في الأولمبياد كان ناجحاً جدّاً دون أدنى شك). ويكمن العامل الحاسم، بحسب وجهة نظر هؤلاء المعلمين، في مدى الاهتمام بحل المسائل، حيث «لديهم اهتمام بحل المسائل، وليس هدفهم الحصول على العلامة (A) أو الفوز بجائزة من نوع معين، بل ينصب هدفهم على حل المسألة ليس إلا».

ومن بين السمات الأخرى المهمة التي يظهرها الطلاب الموهوبين الطابع غير المألوف للحلول التي يقدمونها، ومقدرتهم على التفكير المستقل. وقد عبّر أحد المعلمين الذين قابلناهم عن هذا بقوله:

غالباً ما كانوا يأتون بحل مختلف عن الحل الذي يدور في ذهني، أي: أنا أفكر أن هذه المعادلة تحل هكذا وبالطريقة هذه، ولكنهم يقولون «هذا يعني أنها تشبه هذا الحل: – ويقدمون تفسيراً هندسيّاً لذلك».

وإلى جانب السمات التي أشرنا إليها، فقد أكد كثير من المعلمين **قدرة الطلاب الموهوبين جدّاً على استيعاب كمية كبيرة من المادة الرياضية مبكراً بعمق**، بصفته سمة مهمة من سمات هؤلاء الطلاب. وصاغها أحد المعلمين بقوله:

«كان هناك دليل واحد على هؤلاء الطلاب الذين كانوا نجوماً بالمعنى الحقيقي، حيث كانت أعراض هذه النجومية تبرز في الصفين الثامن أو التاسع عندما كانوا يعرفون كمّاً هائلاً استثنائيّاً من الأشياء. وبعبارة أخرى، قدرتهم السريعة على استيعاب المادة غير المألوفة والاحتفاظ بها كلها بسهولة. أي أنهم كانوا يعرفون كمّاً هائلاً من الأشياء المجردة. وهذه الثروة من المعرفة كانت مدهشة حقّاً».

وعرض معلم آخر مثالاً عاديّاً على الطريقة التي تتكون من خلالها مثل هذه المعرفة بقوله:

سألته عن أكثر مجالات اهتمامه، فأجاب قائلاً: «حسناً، في نهاية المطاف، الجبر». عندما زرت رئيس قسم الجبر في الجامعة، قال: «نعم، لدي حلقة دراسية عن نظرية غالو (Galois) [1] ولكنها مخصوصة بطلاب الجامعة.» عندئذٍ قلت للطالب: «ساشا، لدي كتاب عن نظرية غالو، ربما يمكنك إلقاء نظرة عليه.» قرأه وذهب إلى الحلقة الدراسية، وعاد بعد ذلك وسألته: «كيف كانت الحلقة الدراسية يا ساشا؟» فأجاب: «فهمت كل شيء تقريباً»، فقلت له: «وماذا عن الكتاب؟» فأجاب: «أما ما يخص الكتاب، فكان الأمر سهلاً جدّاً، إذ فهمت كل شيء فيه.» لقد استغرق الأمر

---

1) غالو إيفاريست (1832 – 1811)، عالم رياضيات فرنسي عُرف بأعماله المتعلقة بنظرية المعادلات التي تعد أحد أسس الرياضيات الحديثة التي عُرفت لاحقاً بنظرية الزمرة، وبيّن أيضاً أن المعادلات الكوينتية وكثيرات الحدود من الدرجات لا يمكن حلها باستخدام عمليات جبرية، مثل: الجمع والطرح والضرب والقسمة وإيجاد رتب الجذور. ولم ينل في حياته القصيرة التقدير الذي يستحقه، إذ كانت مقالاته تُرفض، وفشل في الالتحاق بالكليات التي يريدها، ورسب مراراً في اختبارات المدرسة؛ وهذا ما جعل معلّم الفيزياء يكتب عنه قائلاً: « ...إنه بالتحديد لا يفقه شيئاً. لقد قيل لي إن لهذا الطالب مهارات رياضية؛ وهذا بدوره ما أدهشني. فاستناداً إلى اختباراته، يبدو أنه على قدر بسيط من الذكاء، أو أنه قد أخفى عني ذكاءه على نحو جعل من المستحيل عليّ اكتشافه». وأعاد إليه المشرف البحث الذي احتوى على أهم النتائج في نظرية الزمرة معلقاً عليه بعبارة «غير مفهوم». وحياته كانت سلسلة من المآسي، فوالده مات منتحراً، وهو بدوره توفي مقتولاً بعد خروجه من السجن؛ لاتهامه بمعارضة الملك لويس فيليب. – المراجع

أسبوعاً. وبعد أسبوع كان الطالب قادراً على حضور حلقة دراسية عن نظرية «غالو» مع طلاب الجامعة في قسم الرياضيات».

تحدث معلم آخر عن أحد طلابه من الذين لوحظت قدراتهم عندما كان ملتحقاً بمدرسة متوسطة عادية قبل التحاقه بمدرسة متخصصة في دراسة الرياضيات. كان هذا الطالب يتلقى دروساً في الرياضيات بوساطة البريد (أي، ما يدعى مدرسة الرياضيات بالمراسلة)، إضافة إلى ما كان يتلقاه في المدرسة. وعندما كان يرسل الإجابة عن الأسئلة التي يحلّها، كان يطرح أسئلة متعددة ومعقدة عن التكاملات، وتبين أنه كان يحل واجبات أخيه، حيث كان أخوه طالباً في الكلية. وقد تحدث معلمون آخرون عن قصص مماثلة.

مثلاً، تحدث معلم آخر عن طالب كان يهرب من المدرسة لمشاهدة محاضرات عن حساب التفاضل والتكامل في البيت كانت تعرض على شاشة التلفاز، وكانت حينئذٍ جزءاً من برامج التلفاز التربوي. ونتيجة لذلك، عندما التحق بمدرسة متخصصة في دراسة الرياضيات (في سن الرابعة عشرة)، كان يمتلك معرفة كبيرة بالرياضيات على المستوى الثالث تقريباً في حساب التفاضل والتكامل.

تجليات المعرفة الواسعة للرياضيين البارزين في طفولتهم

تتضمن السير الذاتية للرياضيين البارزين أمثلة حية على المعرفة الرياضية الواسعة في الطفولة. ومن الأمثلة البارزة على ذلك، معجزة الطفل الأمريكي نوربرت وينر (Norbert Wiener, 1964) الذي أتقن المنهاج المعتمد في الرياضيات العليا في سن مبكرة جداً. وكان كل من السرعة والعمق اللذين أتقن بهما عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال (Blaise Pascal) الهندسة الإقليدية (Bell, 1937, P. 75) شيئاً أسطورياً. وحصل جاك هادمرد (Jacques Hadamard) على أعلى علامة في امتحانات تحديد المستوى (Placement Exams) في المعهدين المشهورين جداً للتعليم العالي في فرنسا آنئذٍ، وهما: معهد البوليتكنيك والمعهد العادي، الأمر الذي يستحيل معه الالتحاق بأي منهما لولا المعرفة الكبيرة بالرياضيات. وقد حصل الشيء نفسه مع الفرنسي جان غاستون داربو (Jean-Gaston Darboux)، وتشارلز بيكارد (Charles Émile Picard)، واميل بوريل

(Émile Borel) (Maz'ya & Shaposhnikova, 1998). وأمــا مــا يخص سيرة غاستون الذاتية فقد كتب بيل (Bell,1937) العنوان الفرعي الآتي: «حلم في الثانية عشرة من عمره بمكتشفــات ثورية وحققها في سن الثامنة عشرة». (ص. 12)، وهذه هي الحقيقة، فقد أتقن غاستون كل شيء ضروري لذلك في سن مبكرة جدّاً.

وتلقــي الفقرة الآتيــة من مذكرات عالمــة الرياضيــات الروسية صوفيــا كوفالفسكايا (Sofia Kovalevskaya) الضــوء علــى الطبيعة الفذة لبصيرة الأطفال الموهوبين جدّاً في الرياضيــات، حيــث تذكر أنها كانت وهي فــي سن الحادية عشرة تقرأ مــا كتب على جدران غرفتهــا التي كانت مغطاة لأسبــاب اقتصادية بالورق، وكيف اكتشفــت بمحض المصادفة، صفحــات من كتاب لعالم الرياضيات الروســي أوستروغرادسكي (Ostrogradsky). ومما جاء في المذكرات:

> بعــد سنوات عدة، وعندمــا بلغت الخامسة عشرة من عمري، تلقيت أول درس عن حساب التفاضل والتكامــل من أستــاذ بيترسبورغ المشهــور الكسنــدر نيكولايفيتش سترانوليبسكــي (Alexander Nikolaevich Strannolyubsky). وكان مندهشــاً مــن سرعتــي الهائلــة فــي استيعاب مفاهيم الحــدود والاشتقاقــات وتمثلها: «تماماً كما لو كنــت تعرفينها من قبل». وفــي الحقيقة أني تذكرت فجــأة، عندما كان يشرح تلك المفاهيم، صفحات كتاب أوستروغرادسكي التي كانت ملصقة على جدران غرفتي، وبدا لي مفهوم الحدود كأنه صديق قديم» (ص. 123).

وفــي الوقت ذاته، يبدو واضحاً أن ليس كل عالم رياضيات يظهر معرفة واسعة في مثل هــذه السن المبكرة، إذ لم يظهــر عالم الرياضيات الألماني ديفيــد هيلبرت أي معرفة غير عاديــة، ولــم يكن من ذلــك النمط العبقري. وكتــب ريــد (Reid) (1970,P.6)، وهو مؤرخ سيــرة حيــاة هلبرت، عن ذلك قائلاً: » أغرته الرياضيات لأنهــا كانت مريحة سهلة لا تحتاج إلــى جهــد، ولا تتطلب أي حفــظ» – لكنه لم يتميز داخــل صفه بأي طريقــة كانت (لا سيما عنــد مقارنته بعالــم الرياضيات البولندي هيرمان منكوسكــي (Minkowski) الذي التحق بالمدرســة في المــدة نفسها). أما نيوتــن (Newton)، فعلى الرغم من أنــه أظهر مواهبه فــي ســن مبكرة بحسب المعاييــر الحالية، فإنه لم يتميز على امتداد مــدة طويلة من الزمن فــي المدرسة بأي طريقة كانت (باستثنــاء قدرته على الدفاع عن نفسه وقتال من يضربونه،

(Bell, 1937, P. 92). ولاحظ كثير من كتاب السير أن آينشتاين (Einstein) لم يكن متميزاً في المدرسة. وهناك كثير من الأمثلة من هذا القبيل.

ومما لا شك فيه أنه من الضروري، أن نأخذ في الحسبان، ونحن نحلل السير الذاتية خاصة السير الذاتية للعلماء الذين عاشوا قبل مئات السنين، عدم اكتمال الأدلة الباقية. فنحن نعرف كثيراً عن طفولة باسكال بفضل أخته، وكتبت كوفالفسكايا مذكرات طفولتها بنفسها، لكن مثل هذه المصادر لا تتوافر دائماً. وإضافة إلى ذلك، فإن حقيقة أن الذين كانوا حول الطفل لم يكتبوا أي شيء عن معرفته، لا يعني أن مثل هذه المعرفة غير موجودة. ومع ذلك، تتوافر أدلة يمكن الاعتماد عليها لتأكيد حقيقة أن المعرفة الرياضية الكبيرة في الطفولة ليست سمة عامة لعلماء الرياضيات الموهوبين جدّاً جميعهم (مثلاً، وصف هلبرت لطفولته بنفسه).

مناقشة: بعض الاعتبارات النظرية

ليس هناك من شك في أن هلبرت كان قادراً على استيعاب قدر كبير من المعرفة الرياضية: إذ تعزز حياته المهنية بمجملها بصفته عالماً، هذه الحقيقة. ومن الممكن حقّاً أن نتبين عدم امتلاكه هذه الموهبة وهو طفل، وأنها تفتحت فقط في سن متأخرة. ويستطيع المرء الإشارة إلى أمثلة تؤكد عدم ظهور كثير من القدرات الرياضية على نحوٍ أساسي في سن مبكرة. ومع ذلك، استناداً إلى الحقيقة التي نعرف أن الرياضيات قد أتته بسهولة في الطفولة، فمن الممكن افتراض تفسير آخر (يمكن دعمه بأدلة من السيرة الذاتية): لم يظهر هلبرت، مثل نيوتن، اهتماماً مبكراً في الرياضيات. وباستخدام مصطلح رنزولي يمكن أن نقول إنهما يفتقران إلى «مستوى عال من الالتزام بالمهمة». وبعبارة أخرى، يمكن القول أنهما كانا يعرفان أكثر بكثير مما كانا يعرفانه، لكنهما لم يريا ثمة حاجة إلى التركيز على الرياضيات إلى أن يبلغا عمراً معيناً.

ويرى هذا التفسير أنه ينظر إلى المستوى العالي من المعرفة في سن مبكرة، كتلك المشار إليها أعلاه، على أنها خصائص معقدة للموهبة الرياضية، مشيراً إلى وجود سمتين على الأقل من السمات الثلاث التي تعرّف الموهبة: لا يظهر مثل هؤلاء الأطفال القدرة على

إتقان المادة الرياضية بسرعة وعلى نحوٍ دائم فحسب، كما وصفها كروتتسكي، بل أظهروا مستوى من التركيز والاهتمام بالرياضيات؛ وهذا ما يمكّنهم من اكتساب المعرفة التي تتجاوز حدود المألوف.

ومن المرغوب فيه إجراء دراسة متعمقة للتفاعل بين المجموعات الثلاث للسمات آنفة الذكر التي تحدد الموهبة الرياضية، ووصف كل واحدة منها بدقة متناهية. ومن الواضح، مثلاً، بعيداً عن كل «المعجزات الرياضية»، أن كل من يمتلك مستوى عميقاً من المعرفة في سن مبكرة جدّاً سيصبح عالم رياضيات كبيراً. مثلاً، مع أن الطالب المشار إليه آنفاً الذي ساعد أخاه في التكامل، تماماً كما هو الحال لطالب المرحلة الابتدائية الذي تعلم حساب التفاضل والتكامل عن طريق التلفاز، قد حصلا على شهادة الدكتوراة في الرياضيات، لكن أيّاً منهما لم يصبح باحثاً بارزاً في الرياضيات (بناءً على عدد ما نشراه في المجلات العلمية المشهورة).

فسّر معلم الطالب الأول ذلك بالطبيعة الخاصة لالتزام الطالب بالمهمة، وهذا ما كان جليّاً في أثناء سني دراسته. وحتى عندما كان طالباً، فقد كان ميالاً إلى حل المسائل التي كانت تُحل على نحوٍ سريع نسبيّاً. ولاحظ المعلم أنه «إذا كانت المسألة لا تحل في غضون نصف ساعة، فإنه كان يتجاهلها». وفي الحقيقة أن هذا الطالب، بفضل قدراته الاستثنائية، كان يستطيع إنجاز الكثير في نصف ساعة؛ فقد كان هذا الالتزام بالمهمة، مثلاً، يكفي بالنسبة إليه لإتمام مساق في حساب التفاضل والتكامل وهو لا يزال طالباً في المرحلة المتوسطة.

أما معلم الطالب الآخر الذي أشير إليه آنفاً، فأوضح أن سبب إخفاقه في الرياضيات كان مرده بصورة رئيس إلى انعدام الإبداع: «كان يعمل كل شيء دائماً وفقاً للقوانين، ولكنه لم يكن له مثيل في تطبيقه القوانين ودمجها».

وهكذا، فإنه ليس بالضرورة أن تفضي المعرفة المبكرة غير العادية إلى نجاح باهر في وقت لاحق. ومع ذلك، يمكن النظر إليها بصفتها عاملاً يسهم إسهاماً كبيراً في إمكانية

تحقيق مثل هذا النجاح. وعند هذه النقطة من النقاش، من الضرورة بمكان الانتقال من أسئلة البحث البحتة إلى القضايا والمسائل ذات الصلة بممارسة التعليم الفعلي.

الكشف عن الموهبة الرياضية

من السهل نسبيّاً مقارنة مستويات مختلفة من القدرات الرياضية بأثر رجعي عن طريق تحليل السير الذاتية –مثلاً– لعلماء رياضيات مختلفين. ولكن من الصعب جدّاً التنبؤ والتخمين مسبقاً بتطور مواهب الطلاب، وتسليط الضوء عليها. ودون الخوض في التحليل المفصل للطرق المتعددة التي يمكن تحديد المواهب من خلالها، دعونا نؤكد أولاً على القيود التي لا مفر منها. فمثلاً، قد نجد أن المسائل، في مرحلة محددة من الدراسة وتحت ظروف محددة، التي قد نتصور أنه لا يستطيع حلها إلا الأشخاص ذوو القدرات الاستثنائية هي مسائل سهلة عند الممارسة.

ادّعى ثورندايك (Thorndike, 1921) أن «طلاباً معيّنين لا يستطيعون حل مسائل بدرجة معيّنة من التعقيد والتجريد، تماماً كعدم مقدرتهم على القفز فوق سور بارتفاع خمسة أقدام أو رفع ثقل يزن خمسمئة رطل.» لكن المسائل التي أشار إليها غالباً ما كانت مسائل في الحساب والجبر الابتدائي يمكن أن يحلها عمليّاً الطلاب جميعاً الذين درسوا مادة تعليمية مخطط لها تخطيطاً إستراتيجيّاً (وهذا ما دعا كروتتسكي وغيره إلى توجيه انتقادات حادة لأعمال ثورندايك).

عادة ما يكون تأثير العامل الاجتماعي كبيراً جدّاً، لذا، يجب أن يشتمل هدف العمل التطبيقي على الإفادة من هذا التأثير إلى أقصى قدر ممكن، ومن ذلك اتباع إستراتيجية مثالية كتلك التي تقدم مثل هذه الفرص للطلاب الذين يمتلكون مواهب متوقدة وتتيح لمواهبهم الازدهار. وبطبيعة الحال، كانت موهبة كوفالفسكايا عرضة للتطور والظهور حتى لو لم تكن جدران غرفتها مغطاة بصفحات من كتاب الرياضيات. أما ما يخص غاوس، مثلاً، فلا يمكننا إلا الاتفاق مع ما قاله «بيل» (1937) من «أن سلسلة الأحداث السعيدة هي التي كانت وراء إنقاذ غاوس من أن يصبح بستانيّاً أو بنّاءً» (P.219)، وتمثلت تلك الأحداث السعيدة بتزويد معلميه له بالكتب بقدر استطاعتهم.

ويُعـدُّ رامانوجان مثـالاً تقليدياً «العبقري الخالـص» (Pure Genius) دون أي تعليم، إذ «اكتشفـه» هـاردي (Hardy) استنـاداً إلـى رسالة كتبهـا حين كان مغمـوراً احتوت على نتائـج جديدة. ومع ذلك، كمـا أشار يوسيسكيـن (Usiskin, 2000) بدقة إلـى أن المسألة ليست بتلك البساطة، إذ أتيحت لرامانوجان فرصة الحصول على كتاب من مجلدين بعنوان «مختصـر النتائج الابتدائية في الرياضيات البحتة والتطبيقية»، شملت موضوعات الاختبار الـذي كان لا بد مـن اجتيازه في ذلك الوقت للحصول على دبلـوم شرف في الرياضيات من جامعـة كامبريدج. وفي الحقيقة، كان لهذا الكتـاب الفضل الكبير بتزود راماناجون بفرصة دراسة الرياضيات.

لا يشتمـل مفهـوم الموهبـة الرياضية على تحديد مـا هو موجود أصلاً علـى نحوٍ كبير بالقـدر الـذي يعنـي الكشـف عـن الموهبة القادمـة– «منطقـة التطـور الوشيـك للطالب» (the zone of the student's proximal development) بحسـب مصطلح فيجوتسكي (1986). وبناءً على ذلك، قد يتحول التعاون مع شريك أكثر تطوراً إلى حدث حاسم للطلاب المحتمـل تفوقهـم رياضيّاً. ويمكن لمثل هـذه الشراكة أن تساعـد أولاً، وقبل كل شيء، على إيجـاد الفرص وتقديمها للطلاب الموهوبين. وسنحلل جوانـب محددة من الخبرة الروسية فـي التعامـل مع الطلاب الموهوبين من وجهة النظر هذه. وفي هذا السياق، من المفيد جدّاً الإفـادة من التعريف الواسع للموهبة مقارنة بالتعريـف المستخدم سابقاً، ودعونا نؤكد مرة أخرى أنه من المستحيل تحديد مستوى موهبة الطالب مسبقاً بأي درجة من الدقة.

وتجـدر الإشـارة أيضـاً إلى أنه مـن المفيد جـدّاً الحديث عـن الإمكانـات وليس عن المتطلبـات الصارمـة. يرتبط مفهوم «المعرفـة» (Knowledge) الذي أكدنـاه أعلاه، وما سنؤكـده لاحقـاً، ببروز الاهتمام المستقـل الناهض. ففي مثل تلك الحـالات التي يُكره فيها الطالـب، الذي جرى تقويمه على أنه موهـوب جدّاً، بطريقة أو بأخرى على الالتحاق بدورات متقدمـة، فإن الاستقلالية، التي تعد سمة مميـزة للعظماء، تختفي. ودون الخوض في نقاش مفصـل عن مزايا نظام المتطلبات الصارم وأوجه قصوره، دعونا نتفق مع يوسيسكين الذي

عبّـر في المقال الذي سبق ذكره عن وجهة نظره بعـدم وضوح الرؤية لديه، عمّا إذا كان من الأفضل لراماناجون أن يكون قد التحق بصف عادي أم تابع دراسته بنفسه.

توفير الفرص

أمّـا مـا يتعلق بدور الأفرقـاء والنوادي الرياضيــة التي يستحيل دونهـا، تطور الطلاب عمليّاً، كتب يوسيسكين قائلاً: «تجمع هذه الأنشطة الطلاب من مختلف الصفوف والمراحل في مدرسة واحدة، وتوجد ثقافة تتيح للطلاب إمكانية التعبير عن اهتماماتهم بالرياضيات» (ص. 155). ويمكن أيضاً أن يُؤدى الدور نفسه جزئيّاً من خلال الكتب في تقوية الثقافة - أو بتعبير أكثر دقّة في المساعدة على دمج الطلاب في الثقافة- التي تتيح لهم فرصة الاهتمام بالرياضيات. وينبغي أن تتاح للطلاب فرصة إدراك أن هناك كثيراً مما سيتعلمونه وراء حدود ما يتعين عليهم معرفته في المدرسة. ومن شأن هذا الإدراك أن يساعد على تحفيز الفضول الطبيعـي لدى الطلاب، وإيجاد اتجاهات أكثر دقة فيما يتصل بمعرفة الرياضيات، وتوضيح طبيعتهـا المفتوحـة التي لا تنضـب، إضافة إلى إظهـار أن الطلاب المهتميـن بالرياضيات خصوصاً سوف يحظون بمزيد من الاهتمام.

وعنـد مناقشة التقاليد العريقة لأولمبياد الرياضيات، التي كانت، بلا شك، مهمة جدّاً في تحديد الموهوبين في الرياضيات ومتابعتهم (Kukushkin, 1996)، ينبغي عدم تجاهل نظام التمايز الأكثر مرونة، الذي وجد جنباً إلى جنب مع هذين التقليدين، المتضمن إشراك الطـلاب في الرياضيات عن طريق نشر الكتب. وتجدر الإشارة هنا إلى أن نتائج المسابقات فـي المراحل الأولى لحركة الأولمبياد الروسية لم تكن تحظـى بالاهتمام الكافي، حيث كان الفائزون يُمنعون من المشاركة في أي أولمبياد آخر. ولكن كان يعتقد وجوب تفاعل الفائزين مـع علماء الرياضيـات المختصيـن، وتلقي مجموعـة متواضعة مـن الدراسـات الرياضية (Fomin, 1994).

تشيـر طريقة التفكير هذه إلـى رسالة الكتاب، ويتمثل المستـوى الأول من تحقيق هذه الرسالـة في تضمين الكتب الدراسية مواد وفصولاً إضافيـة مباشرة- تكون اختيارية لكنها أكثـر صعوبة مـن غيرها. وسوف لن تقتصر هـذه المواد الإضافية على مسألـة أو مسألتين

فحسب، بل على مجموعة كبيرة من المهام أو الأقسام النظرية ذات صلة بالنص الأساسي تهدف إلى إثرائه وتوسيعه بصورة جوهرية. وهكذا، فإننا نجد في الكتاب المدرسي الروسي (الرياضيات 7)، مثلاً، أن كل فصل ينتهي بملخص بعنوان «لمن يهمهم الأمر». ويحتوي أيضاً كتاب شاريجين (Sharygin, 1999) على تسعة وأربعين جزءاً، تحوي ثمانية منها نجمة تشير إلى أنها جزء من المادة الإضافية. وهناك بعض الكتب المدرسية مثل وينر، رايزك، وهودت (Werner, Ryzik, & Hodot, 2001) تقدّم عمليّاً المواد كلها على وفق مستويات متعددة من الشرح.

يتألف المستوى الثاني من استخدام كتيبات تحتوي على فصول إضافية إلى جانب الكتب المدرسية ليصار إلى استخدامها في صفوف خاصة في تدريس الرياضيات المتقدمة، تماماً كما هو الحال فيما يتعلق بالقراءة المستقلة (Handbook By Atanasyan Et. Al,1996).. وتكون الموضوعات المطروحة في مثل هذه الكتب قريبة مما تتضمنه الكتب المدرسية الرئيسة، لكنها تستخدم طرائق ودراسات نظرية أكثر صعوبة وعمقاً (مثلاً، يقدم كتاب أتاناسيان المشار إليه آنفاً كثيراً من المسائل الهندسية التي يمكن حلها باستخدام طريقة المتجهات (Vector Method)، كما يقدم أيضاً موضوع الدوائر المحاطة (Inscribed Circles) والدوائر المحيطة (Circumscribed) وخصائص كل منها بطريقة مفصلة).

وأخيراً، يتمثل المستوى الثالث في قراءة الأدب الشعبي. وفي هذا الصدد، يوجد لدى طلاب المدارس الروس مجموعة كبيرة متنوعة من الكتب الروسية والمترجمة ليختاروا منها، والموجهة إلى أولئك المهتمين بالرياضيات، بدءاً من النص التقليدي لكل من رادماشر وتوبلتز (Rademacher And Toeplitz, 1957) وصولاً إلى كثير من الكتيبات في سلسلة «المحاضرات الشهيرة في الرياضيات» من منشورات مطبعة نوكا (Nauka Press) المترجمة جزئيّاً إلى الإنجليزية.

يمكن أن يبدأ طلاب المدارس الموهوبون عند مستوى معين من التطور الرياضي، بدراسة كتب أساسية، على أن يُزوّدوا في المراحل المبكرة الحاسمة من نضج موهبتهم الرياضية بمواد تؤدي إلى تطور موهبتهم، وتمكّنهم من التعبير عن أنفسهم. وقد فتحت

التقانــة الجديدة، وعلى رأسهــا شبكة الاتصالات العالمية مجالات جديدة للعمل مع الطلاب الموهوبيــن، فأصبحت لديهم الآن ثروة من المصــادر الجديدة التي يمكنهم الاعتماد عليها في الحصول على المعرفة الجديدة، وعدم الاكتفاء بالكتب وحدها.

مشكلات تربوية لمعلمي الرياضيات: بعض المقترحات العملية

تناولت المناقشات أعلاه أهمية الاحتمالات الاختيارية للطلاب الموهوبين، أي الفرص الموجــودة خــارج جدران غرفة الصف. ومع ذلــك، يبدو دور المعلم مهمّاً فــي هذا السياق، حيث يمكن أن يساعد الطالب على اكتشاف مصادر جديدة من المعرفة بنفسه (كما حصل مــع معلم غاوس الذي اعتــرف، بفعله هذا، «أن تفكيره أبعد مــن تفكيري» (Bell, 1937, P. 222)؛ ولكــن المعلمين يمكــن أن يكبحوا سعي الطلاب وراء المعرفــة، من إظهارهم، مثلاً، عدم الاحترام للقراءة الإضافية.

كتــب ستانلــي (Stanely, 1987) مرة عن أهمية اختيار معلميــن قادرين على تدريس الطلاب الموهوبين. دعونا نضع هذه القضية في إطار أوسع، ونشير إلى أهمية إعداد المعلمين الذين قد لا يكونون قادرين بالضرورة على تدريس الموهوبين، ولكنهم يمتلكون المقدرة على دعــم الطلاب وإرشادهم. اقترح لــي شولمــان (Lee Shulman, 1986) ذات مرة مفهوماً مهمّاً هو: «معرفة المحتوى التعليمي». وقد عنى بهذا معرفة أكثر أشكال عرض الأفكار فائدة «لأغراضــ التدريس»، وأكثر التشبيهات أو المقارنات قوة، إضافة إلى الإيضاحات، والأمثلة، والتفسيــرات، والعروض». تتضمن معرفة المحتوى التعليمــي أيضاً معرفة الموضوعات التي يراهــا الأطفــال مثيرة ومهمــة أو صعبة، وكذلك معرفــة الأخطاء المفاهيميــة الشائعة لدى الطــلاب العاديين. وينبغي أن ينظر إلى الإلمام بالدراسات ذات الفائدة للطلاب الموهوبين والموجــودة فــي كل بلد وفي كل لغة، على أنهــا مكون أساسيّ في معرفــة المحتوى التعليمي؛ والإلمام كذلك بصعوبات تعرُّف الموهوبين وتعليمهم.

قــد يفهم أحياناً المعلمــون المبتدئون المقاومة المبــررة الضرورية لعملية الحفظ عن ظهــر قلب الحشو الذي لا طائــل منه (Mindless Cramming) علــى أنها دعوة إلى تقليل الاهتمام بالمعرفة بصورة عامة. ويقود هذا حتماً إلى تعليم خالٍ من الجوهر يخيف الطلاب

الموهوبيــن فقط (وأي طالب آخــر) ويبعدهم كثيراً عن الرياضيــات. وللحيلولة دون تحقق مثل هذه النتيجة، يتعين على معلمي المستقبل أن يصبحوا أكثر معرفة بنماذج للطرائق التي يستخدمها الطلاب الموهوبون في بناء معرفتهم، ويستثمرونها في زيادة نشاطهم الإبداعي.

علينا أن نلاحظ أن ضرورة إلمام معلمي المستقبل ب «مجال القدرات كله» (وهذا من متطلبــات الحصول على إجازة تدريس في الولايات المتحدة) أمــر مسلّم به عالميّاً تقريباً؛ لكــن الواقــع يشير إلى غير ذلك، إذ غالباً ما ينحدر مثل هــذا الإلمام ليصبح معرفة بجانب واحــد فقط من طيف المعرفة. لذا، سيكون من المرغوب فيه تضمين فصول خاصة مكرسة لتدريســ الموهوبين ضمن برنامج تدريس معلمــي الرياضيات (Evered & Karp, 2000). ومــع ذلك، يمكن للــدورات العامة المتعلقة بطرائــق تدريس الرياضيــات أن تعالج مثل هذه القضايا، حتى عند عدم توفر فرص تنظيم دورات خاصة.

الخاتمة

لا يــزال الغموض في الوقــت الراهن، يكتنف الطريقة التي تعمل بها الموهبة الرياضية وتتطــور. وهذا يجعل من الصعب عدم إغفالها والتقليل من أهميتها في الممارسات اليومية. لقــد بدأنا هــذه المقالــة باقتباس كلمات مــن مسرحيــة اليكساندر بوشكيــن (Pushkin) «مــوزارت وساليري» الــذي وصف فيهــا أنطونيو ساليــري الموسيقار مــوزارت (Mozart) بِـ«المتسكع الخامل». وتظهر المعلومات المستمدة من سيرة موزارت الذاتية أن هذا الوصف لا يمــت إلى الحقائق الفعلية بأي صلة؛ لأن موزارت كان مبدعاً، لكن خطيئة الحسد هي التي جعلــت منافســه يصفه بهذا الوصف، وربمــا يكون هو الذي تسبب في موتــه. وينطبق الحال على الذين يملكون موهبة رياضية والذين يعارضونهم. ونحن نؤمن أن المعرفة المعمقة، كما حاولنــا إبرازها، تمثل سمة مهمة معقدة من سمات الموهبة الرياضية، وبطبيعة الحال، فإن من الضروري إيجاد الظروف الملائمة التي تساعد الطلاب على اكتساب مثل هذه المعرفة.

قائمة المراجع

Atanasian, L. S., Butusov, V. F., Kadomzev, S. B., Shestakov, S. A., & Iudina, I. I.(1996). Geometria. Dopolnitel'nye Glavy K Shkol'nomu Uchebniku 8 Kl–assa. Geometry.Supplementary Chapters To The School Textbook For The 8Th Grade. M.: Prosveschenie.

Bell, E. T. (1937). Men Of Mathematics. New York: Simon And Schuster.

Donoghue, E. F., Karp, A., & Vogeli, B. R. (2000). Russian Schools For The Math–ematically And Scientifically Talented: Can The Vision Survive Unchanged? Roeper Review. A Journal Of Gifted Education. 22(2), 121–122.

Dorofeev, G. V. (Ed.)(1997). Matematika. Arifmetika. Algebra. Analiz Dannyh. 7 Klass. Uchebnik. [Mathematics. Arithmetic. Algebra. Data Analysis. 7Th Grade Textbook]. M.: Drofa.

Evered, L., & A. Karp (2000). The Preparation Of Teachers Of The Mathematically Gifted: An International Perspective. Ncsmst Journal, 5(2), 6–8.

Fomin, D. (1994). Sankt–Peterburgskie Matematicheskie Olimpiady. [St. Peters–burg Mathematical Olympiads]. St. Petersburg: Politehnika.

Glushko, M. (1953). Na Vsiu Ghizn'. [All Life Long]. Simferopol': Krymizdat. Hayes, J. R.(1989). Cognitive Processes In Creativity. In J. A.Glover, R. R. Ronning, & C. R. Reynolds (Eds.), Handbook Of Creativity (Pp. 135–145). New York: Plenum

Karp, A. (1992). Daiu Uroki Matematiki. [Math Tutor Available]. M.: Prosvesche–nie.

Kovalevskaya, S. (1978). A Russian Childhood. New York: Springer–Verlag.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology Of Mathematical Abilities In Schoolchil–dren, (J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.; J. Teller, Trans.). Chicago: University Of Chicago Press.

Kukushkin, B. (1996). The Olympiad Movement In Russia. International Journal Of Educational Research, 25(6), 552–562.

Maz'ya, V., & Shaposhnikova, T, (1998). Jacques Hadamard, A Universal Math–ematician. AMS–LMS.

Pushkin, A. (1954). Mozart I Salieri. Polnoe Sobranie Sochinenii. V. 3. (Mozart And Salieri. Complete Works.) M.:Pravda.

Rademacher, H., & Toeplitz, O., (1957) The Enjoyment Of Mathematics: Selections From Mathematics For The Amateur. Princeton, Nj: Princeton University Press,

Reid, C. (1970). Hilbert. New York: Springer–Verlag.

Renzulli, J. (1977). The Enrichment Triad Model: A Guide For Developing Defensible Programs For The Gifted And Talented. Wethersfield, Ct: Creative Learning Press.

Ridge, H. L., & Renzulli, J. (1981) Teaching Mathematics To The Talented And Gifted. In Vincents J. G. (Ed). The Mathematical Education Of Exceptional Children And Youth (Pp. 91–266). Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Sharygin, I. F. (1999).Geometria. 10–11. Uchebnik. (Geometry. 10–11. Textbook.) M.: Drofa.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth In Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4–14.

Simonton, D. K. (1984). Genius, Creativity And Leadership. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Sriraman, B. (2004). The Characteristics Of Mathematical Creativity. The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.

Sriraman, B. (2005). Are Giftedness And Creativity Synonyms In Mathematics? A Theoretical Analysis Of Constructs. Journal Of Secondary Gifted Education, 17(1), 20–36.

Stanley, J. (1987). State Residential High School For Mathematically Talented Youth. Phi Delta Kappan, 68(10), 770–772.

Thorndike, E. L. (1921) The New Methods In Arithmetic. Chicago: Rand Mcnally. Usiskin, Z. (2000). The Development Into The Mathematically Talented. Journal Of Secondary Gifted Education, 11(3), 152–162.

Vogeli, B. R. (1997). Special Secondary Schools For The Mathematically And Scientifically Talented. An International Panorama. New York: Teachers College Columbia University.

Vygotsky, L. (1986). Thought And Language. Cambridge, MA: MIT Press.

Weisberg, R. (2000). Creativity And Knowledge: A Challenge To Theories. In R.J.Sternberg (Ed.) Handbook Of Creativity (Pp. 226–253). Cambridge University Press.

Werner, A., Ryzik, V., & Hodot, T. (2001). Geometria–8. (Geometry–8.) M.: Prosveschenie.

Wiener, N. (1964). Ex–Prodigy: My Childhood And Youth. Cambridge: Mit Press.



قصيدة غنائية في مديح إيمري لاكاتوس[1] أو تجارب فكرية ظاهرية لجسر الهوة بين غرف صفوف

الرياضيات المثالية والفعلية

بهارات سريرامان

ملخص

يستقصي هذا البحث النطاق الواسع للمحتوى والعمليات الرياضية التي تبرز في الصفوف الثانوية عبر استخدام مسائل «العد» غير العادية. ويتمثل أحد أهداف التدريس العام لمعلمي الرياضيات في نقل الشعور بوجود وحدة بين الموضوعات التي تبدو مختلفة ظاهريّاً ضمن الرياضيات. ويمكن لمثل هذا الهدف أن يتحقق إذا تمكّنا من إجراء مناقشات صفية تنقل وجهة النظر اللاكاتوسية (الفكر التجريبي) في الرياضيات المتمثلة في استمرار التخمين- البرهان – الدحض الذي يشتمل على خبرات رياضية غنية. وأعرض هنا مساراً تجاه هذا الهدف التدريسي عن طريق عرض رؤى الطالب في مسألة عدّ غير عادية، وعن طريق استخدام هذه النتائج لبناء احتمالات رياضية «مثالية» (محتوى وعملية) للمناقشة. وقد أعدت، تحديداً، بناء المناحي شبه التجريبية لمحاولات ستة طلاب، يبلغ كل منهم من

---

1) (Lakatos Imre) فيلسوف وعالم رياضيات، ولد في هنغاريا عام 1922، وتوفي في بريطانيا عام 1974. وكان شخصية إشكالية أثار خصومات مع معاصريه من الفلاسفة بعد نشر كتاب« البرهان والتفنيد» (Refutations And Proof) حاول فيه أن يعيد لتاريخ العلم بناءاته العقلانية وتفسيره بصورة معيارية لتقويم المنهجيات العلمية المتنافسة وقياسها، واقترح منهجية لتبرير معقولية القانون العلمي يستطيع المشتغلون بفلسفة العلم من خلالها، تحليل بنية النظريات وتفنيدها ورفضها تاركة المجال مفتوحاً لفرضية أو نظرية أخرى- المراجع

العمــر أربعــة عشر عاماً؛ لحل مسألة العد غير العادية هــذه، وعرض احتمالات وضع الصيغ الرياضية في أثناء المناقشة الصفية بروح إيمري لاكاتوس التخيلية. وسوف نناقش في هذا البحث آثار تعليم/تعلّم الرياضيات في المرحلة الثانوية وفي تربية معلمي الرياضيات.

المقدمة

يحــوي كتــاب إمــري لاكاتوســ (Imre Lakatos) «البرهان والتفنيــد» (Proof And Refutations) علــى تصــور للمناقشة الصفية بين الطلاب والمعلــم في الصف «المثالي». حيث تحدث مثل هذه المناقشات الغنية في السياق التاريخي للمسألة عند تصنيف الأشكال المنتظمــة (Regular Polyhedra) متعــددة السطوح، وبناء إثبــات (Proof) للعلاقة بين الرؤوســ، (Vertices) والوجــوه، (Faces) والحافــات (Edges) لشــكل منتظــم متعــدد السطوح، عرضه ليونارد يولر (Leonhard Euler) على النحو الآتي:V+F−E=2. في ذلك التصــور، يدخل المدافعون عن هــذا الكتاب في جدال ونقاش مع المعلم بحماس حول صدق التعريفــات، مستكشفيــن ومخمّنين المسارات المحتملة للإثبــات، ودحض صحة التعريفات والخطــوات في البرهان من خلال تقديم أمثلة مختلــة (مشوهة) مضادة. وتحدث مثل هذه المناقشــات الموجودة في هــذا الكتاب في خيال لاكاتوس، ولكنها تطرح سؤالاً عمّا إذا كانت مثــل هذه المناقشــات قابلة للإعادة في غرفــة الصف. ومع ذلك، فقد مــر ثلاثون عاماً لم نشهــد فيها أي متابعــة عملية لرؤية لاكاتوســ للمناقشة في غرفة الصــف المثالية. ويحاول المعلم فــي هذا البحث إعادة بنــاء الصف اللاكاتوســي (Lakatosian Classroom) من خــلال التأمل في مسارات المناقشة التي يمكن أن يسلكها الطلاب استناداً إلى استجاباتهم لمسألــة عدّ غيــر عادية. ويكمــن جوهر الطريقــة اللاكاتوسيــة (Lakatosian Method) في الانتبــاه إلى استبعاد التشوهات الرياضيــة (Mathematical Pathologies) في أثناء البحث عن الحقيقة. حيث يبدأ المرء عادة بالقانون، ومن ثم يحدد الفرضية بوضوح، وهذا يتبعه استكشاف لإمكانية إثبات صحتها أو بطلانها. ويترتب على عملية التخمين−البرهان−الدحض تهذيــب الفرضية سعيــاً وراء الحقيقــة، إضافة إلــى متابعة الفرضيــات العرضية جميعها التي تبرز في أثناء المناقشة.

وهنــاك أمثلة كثيــرة لمعلمي الرياضيات الذين يوجدون بيئــة صفية مناسبة لمثل هذا النــوع من النقاش. وخير مثــال على ذلك، الدراسة التي قام بهــا هارولد فاوست (Harold Fawcett) مــدة عاميــن في ثلاثينيات القــرن الماضي، حيث نجح في بنــاء تجربة تدريس مــدة عامين لطلاب المرحلــة الثانوية، ركزت علــى دور النقاشات والمناظــرات في اختيار التعريفات (Definitions) والبدهيات (Axioms)، وأوضحت القيمة التعليمية في التعامل مــع «مجموعــة أدوات محــدودة». وتوصل الطلاب في هــذه الدراسة إلــى تعريفات ملائمة، واختــاروا بدهيــات ذات صلة بالموضــوع عند الضــرورة، وابتدعــوا أيضاً هندســة إقليدية باستخدام الرياضيات المتوافرة في عهد إقليدس. ونتيجة لذلك، ابتدع كل طالب في الصف في أثناء تجربــة التدريس التي استمرت عامين، نصه الخاص للهندسة الإقليدية عن طريق اختيــار تعريفاتهم وبدهياتهم ونظرياتهم وبراهينهم والدفاع عنها. وتوضح لمحات النقاش التي يجدها المرء في دراسة فاوست (Fawcett, 1938) إمكانية تقريب الرؤية اللاكاتوسية للصــف المثالــي إلى الواقــع. وبالنظر إلى أهميــة هذه الدراســة، فغالباً ما يشــار إليها في بحــوث تدريســ الرياضيات التي توضح قيمــة تدريس الهندسة الإقليديــة، أو منحى فاوست التعليمــي الذي سمــح باكتشاف الهندســة الإقليدية بدلاً مــن تعلّمها من الكتــب المدرسية. ومــن بيــن الأمثلة الحديثة على التعليــم الصفي الذي يؤكد قيمــة الأدوات البنائية التقليدية ودور النقاشات والمناظرات فــي الهندسة، الدراسة الأخيرة للفصول الدراسية في هولندا، حيــث استخدم الطلاب في هذه الدراسات أدوات، مثــل راسم القطوع المخروطية (Conic Sections Drawer) (Van Maanen, 1992)، فــي حيــن رســم آخرون هيــاكل هندسية تقليدية باتبــاع تعليمات لمخطوطات قديمة مثل الشكل خماسي الأضلاع (Pentagon) من مخطوطة فارسية قديمة (Hogendijk, 1996). وبحسب ملاحظتي، فقد كان المعلم الذي يمتلك المهــارات التعليمية والاهتمام العميق بالمحتوى التاريخــي، هو العنصر الحاسم في «المشروعــات» الناجحة جميعها في دراسة الهندسة. ومن الأمثلة الأخرى المقترحة للتوصل إلــى الحقائق استخدام النوادي التاريخية، حيث يمثــل الطلاب نصّاً تاريخياً، مثل العناصر (Elements) أو يدرسونــه (Brodkey, 1996)، والمشاركــة فــي مناقشات في أثناء إثبات حقيقة افتراض معيّن (Fawcett, 1938).

تشير رؤية لاكاتوس للمناقشات الصفية ومثال فاوست المثالي (وغيرهما من المقتبسات أعلاه) إلى أن «بناء الصيغ الرياضية» (Mathematization) ممكن في الفصول الدراسية الثانوية. وأعني ببناء الصيغ الرياضية «عملية وضع بنية فوق بنية» (Wheeler, 2001, P. 51). ويشتمل بناء الصيغ الرياضية على عملية التعميم عندما يفرض شخص ما أو يكتشف تعميماً يكوّن أساساً للمسائل المتنوعة (Sriraman, 2004a, 2004b, Sriraman & Adrian, 2004a). وقد أشار ويلر (Wheeler, 2001) إلى صعوبة تدريب المعلمين في تحليل قدرات الطلاب وفهمهم بناءً على الصيغ الرياضية، وإلى الحاجة الملحة إلى إشراك طلابهم في بناء الصيغ للمسائل الرياضية الحقيقية عن طريق تسهيل المناقشة، لكنه لم يقصد بالمسائل الحقيقية تلك الموجودة في سياق العالم الحقيقي التي يمكن استنباطها في الأغلب، بل تلك المسائل التي تقود إلى رياضيات ذات قيمة، وتكون قابلة للحل.

استخدام مسائل العدّ غير القياسية

يمكن أن نعد العدّ نشاطاً يميزنا من غيرنا من الكائنات، ويمكن تتبع تاريخ البشرية من خلال الأفعال البدائية المتمثلة في التشارك في الكميات المتساوية، حتى تطوير الأرقام التي تمثل الفعل المادي الملموس لعملية العد، وصولاً إلى تطوير النظم المتطورة لتحديد القيمة المكانية للأعداد، وهو الأمر الذي أوصلنا إلى الحداثة. يزخر تاريخ الرياضيات بكثير من مسائل العد المشهورة. فقد حار جاليليو (Galileo) في فهم حجم مجموعة الأعداد الصحيحة، ومجموعة الأعداد الزوجية الصحيحة. وقد قادت هذه المسألة في نهاية المطاف إلى ما يعرف بحساب الأعداد ما وراء اللانهائيات أو الأعداد «العابرة للنهاية» (Transfinite Numbers)، الذي وضعه جورج كانتور (Cantor) بصفته إعادة بناء لعلم الحساب العادي (Rotman, 1977). يستطيع المرء أن يعمم ويقول بكل جرأة «كل شخص يستطيع أن يَعُدّ (إلى حدٍّ ما)، الأمر الذي يطرح تساؤلاً حول سبب تضاؤل مسألة العد شيئاً فشيئاً مع تقدم الطلاب نحو المرحلة الثانوية. ويسود الغموض نصوص المناهج الصادرة عن بعض المؤسسات، مثل مجلس التعليم الأسترالي، والمجلس الوطني الأمريكي لمعلمي الرياضيات بخصوص وضع «مسائل العد» في منهاج الرياضيات للمرحلة الثانوية. ونعني

«بمسائل العد» تلك الحالات التي تلاحظ فيها ظاهرة معيّنة بين الأعداد (وهي عادة أعداد صحيحة موجبة)، وهي عادة ما تدفعنا إلى دراسة أسباب حدوث مثل هذه الظاهرة، أو المسائل التي تتطلب توظيف نظرية العدّ الأساسية، مثل قابلية الأعداد للقسمة وخصائص الباقي.. إلخ. وأحياناً تُؤكد هذه المسائل بموجب مناهج الرياضيات المنفصلة التي تشتمل على موضوعات أساسية من التوافيق (Combinatorics). وعلى أي حال، فإن النقطة التي أحاول تأكيدها في هذا البحث هي عدم حاجة المرء إلى نص أو منهاج للإفادة من مسائل العد في الصف الدراسي.

ويتضمن مقصدي شقين، هما:

1. إظهار المدى الواسع للرياضيات الذي يمكن الوصول إليه في المرحلة الثانوية من خلال استخدام مسائل العد.
2. إبراز إمكانية بناء الصيغ الرياضية من خلال تفكير الطلاب في المسألة.

الغايات/الأهداف التربوية وآثارها في تاريخ الرياضيات

يتمثل أحد أهداف مناهجنا العامة في إعطاء شعور بوجود وحدة بين الموضوعات المختلفة ظاهريّاً ضمن الرياضيات. ومن أجل إيضاح ملامح الطريق نحو تحقيق الأهداف آنفة الذكر، سأعرض نتائج استخدام إحدى المسائل «الفريدة» والاحتمالات الرياضية التي نشأت عن رؤى الطلاب تجاه تلك المسألة. ويُعدُّ هؤلاء الطلاب نمطيّاً فوق المتوسط بالنسبة إلى طلاب المرحلة الثانوية (13-15 سنة)، في مدرسة ثانوية ريفية أميركية، أُلحقوا ببرنامج تسريع الجبر رقم 1 الذي يُعدُّ مساقاً للطلاب ذوي الدافعية المرتفعة. وعينت على مدار العام الدراسي، بصفتي معلماً لهذا الفصل الدراسي مسائل حلّها الطلاب في صحائف مذكراتهم. وقد تمثلت آمالنا التربوية في وضع شروط تتيح للطلاب استقصاء المسائل المفتوحة النهاية على مدار مدة زمنية معيّنة، وتشجيعهم على كتابة حلولهم بكل عمق، والطلب إليهم التفكر مليّاً في الحلول التي توصلوا إليها. وتناول الطلاب تلك المسائل مدة تراوحت بين سبعة أيام إلى عشرة، وأجريت معهم مقابلات بعد ذلك. وسعت الدراسة

أيضـاً إلى جعل الطلاب يتبنون منهجية شبه تجريبية عند معالجتهم المسائل التي لم يسبق لهم رؤيتها من قبل في خبراتهم المدرسية.

وقـد انتعش هذا الأمل جزئيّاً من خلال اتباع الطريقة التي يجري فيها تصميم عملية التدريس في العلوم. تتميز العلوم بالمبادئ الفيزيائية المكتشفة، أو التي يستدل عليها من خلال الملاحظات المنتظمة، ووضع الفرضيات والاختبار بوساطة التجربة. مثلاً، تُختبر صحة المبدأ العلمي من خلال إجراء تجربة منظمة في مختبر تجارب العلوم المدرسي، وتسجيل الملاحظات متبوعاً بتطبيق أساليب الانحدار (Regression Techniques) المناسبة (أو وسائل أخرى لتحليل البيانات) على البيانات لتحقق صدق المبدأ. وقد يلجأ بعض المعلمين المبتكرين إلى وضع تجربة علمية متطورة ليجمع الطلاب البيانات من خلالها، ومن ثم محاولة استنتاج المبدأ الناجح. والتساؤلات التي يمكن طرحها في هذا السياق، هي: هل يمكن تكييف مثل هذه الطريقة العلمية لتعليم الرياضيات؟ وهل يمكن للمعلمين أن يسهلوا اكتشاف التعميمات الرياضية والمبادئ الأساسية، باستخدام مواقف تتضمن مسائل متطورة يترتب عليها تبني منهجية شبه تجريبية، تتسم ببناء حالات معيّنة وملاحظات، ومن ثم ينتج عنها رياضيات جديدة؟ وهل يمكن دفع الطلاب، عندما تربكهم مسألة لا يمكن حلها في إطار الأدوات الرياضية المتاحة لهم، أو ضمن نطاق حصيلتهم المعرفية، إلى ابتداع الأدوات الرياضية المطلوبة لحل المسألة؟ ووفقاً للمثل القائل: «الحاجة أم الاختراع»، فقد اتسم تاريخ الرياضيات بهذه الحاجة إلى بناء أدوات جديدة لمعالجة المسائل المقلقة. وإلى جانب علم حساب ما وراء اللانهائيات الذي جاء به كانتور والمشار إليه آنفاً، فهناك أمثلة تاريخية أخرى توضح وجهة نظري هذه. مثلاً، يمكن التعبير عن تخمين جولدباخ (Goldbach, 1742) القائل أن الأعداد الزوجية الصحيحة جميعها التي تكون ≤ 4، تعبّر عن مجموع عددين أوليين لم يُجب عنهما بعد، ولكن كان من نتيجة ذلك البحث عن آلية حسابية ونظرية جديدة لمعالجة هذه المسألة.

وأخيراً، لا يسعني سوى الإشارة إلى نمو ظاهرة الرياضيات، وكثير من النظريات الجميلة في القرن العشرين، نتيجة لرغبة جُلّ علماء الرياضيات في استخدام بدهية الاختيار

(Axiom Of Choice). وقد عرض باري لويس (Barry Lewis) رئيس جمعية الرياضيات في المملكة المتحدة عام 2003، فكرة مفصلة عن أهمية بناء الأدوات في الرياضيات، وقال: «لم يكن من المصادفة، عندما احتاج آينشتاين في بداية القرن الماضي إلى أدوات مختلفة ليعيد دراسة متصل الزمان والمكان (Space–Time Continuum)، أن مثل هذه الأدوات قد وجدت فعلاً... ولكنها كانت أدوات نظرية ليس لها أي استخدام عملي ممكن». (Lewis, 2003, P. 426).

وخلاصة القول، هل نستطيع استخدام البنية الأصيلة وجمال المسألة الرياضية، في تحفيز استكشاف الرياضيات من خلال آراء الطلاب وتفكيرهم في المسألة، وإجراء نقاشات صفية فعلية من وحي روح نقاشات لاكاتوس النموذجية والتخيلية في الفصل الدراسي «المثالي»؟ دعونا نرى أيكون ذلك ممكناً.

المسألة

انظر إلى هذه المسألة (Gardner, 1997): اختر مجموعة من أعداد صحيحة موجبة «س» مؤلفة من عشرة أعداد أقل من مئة. مثلاً المجموعة: S = {3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76}. هناك اختياران مختلفان تماماً من بين المجموعة س لهما المجموع نفسه، فأستطيع مثلاً اختيار 63 ,14، ومن ثم أختار 42, 35 لاحظ أن كلا المجموعين يساوي 77، أي، (77=63+14، و 77=42+35). أستطيع أن أختار أولاً 14 ,9 ,3 ثم أختار 26. لاحظ أن مجموع كليهما يساوي 26، أي: (26=14+9+3 و 26=26). وأيّاً كانت مجموعة الأرقام المؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من مئة، فإنك ستحصل على المجموع نفسه من اختيارين مختلفين تماماً. يمكنك أن تصمم مجموعات، وتتحققها بنفسك. لماذا يحدث هذا؟ برهن على أن ذلك يحدث دائماً.

مسارات الطلاب، التبصر وبناء الأدوات

تستدعي هذه المسألة الفضول على نحوٍ واضح، وتعطي أيضاً شعوراً بغموض الأعداد الصحيحة. شجّعتُ الطلابَ على اختيار أعداد صحيحة تقع بين واحد ومئة بصورة عشوائية،

وعملنــا كثيراً من المجموعات المؤلفة من عشرة أعداد. وســوف أعرض الآن المناحي شبه التجريبية، وإعادة بنائها لستة طلاب تراوحت أعمارهم بين ثلاثة عشر عاماً وخمسة عشر، وهــم يحاولون إيجاد حل لمسألة العــد آنفة الذكر في صحائــف مذكراتهم. لقد استُخدمت كتابــات صحائف الطلاب، وســرد المقابلات في إعادة تمثيــل أساليب الطلاب، وتبصرهم في المسألة.

ابتكار أساليب لضبط تغيّر المسألة

كان أحــد طــلاب الصف ويدعى مــات (Matt) ماهراً في اكتشــاف اختيارات عددية مختلفــة تــؤدي للوصول إلى مجاميــع ثابتة. ومع ذلك، لــم يعتقد حدوث ذلــك دائماً، وشرع فــي بناء أمثلة مضــادة معتمداً على ضبط كيفيــة اختيار الأرقام فــي المسألة. حاول «مات» فــي البداية ضبط متغيــرات المسألة بتثبيــت الرقم في منزلة العشــرات وتغيير الأرقام في الآحاد، وخمّن بقوله: لمّا كنت مضطراً إلى تكرار رقم أو أكثر من واحد إلى تسعة في اختيار العناصــر العشرة، فإنه سينجم عن ذلك مجموعان متساويان. مثلاً، يمكننا تثبيت العشرات علــى الرقم ثمانية، ثم نبدأ بانتقــاء الأرقام للمنــازل الأخرى. لدينا عشرة خيارات للرقم في المنزلــة (أعنــي الأرقام مــن صفر إلى تسعة)، ولكــن يضطر المرء، في أثنــاء العملية، إلى تكــرار الرقم ثمانية (حيث إن الأعــداد الصحيحة العشرة يجب أن تكون مختلفة). بدأ مات تخميناته الأصلية بالمجموعة (90, 91, 92,.........99)، حيث يستطيع المرء اختيار أرقام مختلفــة إلى أن يصل إلــى الرقم تسعة وتسعين، حيث يتكرر الرقــم تسعة. أدت هذه بحسب رأيــه إلــى اختيارين مختلفين في مجموعــة مؤلفة من عشرة عناصر لتنتــج المجموع نفسه. ثــم خمّن أن الحالة ليست كذلك إذا اختار المــرء مجموعة مؤلفة من أقل من عشرة أعداد، وقــدم المجموعــة المؤلفة من خمســة عناصــر (3, 7, 12, 78, 69, 84)، حيث شطب الرقم 78، وقائمــة بالمجاميــع: 3+7=10؛ 3+12=15؛ 3+69=72؛ 3+84=87؛ 7+12=19؛ 7+69=76؛ 7+84=91؛ 12+69=81؛ 12+84=96؛ 69+84=153. شطــب «مــات» الرقــم 78؛ لأنــه كرّر الرقم 7 مصادفة، وكان مخططه بنــاء مجموعة لا تتشابه فيها الأرقام جميعهــا. واختتم بالقول أن هــذه المجموعة قد أوضحت نقطته للاختيــارات المختلفة التي تنتــج المجموع نفسه فقــط عندما يكرر المرء الرقــم. أنشأ «مات» مجموعــة قصوى مؤلفة

مـن خمسـة عناصر، من الأرقام صفر حتـى تسعة مكررة مرة واحدة فقـط، بهدف توضيح مخططـه، ولكنه لم ينظر إلى المجاميع التي جمعت بيـن ثلاثة أرقام أو أكثر في مجموعته. ولـو فعل ذلك، للاحـظ أن 84 =69+12+3، وهو أحد عنـاصـر مجموعته، وبذلك، يدحض ادّعاءه (Sriraman, 2004a).

وهـذا يقودنـا إلى التساؤل: هل فهـم الطلاب بطريقة لاشعوريـة متطلبات الاختيارات المختلفـة التي تنتج المجمـوع نفسه، بصفتها مجاميع لرقمين فقط؟ انظر الحل الآتي الذي قدّمه «جون» (John):

اكتشاف قانون العد للمجموعات الفرعية للمجموعة

تمثلـت خطة «جون» في تناول عشرة أرقام، والتحقق هـل سينجح ذلك، وأعني بذلك، إذا كان هنـاك مجموعـان مختلفـان متساويان يمكـن أن يحدثا دائماً. وجـرّب ذلك مرات عـدة «ليـرى أن المجموع يساوي دائماً رقماً آخر». وبذلـك، فقد تمثلت خطة «جون» بنمذجة المسألـة، وتحقـق صحتهـا، كما فـي المسألتيـن الأولى والثانيـة. وبدأ باختيـار المجموعة (1,15,13,4,6,99,20,75,86,51)، وأوجـد مجمـوع 99 =86+13 وهـو أحـد عناصـر المجموعة. ثم وجد بعد ذلك أن 86=1+4+6+75 وهو عنصر آخر من عناصر المجموعة، اعتقـدت أن المجموع الثانـي كان دقيقاً، وكتبت ملاحظة لأسأله هل طوّر طريقة معيّنة لبناء المجاميـع. أمـا المجموعة الثانية التي اختارها فكانت (2, 10, 18, 25, 52, 49, 91, 1, 86, 98)، وأوجـد ناتج مجموع 98=2+10+86 وهو أحد عناصر المجموعة أيضاً. ومن الواضح أن «جـون» قد فهم «الاختيـارات المختلفة» تماماً كما قصد الباحـث، إذ اختار ثلاثة وأربعة مجاميع للأرقام.

أمـا المجموعـة الثالثة التي اختارهـا فكانـت (90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99) التـي اعتقد أنهـا مجموعة مثيرة للاهتمام؛ لأنها تعطي أكبـر قدر ممكن من المجاميع لمجموعـات تحتـوي على عشـرة أعداد صحيحة تقع بيـن الواحد والمئة، وسـوف تبرز هذه الحقيقـة على المسرح عند مناقشتنا الحل لاحقـاً. كان المجموعان اللذان أوجدهما «جون» فـي هـذه المجموعة، همـا: 183=93+90 ,183=92+91، وفي تلخيصـه للمسألة كتب أنه

حلهــا تمامــاً كما خطط لهــا. «أخذت مجموعــات مؤلفة من عشرة أعداد ثــلاث مرات، وقد نجحــت فــي المرات جميعاً». وكتب بعدهــا أنه لم يتحقق سبب حدوث ذلــك، لكنه اعتقد أن ذلك يعود إلى وجود عدد قليل جدّاً من الأرقام لتنجح العملية».

سُئل «جون» أن يوضح عمليات تفكيره في أثناء المقابلة، ولكن كان عليه إلغاء موعده الأول بسبــب انشغاله في مباراة تنس. وعندما حضر إلــى المقابلة نظر مرة ثانية إلى المسألة في صحيفة مذكراته. وبدا أنه قرر إلقاء «نظرة ثانية» على المسألة مرة أخرى، وبنى المجموعة الآتية: (2, 5, 6, 8. 10, 12, 14, 16, 19, 20)، وحصل على: 14=2+12=8+6؛ 12=10+2 وهذا أحد عناصــر المجموعة، و10=2+8 أحد عناصــر المجموعة، و8=2+6 عنصر آخر مــن عناصر المجموعة. انتقى بعد ذلك مجموعة أخرى علــى النحو الآتي: (1, 3, 5, 7, 11, 13، 15، 17، 19)، وكتــب «9=1+3+5، و 17=1+7+9 إلــخ». لاحظت أن «جون» اختار في البدايــة أعــداداً صحيحة من 1 إلى 20، ثم اختار أعداداً صحيحة فردية من 1 الى 20. وكان يبدو حذراً في انتقاء الأعداد الصحيحة في هذه المرحلة آملاً التوصل إلى شيء ما. وأضاف الأرقــام الآتية في حاشية صحيفة مذكراته: 45=10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 ورسم الجدول أدناه (الشكل 10 :1).

1	2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، ~~10~~
2	3، 4، 5، 6، 7، 8، ~~9، 10~~
3	4، 5، 6، 7، ~~8، 9، 10~~
4	5، 6، ~~7، 8، 9، 10~~
5	6، 7، 8، 9، 10
6	7، 8، 9، 10
7	8، 9، 10
8	9، 10
9	10
10	

شكل 1 : 10 تمثيل جون لمسألة مجموع الأرقام

خلص «جون» استناداً إلى الجدول في شكل 10 :1 إلى ما يأتي:

أعتقد أن ذلك يحدث دائماً بسبب وجود كثير من الطرق للوصول إلى الإجابة. فرسمت جدولاً وأضفت رقمين، حيث هناك خمس وأربعون طريقة. وإذا أضفت ثلاثة أرقام فهناك فرص أكبر.

سبّب حل «جون» هذا إرباكاً لي في البداية، وحاولت فهم ما توصل إليه. وقال إنه يمكن للمرء في البداية، حساب كمّ هائل من المجاميع، وهذه تعدُّ ملاحظة جيدة بحد ذاتها. ويتعين على القارئ ملاحظة أن هؤلاء الطلاب لم يسبق لهم أن واجهوا مفاهيم مجموعات فرعية متعددة من مجموعة ما تؤدي دوراً في الحل. وعلى الرغم من ذلك، بدأ جون بوضع طريقة منظمة لعد المجموعات الفرعية كلها. وحسب في جدوله المجموع الكلي لمجاميع رقمين في مجموعة مؤلفة من عشرة عناصر، أي خمسة وأربعين، أو عشرة، ثم أدرك بعد ذلك وجود مزيد من احتمالات المجاميع التي تحتوي على ثلاثة أرقام. واستناداً إلى هذه الملاحظة، توصل إلى أن حدوث مثل هذه الظاهرة مرده « وجود كثير من الطرق للوصول إلى الجواب». وتوصل «جون» إلى تعميم بإمكانية وجود عدد كبير من المجاميع، بحساب الاحتمالات كلها لجمع عددين بعضهما إلى بعض، ومن ثم ملاحظة وجود عدد أكبر من الاحتمالات بجمع ثلاثة أعداد بعضها إلى بعض. ويؤكد هذا المخطط استقلالية الطلاب في بناء القانون الذي يقول: إن عدد العناصر لمجموعة عنصر (K (هو2^k)).

لم يغيّر «جون» الشروط الأولية المعطاة للمسألة. وبعبارة أخرى، لقد جرّب مجموعات مؤلفة من عشرة عناصر فقط، على العكس من «مات» الذي قرر أن يغير الشروط والمحددات ليرى ما سيحدث. وهناك آخرون اتبعوا خطّاً مختلفاً من التجارب الموضحة لاحقاً في محاولة «جيم» (Jim).

تأمل في غموض نظام العدد

فهم «جيم» المسألة على النحو الآتي: «يمكنك انتقاء عددين من أي مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من مئة، لتجمعهما مع رقم آخر في المجموعة. وكذلك يمكنك أخذ ثلاثة أعداد، وهناك أيضاً إمكانية لإضافة عددين إلى عدد في كلا الجانبين» تمثلت خطته للبدء في المسألة «بعمل مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد بصورة عشوائية، وإيجاد ناتج مجموع واحد (One Combo) في الأقل، ومن ثم عمل مجموعة أخرى

ليتحقـق نجاحها دائماً». اشتملت خطة «جيم» بصورة أساسية على تحقق معطيات المسألة. وبنـى مجموعتيـن على النحـو الآتـي: (97, 88, 69, 13, 27, 52, 71, 44, 33, 1) و (3, 14, 23, 39, 40, 55, 67, 71, 83, 99)، وأوجـد المجاميـع الآتيـة: 101=88+13=52+49 و 40=3+14+23 على التوالي. لا يبدو وجود أي نظام واضح لدى «جيم» للتوصل إلى مجاميع متساويـة. ولـم يعمل «جيم» أي مجموعـات أخرى، ولكنـه خلص إلى القول الآتـي: «يتعامل الجـواب مع النظام العشري الأساسي». وهناك عشرة أعـداد فقط تستطيع أن تختار منها، وأي عـدد أكبـر من ذلك يمكن الإشارة إليه على النحـو الآتي: $10 + x$. مثلاً، 1+10 =11 و 2+10+10+10+10+10 =52. وكتـب عندئـذٍ قائـلاً: إن كل عدد يقع بيـن الواحد والمئة يكوّن «ناتجاً» (لجمع) عشرة إلى عدد آخر من صفر حتى تسعة.

لـم أفهم مناقشة «جيم» لِـ «الناتـج». ويبدو أن عملية الجمع على أساس الرموز العشرة قـد بينت له إلى حـدٍّ ما سبب نجاحها. وقد أملت في أن المقابلـة سوف توضح ما الذي كان يحـاول قوله. وقد اختصرت هذه الرواية خصيصاً، أمـا القارىء الذي يرغب في تجاوزها، فقـد كان جوهـر مناقشة «جيم» على النحـو الآتي: نجحت؛ لأن الرمـوز المتوافرة كانت من ضمـن المجموعـة 10 ,9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1، ولأن الأرقـام بين الواحد والمئة جميعها ما هـي إلا نتيجة لجمـع «إضافة» هذه الرموز إلى بعضها بعضاً، وهـذا يؤكد إلى حدٍّ ما أن ناتج مجموعين يؤدي إلى المجموع نفسه. وأما القارئ الذي يرغب في معرفة كيفية توصل «جيم» إلى هذه النتيجة فالحكاية على النحو الآتي:

الرواية الأولى

الطالب: استغرقت بعض الوقت في التفكير في النظام المبني على عشرة. لـديّ خطان من الأعداد، مثل المجموعة المؤلفة من عشرة أعداد، وكنـت دائماً أجد أعـداداً لأضيفها إلى الرقـم نفسه، وفي معرض تفكيـري فـي حل الورقة، تبين لـي فجأة وجود عشـرة أعداد فقط تستطيـع أن تختار منها، وأمـا غير ذلك فيمكن التعبير عنه بـ 10+ عـدد مـا، مثـل: 1+10=11 و 10+10+10+10+10 = 50، وهذا لا يعني وجود رمز جديد؛ لأن 11 هي 1+10.

الباحث: حسناً، أنت تقول إن الأعداد التي تستطيع أن تختار منها فقط هي...؟

الطالب: 1, 2, 3, 4.....10 والأعداد الأخرى جميعها متغيرات لهذه الأعداد.

الباحث: حسناً، ولكن كيف يعطي هذا مجموعين متشابهين؟

الطالب: لأنها مرتبة وأقل من العدد خمسين، لذا، فمن السهل رؤيتها.

الباحث: ماذا لو اخترت الأرقام عشوائيّاً، مثل تلك الأعداد التي أريتك إياها في الصف؟

الطالب: عندئذٍ يكون من الأفضل تنظيمها بعد أن نختارها عشوائيّاً من الأصغر إلى الأكبر، وبعد ذلك يكون من السهل إضافتها بعضها إلى بعض بدلاً من القفز هنا وهناك، وعندئذٍ ستجد كثيراً من الاحتمالات، كأن تأخذ العدد الأول وترى هل يمكن إضافته إلى أي عدد ضمن المجموعة.

الباحث: كم يوماً استغرق حل هذه المسألة؟

الطالب: خمسة أيام تقريباً، حيث كتبت الواجب الأول قبل يومين، ثم كتبت كل شيء الليلة الماضية، واستغرقني ذلك خمس وأربعون دقيقة.

الباحث: إذن، فكرت في المسألة مدة خمسة أيام؟

الطالب: نعم، لقد فكرت فيها منذ أمد بعيد (ضاحكاً). استؤنفت المقابلة في اليوم اللاحق، حيث كان يتعين على جيم أن يغادر بسبب نشاط ما بعد المدرس

اليوم الآتي:

الباحث: حسناً، ها قد عدنا مرة أخرى.

الطالب: لقد كتبت إلى حدٍّ ما عن سبب حدوث مثل هذا، ربما لأن المجموعة من واحد إلى عشرة تمثل مجموعة الأعداد التي يمكنك الاختيار منها فقط.

الباحث: كيف يكون اختيار عشرة أعداد عشوائيّاً مرتبطاً بمجموعة أعدادك من واحد إلى عشرة؟

الطالب: لنقل: إن 88 هي مجموع إضافة عددين من هذه الأعداد أو عدد آخر. أي عدد يمكنك الحصول عليه هو واحد من هذه الأعداد، أو من مجموع إضافتها بعضها إلى بعض. لذا، فإن أي شيء يمكن أن تفعله ما هو إلا حصيلة جمع هذه الأعداد أو دمجها. (نحن ننظر إلى 88+13=52+49)

الباحث: حسناً، دعني آخذ العدد 49 من مجموعتك، فما الذي تعنيه بالدمج؟

الطالب: خذ العدد 4 و 9 وضعهما معاً تحصل على 49.

الباحث: وكذلك العدد 52؟

الطالب: إنه 2 و 5.

الباحث: والآن، كيف نربط هذا بالعددين 13 و 88؟

الطالب: لأنهما أتيا من المجموعة نفسها، فالعملية ليست سحب العدد من شيء مختلف. إنهما من مجموعة الأعداد من واحد إلى عشرة ذاتها.

الباحث: ما زلت غير متأكد ما الذي ستختاره.

الطالب: يمكنك اختيار عدد من هذه المجموعة.

الباحث: ولكن كيف يجعلنا هذا نحصل على مجموعين متساويين؟

الطالب: تماماً مثل الأعداد جميعها في هذه المسألة، حيث يمكن إضافة بعضها إلى بعض، مثل: 1+1=2, 1+3=4، ويمكنك مواصلة ذلك على هذا النسق.

الباحث: حسناً، ولكن كيف يجعل هذا 88+13=52+49؟ وكيف تنتقل من هنا إلى هناك؟

الطالب: هذه طريقة متقدمة جدّاً، فهناك عددان بدلاً من وجود عدد.

كان «جيـم» يحاول جاهداً إثبات حله. فقد كان يـرى أن الأعداد ضمن المجموعة المؤلفة مـن عشرة أعداد تشتمـل على بعض التركيبات للأعداد من صفر حتى تسعة، لكن لا تزال كيفية الحصـول على مجموعين متساويين غير واضحة المعالم، وقد عـزا ذلك إلى «النظام المستند إلـى عشـرة أعداد وكيفية إضافـة الأشياء بعضها إلـى بعض». ربما يذكر القـارئ أن «مات» قد عرضـ مناقشة مماثلة اشتملت على الأعداد من صفر حتـى تسعة، ولكنه حاول جمع مجموعات تحتـوي علـى أقل من عشـرة أعداد ليتحقق صحـة تخمينه بوساطة ضبط خيـارات الأعداد في تلـك المجموعات. أما حالة «جيم»، فقد حاول التوصل فيها إلـى رؤيته المسألة بالتفكر ملياً في المجاميع فـي المجموعـة (10 ,9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1)، وملاحظـة أن المجاميع كلها يمكن التعبيـر عنهـا بالصيغـة 10 أ + ب، حيث أ و ب ينتميان إلى المجموعة ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 ,0 9. وقـد قـاده ذلك إلى القول إن اختيارين يقودان إلى المجمـوع نفسه؛ بسبب طريقة جمع رموز الأعداد المحدودة. وعلى النقيض من «جيم» و«جون»، قررت «جيمي» (Jamie) التجريب بدءاً من شروط المسألة الأولية بهدف التوصل إلى رؤية تفسر سبب حدوث مثل هذه المجاميع الغامضة.

التلاعب بالفرضية المعطاة

بدأت «جيمي» المسألة في صحيفة مذكراتها حيث كتبت:

> تتطلـب المسألـة أن تضع مجموعـة مؤلفة من عشرة أعـداد موجبة جميعها أقل مـن مئة. وتنص المسألـة على وجـود اختيارين من المجموعة س يكـون لهما المجموع نفسـه. وليس من المهم ما الأعداد التي أختارها، بل ما أريد التوصل إليه هو سبب حدوث ذلك، وإعطاء أمثلة داعمة.

> سيلاحـظ القارئ أن «جيمي» قد أشارت من خلال إعـادة صياغتها المسألة إلى «عرض أمثلة عن سبب حدوثها.»

لقـد قررت، لكي تبدأ بالمسألـة، انتقاء عشرة أعداد صحيحـة لِ «مجموعات الأعداد المختلفـة». وستبحث بعد ذلك عـن اختيارات تعطي المجموع نفسه، ثم كتبت: «عليّ تجريب عمليات جمع مختلفة قبل التوصل إلى مجموعة تلبي الغرض، ولكن لا بد من وجود اختيارين يعطيان المجموع نفسه دائماً».

جربـت «جيمي» ثـلاث مجموعات مختلفة، ووجـدت في كل حالة من الحـالات اختيارين يعطيان المجموع ذاته. تألفت المجموعة الأولى من 89 ,75 ,72 ,45 ,40 ,25 ,19 ,16 ,2 ,1 التي

أعطت 19=16+2+1، وهو أحد عناصر المجموعة. في حين تكوّنت مجموعتها الثانية من 3, 12, 15, 30, 35, 50, 63, 74, 87, 99 أنتجت 15=12+3 وهو عنصر من عناصر المجموعة، و 99=12+87 وهو أحد عناصر المجموعة أيضاً. أما مجموعتها الأخيرة فكانت 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98، أنتجت 182=93+89=92+90 و 188=96+94=95+3.

وعند هذه النقطة خلصت الطالبة إلى القول:

لا أعرف كيف سأثبت حدوث هذا دائماً. ولا بد من وجود نظرية ما تفسر حدوث هذا. لا أعرف تلك النظرية ولا أستطيع تخمين ماهيتها. ولا أظن أن ذلك يحدث دائماً بسبب استخدامنا عشرة أعداد صحيحة فقط.

سيلاحظ القارئ أن اختيارها الأعداد العشرة الصحيحة أصبح أقل عشوائية في المجموعة الثالثة، حيث اختارت أرقاماً متتالية من 89 حتى 98، ولم تضع نظاماً لإيجاد المجاميع المتساوية، وكان الباحث يأمل في أن تظهر المقابلة سبب توقفها عن متابعة المسألة.

الرواية الثانية

الطالبة: جرّبت مجموعات مختلفة ونجحت جميعها، ولم أتمكن من معرفة سبب ذلك، أهي نظرية أم ماذا.

الباحث: إذن، فقد عثرت دائماً على خيارين؟

الطالبة: نعم، جربت مجموعات مختلفة ونجحت جميعها دائماً، ولم أعرف سبب نجاحها. ولم أتمكن من إثبات نظرية أو شيء ما (تتنهد).

الباحث: إذن، فقد جربت مجموعات مختلفة مؤلفة من عشرة أعداد.

الطالبة: (صمت) حاولت معرفة سبب نجاحها.

الباحث: فيمَ فكرت؟

الطالبة: فكرت في أنها يجب ألا تكون أعداداً سالبة، بل تكون بين الواحد والمئة.

قالت «جيمي» إنها ستعاود النظر في المسألة، وبعد ذلك تتحدث عنها. واشتملت محاولتها الثانية على بناء كثير من المجموعات. حيث عدلت في هذه المرة محددات المسألة على النحو الآتي، كما في الشكل 10 :2.

أ. مجموعات عدة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة سالبة تقع بين -1 و -100.

ب. جموعات عدة مختلفة الحجوم تحتوي على أعداد صحيحة موجبة وسالبة تقع بين 1 و 100، و -1 و -100.

ج. جموعات عدة تشتمل على خمسة عشر عدداً صحيحاً موجباً بين 1 و 200.

د. مجموعـات عدة مختلفة الحجوم تحتوي على أعـداد صحيحة موجبة تقع بين 1 و 100.

ملاحظـة: حاولت «جيمي» في كل واحدة من الفئات الأربع، إيجاد تبرير لتسويغ ضرورة قبـول الفرضيـة في المسألـة المعطاة. وقد كانـت النقاشات التي سجلتهـا في صحيفة مذكراتها لكل فئة على النحو الآتي:

أ. {73- ,90- ,89- ,86- ,72- ,73- ,65- ,13- ,1- ,96- ,99- = 1 - 89- ,99- ,90-}؛ 1- 13 = -86.

إذا كانت القوانين تنص على استخدام عشرة أعداد سالبة أقل من مئة فسوف تنجـح أيضـاً، لكن هذا لا يحـل المسألة (المعطـاة)؛ لأننا يجـب أن نستخدم أعداداً موجبة.

ب. {3, 7, 25, 31}; {-17, 27, 52}

استخدمـت الأعداد الموجبـة والسالبة، وهذه المجموعـات مؤلفة من أقل من عشرة أعداد. لذا، لم ينجح شيء هنا!

ج. {3، 17, 24, 74, 84، 91, 93, 96, 108، 14, 121, 135, 145, 157, 163}

93+3=96؛ 91+17=108؛ 121+24=145.

يمكن أن تنجح إذا غيّرنا بعض الإرشادات، حيث يمكن أن تكون الأعداد أقل من مئتين بدلاً من أقل من مئة، وخمسة عشر عدداً بدلاً من عشرة أعداد.

د. {1، 3}

لا يمكن العمل بعددين فقط؛ بسبب استحالة الحصول على اختيارين ناجحين.

{1, 2, 3, 4, 5}

يمكـن أن تنجح هنا، نظراً إلـى أن 3=2 +1 و 4=3+1. ولكن لو كان لدينا {72, 93, 94, 95, 96} لما نجحت.

الشكل 10،2 تجريب «جيمي» مع فرضيات المسألة

استناداً إلى تجاربها بالفرضية المعطاة في الفئات أ، ب، ج، د (الشكل 2:10)، اختتمت «جيمي» بقولها: «كي تحصل دائماً على الحل الصحيح، لا بد من وجود عشرة أعداد صحيحة موجبة أو أكثر، ولا أعتقد أن الأعداد لها تأثير أيّاً كانت، ويجب أيضاً ألا تكون أقل من مئة، إذ قد تكون أكثر». استخدمت «جيمي» أمثلة وأمثلة مضادة في الحالات التي عُدّلت فيها الفرضية لتبرير صحة الفرضية المعطاة، ويُعدُّ هذا منحًى مهمّاً. وتجدر الإشارة إلى أنها حاولت التعامل مع المسألة مرة أخرى، كما حاولت تنويع الشروط المفروضة على المسألة بهدف التوصل إلى رؤية ما. ويوضح الحل الآتي بناء مثال مضاد للمسألة، حيث تغيرت الفرضية إلى مجاميع مجموعات مؤلفة من أربعة عناصر، ويظهر الحل أيضاً تشابهاً لخط تفكير جيمي.

بناء حالة «مَرَضية» Pathological خاصة[1]

بدأت «هنّا» (Hanna) المسألة بإعادة كتابة المثال المقدّم من الباحث/المعلم، ثم افترضت السؤال الآتي لنفسها: «لماذا يحدث هذا لكل مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من مئة؟» ولكي تجيب عن هذا السؤال، قررت هنا أن «تبدأ باختيار مجموعتين لعشرة أعداد صحيحة أقل من مئة، وترى هل يكون مجموع اختيارين مختلفين متساوياً». وبعد هذا، سوف «تنظر إلى نتائجها وتحاول فهم السبب».

تألفت مجموعة «هنّا» الأولى من {28 ,17 ,16 ,15 ,21 ,3 ,30 ,29 ,7 ,19}، وأوجدت مجموع 19=3+16 وهو من أحد عناصر المجموعة. في حين تألفت مجموعتها الثانية من {10 ,9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1}، حيث أوجدت مجموع 5=3+2 وهو أحد عناصر المجموعة. أما مجموعتها الثالثة فتألفت من {11 ,10 ,1 ,7 ,6 ,4 ,8 ,5 ,3 ,2}، حيث أوجدت مجموع 9=1+8=4+5. في حين اشتملت مجموعتها الرابعة على {11 ,3 ,19 ,7 ,30 ,2 ,4 ,6 ,5 ,9}، وأوجدت مجموع 30=5+6+19 وهو عنصر في المجموعة. ثم جربت أربع مجموعات

1) الظاهرة المَرَضية في الرياضيات، هي التي تعد خصائصها غير معتادة أو سيئة أو مضادة للحدس. عادة، عندما يُشكّك في جدوى النظرية من خلال الأمثلة العكسية، يحاجج المدافعون عن النظرية بالقول إن الاستثناءات مَرَضية. ويمكن القول (ولا سيما في الرياضيات ونظرية المجموعات)، إن الباحثين عن القصور، يشبهون التجريبيين الذين يهدفون إلى هدم النظريات الثابتة- المراجع

أخرى تحتوي كل واحدة منها على عشرة عناصر، ووجدت أن اختيارين في الحالات جميعها يعطيان دائماً المجموع نفسه.

لا أستطيع الكشف عن أي تنقيح اختارته «هنّا» لتحديد الأعداد الصحيحة. حيث اشتملت المجموعات الست الأولى التي بنتها على أعداد صحيحة أقل من العدد عشرين. وكان لديها مجموعة واحدة مؤلفة من أعداد صحيحة من واحد إلى عشرة. ولم تضع أيضاً طريقة منظمة لحساب الاختيارات جميعها التي تؤدي إلى مجموعين متساويين، وأما ما يتعلق بسبب حدوث مثل هذه الظاهرة استناداً إلى تناولها المجموعات الثماني، فخلصت إلى ما يأتي:

> «كانت كل مجموعة» من المجموعات جميعها التي تتألف من عشرة أعداد صحيحة موجبة، تتألف من اختيارين تتساوى مجاميعهما عند إضافتهما إلى بعضهما بعضاً. أعتقد أن سبب حدوث ذلك مرده إلى عدم استخدام أعداد سالبة ولأننا لا نقوم بعملية الطرح، ومن ثم، فلن يكون لديك أعداد سالبة. أعتقد أن سبب حدوث ذلك يعود إلى أنك تستطيع انتقاء عشرة أعداد صحيحة أقل من مئة، الأمر الذي يمنحك خيارات انتقاء جمة. إضافة إلى أن عشرة أعداد تمنحك عدداً قليلاً من الأعداد يمكنك تغييرها وجمعها، لتحصل على المجاميع المتساوية، ولكن إن كان لديك مجموعة مؤلفة من أربعة أعداد أو خمسة فقط أقل من مئة، فلا يمكنك الحصول دائماً على مجموعين متساويين، حيث يوجد لديك عدد قليل من الأعداد تتعامل معها» سجل اليوميات (Journal entry).

بنت «هنّا» عندئذٍ مجموعة مؤلفة من أربعة عناصر، هي: {19, 2, 48, 1}، وحسبت المجاميع الممكنة جميعها في هذه المجموعة إلى جانب المجاميع البسيطة لِ 1 ,48 ,2 ,19. وكانت المجاميع المتبقية: 19+2=31؛ 19+48=67؛ 19+1=20؛ 2+48=50؛ 2+1=3؛ 48+1=49؛ 19+2+48=69؛ 19+2+1=22؛ 19+48+1=68؛ 2+48+1=51؛ 19+2+48+1=70 وتوصلت إلى نتيجة مفادها «لا يوجد شيء في تلك المجموعة متساوي المجموع؛ بسبب عدم توافر عددٍ كافٍ من الأعداد تستطيع وضعها معاً؛ لتحصل على مجموع معيّن يكون مساوياً لمجموع اختيارات أخرى.»

كانـت حجتها بوجـود قدر كبيـر من التنـوع (من حيـث الاختيارات الممكنـة) ضمن المجموعـة المؤلفـة من عشـرة أرقام شبيهـة بحجة «جـون»، فقد افترضـت أن المجموعة الصغرى لا تحتوي على «تنوع»، ومن ثم، فإن اختيارين لن يعطيا المجموع نفسه في مجموعة كهذه، وقد دعمت تخمينها ببناء مجموعة مؤلفة من أربعة عناصر، حيث لم ينجم عن مجموع اختيارين مجموع متشابه. ويقع هذا المثال المضاد ضمن الفئة الثانية من تجارب (جيمي).

وبعـد أن رأينـا أربعة منـاحٍ لتناول المسألـة المعيّنة، فإنني أعرض أخيـراً منحى غير عادي وضعته «إيمي» (Amy).

بناء مجموعة غير عادية

افتتنـت «إيمي» (Amy) بهـذه المسألة؛ فبنت مجموعة غير عاديـة في عملية تجريب مجاميـع أعداد متعددة. وبعد بناء كثير من المجموعات المؤلفة من عشرة عناصر، تحققت لديهـا ظاهرة الاختيارات المختلفة التي تعطي المجموع نفسه. وكتبت في صحيفة مذكراتها أن عمليات التحقق المتكررة لهذه الظاهرة تؤكد صحة نجاحها دائماً، ولمعرفة سبب إعطاء الخيـارات المختلفة المجموع ذاتـه، فقد تطلب الأمر منحى جديداً كامـلاً، حيث يختار كل عنصر على نحوٍ يحقق الهدف. بنت المجموعة {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . .}،... وكتبت:

> «حسنـاً، أعتقد أنني وصلت إلى مكان ما! حسناً، لقد حاولـت إجراء معظم التنويع الممكن بهدف اختيـار هـذه المجموعة. دعني أوضح. بـدأت بالعدد 1، ثم اخترت العـدد 2. والآن، لم أكن أبحث عـن حـل، لذا، لن يكون الرقم اللاحق 3 بالتأكيد، وبذلـك وضعت العدد 4 بدلاً منه؛ لأن 3=2+1، ومـن ثـم سأحصل على جواب فوري. وهكـذا، فقد واصلت عملي على هذا النحـو. وسيكون العدد اللاحـق الأكبـر 7؛ لأن 7=4+2+1، لـذا، لم أختر العـدد 7. بل اخترت العدد بـدلاً منه 8. والآن، 15=8+4+2+1، وعلـى هذا، لم أختر العـدد 15 لأنه سيكون حلاً، لذا، اخترت الرقم ستة عشر. وعندما حصلت على هذه الأعداد الخمسة ... 1, 2, 4, 8, 16 اكتشفت نمطاً. عليّ أن أضاعف العدد الأخير للحصول على العدد اللاحق...(وحصلت على) المجموعة {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...}.

وعند الانتهاء من بناء هذه المجموعة، كتبت «إيمي» أنها لا تستطيع مواصلة مخططها؛ لأن المسألة تتطلب أن تكون عناصر المجموعة بين واحد ومئة. وتفترض أن تكون مجموعتها

المؤلفــة من سبعة عناصر مجموعــة » قصوى» لا تنتج اختيارات لأعداد تضاف إلى المجموع نفسه.

الاحتمالات اللاكاتوسية للتطبيق من خلال بناء صيغ رياضيات لحلول / إستراتيجيات الطلاب

بعــد أن عرضنا مسارات لستة طــلاب في هذه المسألة، أصبحنــا قادرين على التفكر مليّــاً في طبيعة النتائج وتقدير الاحتمالات الرياضية (محتوى وعملية) داخل غرفة الصف. وسأعرضــ في هذا الجــزء أولاً مشاهد الصف المعقولة، استنــاداً إلى رؤى الطلاب الفعلية التــي ناقشناها في الجزء السابــق. وبهذه الطريقة، فأنا أضع نفسي مــكان المعلم المتأمل، وأحلّــل رؤى الطلاب لأدرك خبرة بنــاء الصيغ الرياضية وفقاً لــرؤى هؤلاء الطلاب؛ بهدف تسهيل لغة المناقشة في غرفة الصف التي تؤدي إلى رياضيات قيمة. ويمكن للمرء أن يتصور الموقــف اللاكاتوســي، حيث يوجد هــؤلاء الطلاب الستة في غرفة صــف «مثالية» يتحاورون بخصوصــ محاولاتهم لحل المسألة، ويسهل المعلم خبرات بناء الصيغ الرياضية التي تؤدي الى رياضيات معقدة.

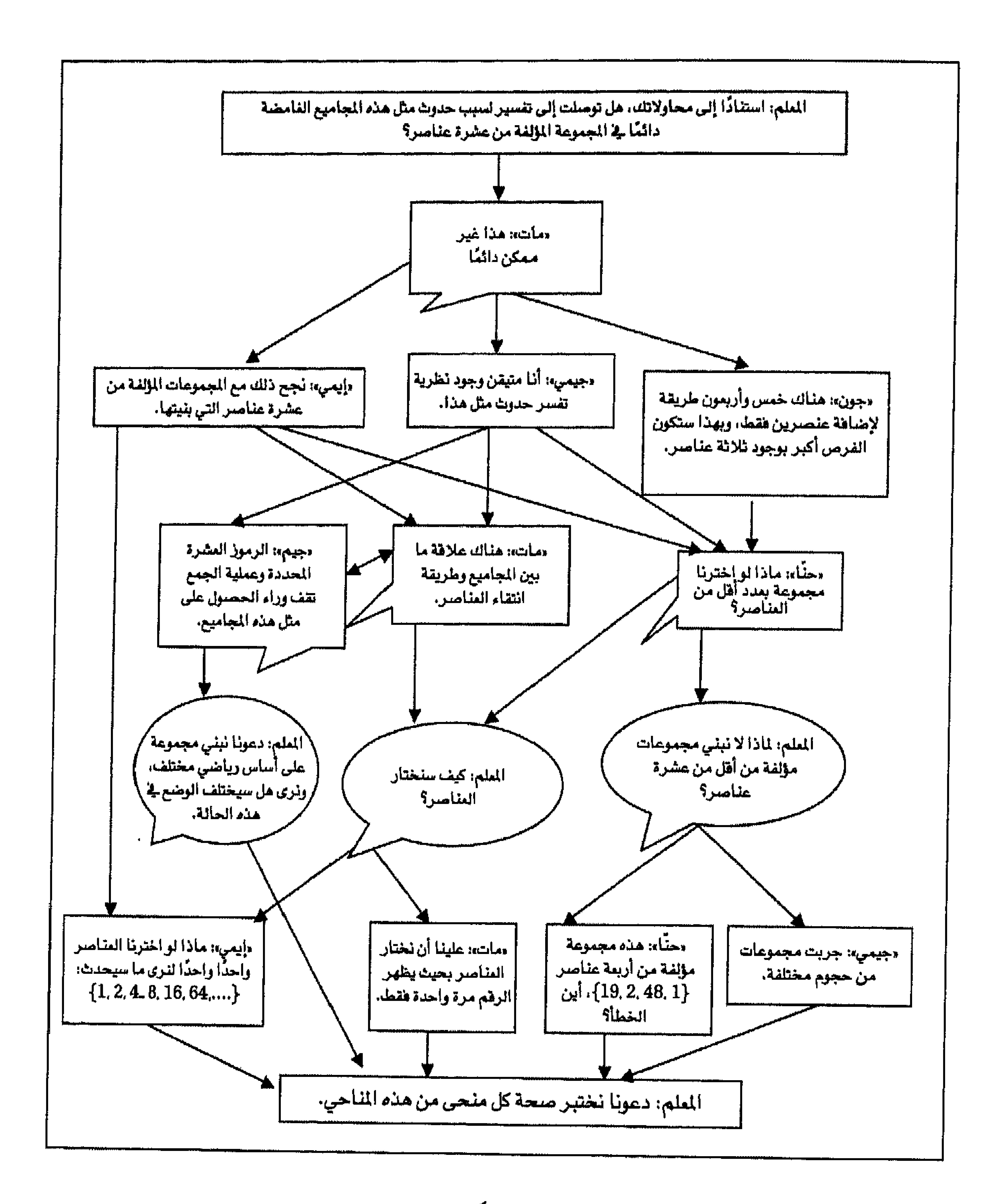
يوضــح (الشــكل 3:10) لغــة المناقشــات المعقولة استنــاداً إلــى رؤى وإستراتيجيات الطــلاب، ويوضح (الشكل 4:10) بناء المســارات الممكنة المؤدية إلى محتوى متنوع يستند إلى إستراتيجيات الطلاب في بناء الصيغ الرياضية، ويحتوي هذا الشكل أيضاً على عناصر العملية اللاكاتوسية المتمثلة في التخمين-البرهان-الدحض التي تؤدي إلى رياضيات غنية. لقــد شرحنــا كلا الشكلين في الجــزء الآتي بعمق، إضافــة إلى مناقشــة الرياضيات الفعلية الناشئــة عن بناء الصيــغ الرياضيــة لرؤى/إستراتيجيات الطــلاب، أي اكتشاف بنى عامة ونتائج أعمق.

مناقشة مسارات معقولة

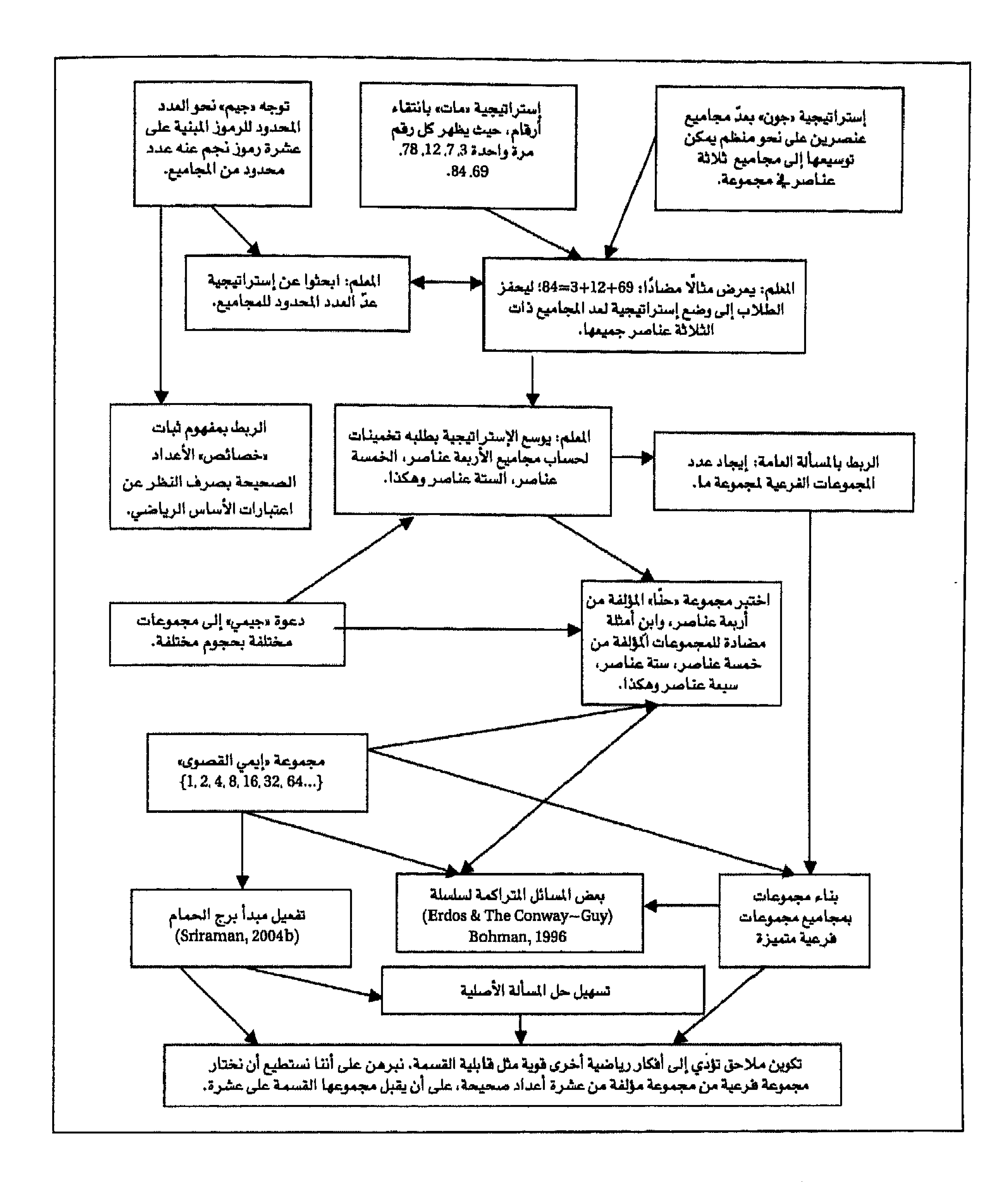
يبدأ النقاش في (الشكل 3:10) بطرح المعلم سؤالاً على الطلاب الستة يتعلق بقدرتهم علــى التوصل إلى تفسيــر معقول للظاهرة الغامضة المتمثلة في إنتــاج الاختيارات المختلفة

لأعـداد تعطـي مجاميع متساوية فـي المسألة المعطاة. لـم يوافق «مات»، الـذي كان طالباً متحمسـاً ولا سيمـا في هذا المساق، علـى إمكانية حدوث ذلـك استناداً إلـى إستراتيجيته بانتقـاء عناصر بحيث لا يتكرر فيها أي رقم. في حين أفاد كل من «إيمي» و«جيمي» و«جون»، الذيـن تحققوا هذه الظاهـرة لمجموعات متعددة تتألف من عشرة أعداد، أن هذه المجاميع تحدث فـي المجموعات جميعها المؤلفة من عشرة عناصر التـي بنوها. أما «جيمي» فتعتقد وجـود نظريـة تفسر سبب حدوث هذا، في حين يرى «جـون» أن هذه المجاميع تحدث بسبب مجموعـة الطرق التي يمكن أن يحسب بها المـرء مثل هذه المجاميع في مجموعة مؤلفة من عشـرة عناصر، وأفـاد بوجود خمس وأربعيـن طريقة للجمع بين عنصريـن في وقت واحد. وهنـاك كثير من المســارات في هذه المرحلة التي يمكن أن تسلكهـا المناقشة. أشار «مات» إلى أن سبب حدوث مثل هذه المجاميع يعود إلى استخدام طريقة معيّنة في اختيار العناصر العشرة. وترى «هنّا» عدم حدوث مثل هذه المجاميع إذا كان مجموع العناصر في المجموعة أقـل من عشرة أرقام. وبنى «جيـم» على ملاحظات «جيمي» و «مـات»، معتقداً أن المجاميع مـا هي إلا دالـة للطريقة المحدودة التـي يستطيع المـرء بوساطتها اختيـار عشرة عناصر باستخـدام نظام الأرقام المستنـد إلى عشرة. ويستطيع المعلم في هـذه المرحلة أن يطرح أسئلة عدة تشجع الطلاب على تبادل الأمثلة فيما بينهم. فمثلاً، سيتيح سؤال «كيف سنختار العناصر» المجال لكل من «مات» و «إيمي» لتبادل الأفكار في بناء مجموعة قصوى مؤلفة من سبعـة عناصـر حيث لا يحدث أي مجموع فيها، وبناء مجموعـة لا تسمح بتكرار أي عدد على التوالـي. ويمكـن للمعلم أيضاً أن يطلب بنـاء مجموعات تتألف من أقل مـن عشرة عناصر، وبذلك تتاح الفرصة أمام «هنّا» و«جيمي» لتبادل أعمالهما مع الآخرين.

ولكـي يضيف المعلم رؤية «جيم» بخصوص الغموض الذي يكتنف النظام المبني على عشرة، يمكنه أن يطلب بناء مجموعة مؤلفة من عشرة عناصر على أساس مختلف.



شكل 3:10 مناقشة معقولة استناداً إلى حلول الطالب وإستراتيجياته



شكل 4:10 مسارات نحو بناء صيغ رياضية من خلال التخمين-البرهان-الدحض في المناقشة.

يُعدُّ اختبار صدق جميع التخمينات/التفسيرات عن طريق بناء البراهين والتفنيدات الملائمة بهدف بناء صيغ رياضية للتخمينات التي افترضها الطلاب، ويُعدُّ هذا من أهم الأشياء الواجب عملها في هذه المرحلة. ويمكن للمعلم أيضاً أن يوضح للطلاب أن ميلهم إلى التلاعب بالفرضية يُعدُّ ممارسة طبيعية بين علماء الرياضيات؛ من أجل الحصول على

تصــور للمسألــة المعطاة. ويتعين على القارئ أن يلاحظ أنه على الرغم من أن المناقشة قد بنيت بروح التخيل اللاكاتوسي، فإنها معقولة جداً بكل تأكيد، حيث إنها بنيت على استجابات فعلية (حقائق) للطلاب في صحائف مذكراتهم، ومخطوطات المقابلات التي أجريت معهم.

مناقشة بناء صيغ رياضية للخبرات التي تؤدي إلى رياضيات معقدة

يعرضــ (الشــكل 4:10) احتمالات جمة لتحويل رؤى الطلاب إلــى صيغ رياضية، حيث يسهــل المعلــم (أو ينظم) هذه العملية. وناقشــت أيضاً الرياضيات الرائعــة التي برزت من آراء الطــلاب فــي المسألة. أما إستراتيجيــة «مات» لبناء مجموعة يتكــرر فيها كل رقم مرة واحدة فقط 84 ,69 ,78 ,12 ,7 ,3، من أجل تفنيد الادعاء بحدوث مثل تلك المجاميع دائماً، فيستطيــع المعلم دائماً إعادة تفنيدها دائماً من خلال عرض مثال مضاد: 84=69+12+3 لتحفيز الطلاب إلى وضــع إستراتيجية لعد مجاميع العناصر الثلاثة جميعها. لذا، يمكن أن يسمح لِ «جون» بمشاركة إستراتيجيته لإيجاد مجموعات من عنصرين بانتظام، ويمكن أيضاً اختبــار توجه جيم نحــو العدد المحدود للرموز المبنية على عشــرة، ونجم عنه عدد محدود مــن المجاميع عن طريق الطلــب إلى الطلاب تقدير عدد المجاميــع الممكنة في المجموعة المؤلفة من عشرة عناصر.

ويمكــن أن يطلــب إلى الطلاب تخميــن إستراتيجيــة لمجاميع ثلاثة عناصــر استناداً إلــى عمل «جــون»، الذي يمكن توسعته على نحوٍ غير محدود، وكذلــك ربطه بالمسألة العامة المتصلــة بِعَــدّ عدد المجموعــات الفرعية لأي مجموعــة معطاة، وبذلك ينيــر الطريق أمام البنيــة العامــة للمجموعات الفرعية المنبثقة عن المجموعــات. ويستطيع المعلم الطموح أن يوســع هذا علــى نحوٍ أكبر بــأن يطلب إلى الطلاب بنــاء مجموعات لهــا مجاميع مجموعات فرعيــة متميزة، وهــي المسألة التي طرحها «بول إيردوســ» (Paul Erdos) في عام 1930، ومن ثم يطرح مسألة «إيردوس» للمجموع المتراكم التي تتلخص على النحو الآتي:

يكــون للمجموعــة S المؤلفــة مــن أعــداد صحيحــة مجاميــع مجموعــات فرعيــة متميــزة إذا كان فــي المجموعــة $\{\sum_{x \in X} x : X \subset S\}$ عنصــرا $2^{|S|}$ متميــزان. نفترضــ أن

$f(n)=\min\{\max S: [S]=n$، وأن S لهـا مجاميـع مجموعات فرعية متميزة، فكم أصغر حجم لـ $f(n)$؟

افترض «إيردوس» فـي عـام 1931 أن $f(n) \geq c\,2^n$ للثابت c وفي عـام 1955 أثبت إيردوس وموسـر Moser أن ($f(n) \geq 2n/10\sqrt{n}$)، وبقي هـذا أفضل تقدير للحد الأدنى .(Bohman, 1996)

ومـن الطبيعي أن نسـأل أنفسنا: تُرى، ما الحد الأعلى؟ إذا أخذنا المجموعة S لتكون هـي القـوة n الأولى من 2 كما فعلت «إيمي» فإننا نـرى بسهولة أن $f(n) \leq 2^{n-1}$. كانت رؤية «إيمي» غير العادية للمسألة وبنائها لمجموعتها «القصوى» قد أنتجت الأعداد الثلاثة الأولى فـي سلسلـة كنواي-غـاي (Conway–Guy) التي بنياهـا في عـام 1967 (Guy, 1982)، وبرزت من هذا المجموع الصعب للمسألة المتراكمة. يمكن تعميم المسألة المعطاة للطلاب للحصـول علـى أعداد كنـواي وغاي علـى النحـو الآتـي (Gardner, 1997). وعلى نحو ما حددنـا آنفاً، نفترض $f(n)$ العدد الصحيح الأصغر، بحيث توجد أعداد صحيحة N موجبة $\leq f(n)$ تكـون فيهـا مجاميـع المجموعـات الفرعية جميعهـا متميزة. القيـم الثلاثة الأولى لـ f هـي $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4$، ومـن المثير للاهتمـام أن $f(4)$ ليس 8 بل 7. افتُرض الحد 8 من حقيقـة أن مجاميع المجموعـة الفرعية للقوى الأربـع الأولى من اثنين هـي: 8 و 4 ,2 ,1- متميـزة علـى نحوٍ واضـح. وكانت هذه رؤيـة «إيمي» عندمـا حاولت بناء مجموعة بمجاميـع متميزة. وقد تقود فكرة «إيمي» القارئ (الصف «المثالي») إلى الاعتقاد أنـه إذا مـا اختيرت أربعة أعداد أقـل من أو تساوي سبعة، فعندئذٍ يكـون مجموعا اختيارين مـن المجموعة متساويين. وقد ثبت بطلان ذلك من خلال المجموعة الآتية: S=(3,5,6,7) (تحقق ذلك بنفسك!). ولعل ما يثير الدهشة على نحو أكبر هو أن $f(6)=24$ وليس 32 التي يمكـن أن يشك القارئ فيها من خـلال اعتبارات التمثيل الثنائي. والمجموعة المقابلة هي S = (11,17, 20, 22, 23, 24). أمـا القيم الثماني الأولى لسلسلة كنواي وغاي $f(n)$ فهي: 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 84. والحـد الأعلـى الـذي توصل إليه كنواي وغـاي للمجموعة S كان 2^{n-2}، شريطة أن تكون n كبيرة بما يكفي. وسيقود هذا المسار إلى تقديم الصياغة الرياضية للبنية الكبرى لما وراء المسألة الأصلية.

أما المسار الآخر في التعامل مع المسألة المتراكمة وأرقام كنواي وغاي، فهو من خلال الإستراتيجيتــه المنظمــة لإيجاد المجموعــات الفرعية، ومن ثم يمكــن استخدام المجاميع الممكنــة جميعهــا لاختبار مجموعة «هنّا» المؤلفة من أربعة عناصــر. والسؤال المطروح هو: هــل يمكننا بنــاء مجموعة مؤلفة من خمســة عناصر وستة عناصر وسبعــة عناصر، وهكذا، مــع اختيار أعداد صحيحة من بين واحد ومئة، على ألا تعطي الاختيارات المختلفة المجموع نفسه. وسيتيح هذا السؤال المجال أمام المعلم لأخذ أفكار كل من «إيمي» و«جيمي» وتحويلها إلى صيغ رياضية مثمرة بحيث تؤدي إلى مجموع المسألة المتراكمة. وأخيراً، تؤدي مجموعة «إيمي» القصوى المؤلفة من سبعة عناصر أخرى إلى مجموع المسألة المتراكمة التي اقترحها إيردوس، وكذلك عملية أعداد كنواي وغاي إذا ما اقترنت بالتسهيل الملائم.

وتتمثــل الإمكانية الأخرى فــي بناء الصيغ الرياضية بعد أن يكــون الطلاب قد توصلوا إلــى طرائق لإيجاد مجموعات فرعية من المجموعات، ومكّن عدد هذه المجموعات الفرعية «إيمــي» من تطبيق مبــدأ برج الحمام بهدف حل المسألة الأصليــة. ويمكن عندئذٍ استخدام مبــدأ برج الحمام في تسهيل حل المسألة الأصليــة بملاحظة أن أصغر حل ممكن هو واحد، وأكبــر حــل ممكن هــو $90+91+.....+99=945$، لكن عــدد المجموعــات الفرعية لمجموعة مؤلفــة مــن عشرة عناصر أكبر من ذلــك بكثير، أي $2^{10}=1024$، ومن ثــم يجعل الاختيارات المتعــددة للمجموعات الفرعيــة تنتج المجموع نفســه. وبهذه الطريقة، يمكــن دمج الأفكار المتعددة للطلاب بدءاً من اختيار المجموعة 90، 91،...99 «مات»، مروراً بحساب المجاميع «جــون»، ومن ثم إلى تخمين الأرقام المحدودة بسبــب الخيارات المحدودة للأعداد «جيم»، وصولاً إلــى تأكيد صحة فرضية «هنّا» و«جيمي». وتستطيع «هنّــا» و«جيمي» وغيرهما اختبار صــدق تخميناتهــم للمجموعــات المؤلفة من أقل مــن عشرة عناصر. وهذا مــن شأنه تأكيد حسّ «جيمي» بأن مجموعة مؤلفــة من خمسة عشر عنصراً بأعداد صحيحة تقع بين الواحد والمئتيــن ستؤدي بالتأكيــد إلى كثير من الاختيارات تؤدي إلى المجموع نفسه ($2^{15} > 190+191+...199$) . هناك عدد ضخم من الإمكانات لصوغ الأفكار الأخرى القوية صياغة رياضيــة، مثل قابليــة القسمة والتطبيق الواسع لمبدأ برج الحمام. مثــلاً، أثبِت أننا نستطيع

اختيار مجموعة فرعية من مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة، بحيث يقبل مجموعها القسمة على عشرة (Fomin, Genkin, & Itenberg, 1996).

النتائج والمضامين

تؤكد المناقشة السابقة ذلك الكم الكبير من الرياضيات الذي بات متاحاً لطلاب المرحلة الثانوية إذا ما أفاد المعلم من رؤى الطلاب في المسائل العادية التي تقودهم إلى اكتشاف البنى الرياضية. وعلى الرغم من أن الطلاب الستة كان يملكون فقط التطور الرياضي لطلاب الجبر المبتدئين، وكانوا يعملون بأدوات محددة، فإن محاولاتهم أظهرت النزعة الطبيعية نحو ابتداع أدوات رياضية جديدة لمعالجة هذه المسألة. بمعنى أن سلوكهم الرياضي كان مشابهاً لعملية بناء الأدوات الغنية التي تميز تاريخ الرياضيات، عندما كانت تواجه علماء الرياضيات مسائل محيرة مثل، نظرية فيرمات (Fermat) الأخيرة، ومسألة الألوان الأربعة. وهكذا، فإن عملية إيجاد خبرات رياضية تحتّم إيجاد أدوات جديدة تُعدّ أسلوباً تربويّاً مفيدًا.

ونود هنا تأكيد قيمة اختيار المسائل الجديدة (النموذجية) التي تستحوذ على اهتمام الطلاب، وتكون سهلة المنال للممارسين من أصحاب المهنة. ويبدو أن كثيراً من الدراسات تشير إلى أن المسائل التوفيقية ومسائل نظرية الأعداد تعدُّ مفيدة بصورة خاصة في تسهيل هذه العملية، إضافة إلى أنها تقود نحو استقصاء البنية الأساسية. إن من شأن إمكانية الوصول إلى المسائل السهلة الصياغة (ولكن المعقدة رياضيّاً) أن تساعد المعلمين على تقوية التفكير المستقل، وتعزيزه في غرفة الصف.

ومع أن التوجه الحالي في تعليم الرياضيات يدور حول تأكيد استخلاص النموذج للمسائل/ الأنشطة الموجودة في سياق العالم الحقيقي (Lesh & Doerr, 2003) بصفته وسيلة لحفز بناء الصيغ الرياضية في غرفة الصف، فإن المسائل الرياضية الجديدة ما زالت تحتفظ بمكانتها المهمة في المنهاج. ونحن نعتقد أن عملية تشجيع الطلاب على معالجة مسائل العد الشاذة (Atypical Counting Problems) لعمل روابط عميقة بموضوعات نظرية الأعداد والتوافيق والتحليل، تُعدّ متممة للرياضيات التطبيقية والإحصاء اللذين

تعلمهمـا الطلاب عبر منحى النمذجة الذي يكتسب حماساً كبيراً في الوقت الراهن. ويكمن الأمل الكبير فـي ألا ينسى معلمو الرياضيات الجمال الكامن في الأنشطة الرياضية البحتة، وأن يؤكـدوا لطلابنـا أن مثل هذه الأنشطـة تعزز من خيال علمـاء الرياضيات وتصوراتهم، وأسهمت أيضاً في نموها منذ فجر تاريخها.

تتمثـل قيمة السماح للطلاب بمدة إضافية من الوقـت لحل مسألة ما، وتشجيعهم على المشاركـة في كتابـات تأملية في صحيفة مذكراتهم، في تحقيـق كثير من الأهداف. فهي لا تـؤدي فقط إلى إيجاد جو هادئ يتيح للطـلاب تجريب كثير من الإستراتيجيات، بل تساعد المعلم أيضاً على تخطيط حصص دراسية تشتمل على مناقشات رياضية تهدف إلى تسهيل إيجاد رياضيات جديدة، وكذلك اكتشاف البنية. وتعدُّ كتابة الطلاب في صحائف المذكرات مصـدراً ثريّـاً للبدء بالمناقشات الصفية مع الإبقاء على هـدف صياغة البنى الرياضية في الأذهان. ولا يتوقف الأمر عند هذا الحد، بل إن محاولات الطلاب غير الصحيحة أو الأمثلة المضـادة تخدم الغرضـ التربوي، بإتاحة المجـال أمام المعلم أو الطـلاب الآخرين لوضع التفنيد المناسب الذي يتيح لهم إجراء التعديلات الضرورية للمضي بالرياضيات قدماً. لقد رأينـا في محاولات الطلاب السابقة في التعامـل مع المسألة، أن لديهم ميلاً طبيعيّاً لتجربة الفرضيـات عندما تكون المسألة صعبة جدّاً في صياغتهـا الحالية. ومن المؤكد أن التوصل إلـى رياضيات جديدة يتحقق عبر عملية التعديل المتواصلة هذه التي تتعرض فيها الفرضية الأوليـة إلى غربلة حتى تبـرز النظرية إلى السطح. تنقل لنا الطريقـة اللاكاتوسية المتمثلة فـي التخمين-البرهان-الدحضـ صورة نابضة بالحيـاة للرياضيات. ومـن المفيد تعريض معلمي المستقبل لنمذجة هذه العملية في الرياضيات ومساقات تدريسها. وتكشف النقاشات الصفيـة الافتراضية السابقة، وما حملته مـن آراء حقيقية للطلاب، تلك الرياضيات الثرية التي تصبح سهلة المنال عبر الطريقة اللاكاتوسية والتسهيل الدقيق للتطبيق. وهذا يستدعي ضرورة اكتساب معلمي المستقبل معرفة عميقة بالرياضيات المتقدمة.

وفـي هذا السيـاق، دعا دوير وليشـ(Doerr And Lesh, 2003) معلمـي الرياضيات إلى إدراك إمكانية تطبيق مبادئ دينيز (Dienes 1960, 1961) لتربية المعلمين وقياسها.

فمثـلاً، يُعـدُّ «المبدأ متعـدد المستويـات» (Multi-Level Principle) الذي اقترحه دوير وليشـ نظيراً تعليميّاً لِ «المبدأ الديناميكي» (Dynamic Principle) الذي نادى به دينيز، وأكـده كلٌّ مـن دويـر وليش بقولهمـا: «يحتـاج المعلمون في الغالـب إلى معالجـة المحتوى، وإستراتيجيـات التعليـم، والجوانـب النفسيـة للمواقـف التعليمية/التعلميـة فـي آنٍ معـاً» (صـ. 133). وهذا يعنـي أننا عندما نعطي الطلاب مسألة مفتوحـة النهاية، تصبح عندئذٍ مسؤوليتنـا معالجة أكبر قدر ممكن من جوانب المسألة، وبناء صيغها الرياضية إلى أن تؤتي ثمارهـا في التوصل إلى اكتشاف البنية كما أوضحنا آنفاً. وضمن هذا المسعى، تُعدُّ منهجية لاكاتوس المتمثلـة فـي التخمين-البرهان-الدحض أداة قيمـة في بناء الصيـغ الرياضية للمسائـل غير العاديـة، وربط غرفة الصـف اللاكاتوسيـة «المثالية» الخياليـة بغرفة صف الرياضيات الفعلية.

قائمة المراجع

Australian Education Council (1990). A National Statement On Mathematics For Australian Schools. Melbourne, Vc: Australian Educational Council.

Bohman, T. (1996). A Sum Packing Problem Of Erdş And The Conway–Guy Sequence. Proceedings Of The American Mathematical Society, 124(12), 3627–3636.

Brodkey, J. J. (1996). Starting A Euclid Club. Mathematics Teacher, 89(5), 386–388.

Dienes, Z. P. (1960). Building Up Mathematics. London: Hutchinson Education.

Dienes, Z. P. (1961). An Experimental Study Of Mathematics Learning. New York: Hutchinson.

Doerr, H., & Lesh, R. (2003). A Modeling Perspective On Teacher Development. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism (Pp. 125–140). Mahwah, Nj: Erlbaum.

English, L. D. (1998). Children's Problem Posing Within Formal And Informal Contexts. Journal For Research In Mathematics Education, 29(1), 83–106.

English, L. D. (1999). Assessing For Structural Understanding In Children's Combinatorial Problem Solving. Focus On Learning Problems In Mathematics, 21(4), 63–82.

Fawcett, H. P. (1938). The Nature Of Proof. Thirteenth Yearbook Of The Nctm. New York: Bureau Of Publications, Teachers College, Columbia University.

Fomin, D., Genkin, S., & Itenberg, I. (1996). Mathematical Circles (Russian Experience). American Mathematical Society.

Gardner, M. (1997). The Last Recreations. New York: Springer–Verlag.

Goldbach, C. (1742) Letter To L. Euler, June 7, 1742. (Accessed On January 11, 2004) Http://Www.Mathstat.Dal.Ca/~Joerg/Pic/G–Letter.Jpg

Guy, R. K. (1982). Sets Of Integers Whose Subsets Have Distinct Sums, Theory And Practice Of Combinatorics, Annals Of Discrete Math, 12, 141–154. North–Holland, Amsterdam.

Hogendijk, J. P. (1996). Een Workshop Over Iraanse Mozaïken. Nieuwe Wiskrant, 16(2), 38–42.

Hung, D. (1998) Meanings, Contexts And Mathematical Thinking: The Meaning–Context Model. Journal Of Mathematical Behavior, 16(3), 311–344.

Lakatos, I. (1976). Proofs And Refutations. Cambridge, Uk: Cambridge University Press.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations Of A Models And Modeling Perspective On Mathematics Teaching, Learning And Problem Solving. In R. Lesh And H. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism (Pp. 3–34). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Lewis, B. (2003). Taking Perspective. The Mathematical Gazette, 87(510), 418–431.

Maher, C. A., & Kiczek, R. D. (2000). Long Term Building Of Mathematical Ideas Related To Proof Making. Contributions To Paolo Boero, G. Harel, C. Maher, M. Miyasaki. (Organisers) Proof And Proving In Mathematics Education. Icme9 –Tsg 12. Tokyo/Makuhari, Japan.

Maher, C. A., & Martino A. M. (1996A) The Development Of The Idea Of Mathematical Proof: A 5–Year Case Study. Journal For Research In Mathematics Education, 27(2), 194–214.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996B) Young Children Invent Methods Of Proof: The «Gang Of Four.» In P. Nesher, L. P. Steffe, P. Cobb, B. Greer & J. Goldin (Eds.) Theories Of Mathematical Learning (Pp. 431–447). Mahwah, Nj: Erlbaum.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1997) Conditions For Conceptual Change: From Pattern Recognition To Theory Posing. In H. Mansfield (Ed.), Young Children And Mathematics: Concepts And Their Representations. Durham, Nh: Australian Association Of Mathematics Teachers.

Maher, C. A., & Speiser, B. (1997). How Far Can You Go With Block Towers? Stephanie's Intellectual Development. Journal Of Mathematical Behavior 16(2), 125–132.

National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics: Reston, Va: Author.

Rotman, B.(1977). Jean Piaget: Psychologist Of The Real. Cornell University Press.

Sriraman, B (2003A). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Abili–tyto Formulate Generalizations. The Journal Of Secondary Gifted Educa–tion,14(3),151–165.

Sriraman, B (2003B) Can Mathematical Discovery Fill The Existential Void? The Use Of Conjecture, Proof And Refutation In A High School Classroom (Fea–ture Article). Mathematics In School, 32(2), 2–6.

Sriraman, B. (2004A). Discovering A Mathematical Principle: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.

Sriraman, B. (2004B). Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations. Journal Of Mathematical Behavior, 23(2).

Sriraman, B. (2004C). Discovering Steiner Triple Systems Through Problem Solv–ing. The Mathematics Teacher, 97(5) 320–326.

Sriraman, B. (2004D). Re–Creating The Renaissance. In M. Anaya, & C. Michelsen (Eds.), Proceedings Of The Topic Study Group 21: Relations Between Math–ematics And Others Subjects Of Art And Science: The 10Th International Congress Of Mathematics Education (Pp. 14–19). Copenhagen, Denmark.

Sriraman, B., & Adrian, H. (2004A) The Pedagogical Value And The Interdisciplin–ary Nature Of Inductive Processes In Forming Generalizations. Interchange: A Quarterly Review Of Education, 35(4), 407–422.

Sriraman, B., & English, L. (2004A). Combinatorial Mathematics: Research Into Practice. Connecting Research Into Teaching. The Mathematics Teacher, 98(3), 182–191.

Sriraman, B., & Strzelecki, P. (2004A). Playing With Powers. The International Journal For Technology In Mathematics Education, 11(1), 29–34.

Van Maanen, J. (1992). Teaching Geometry To 11–Year–Old «Medieval Lawyers.» The Mathematical Gazette, 76(475), 37–45.

Wheeler, D. (2001). Mathematisation As A Pedagogical Tool. For The Learning Of Mathematics, 21(2), 50–53.

ملاحظة

1. افترض أن C مجموعة من المجموعات غير الخالية. عندئذٍ يمكن لنا أن نختار عنصراً من كل مجموعة. وهكذا، فإن هناك دالة معرّفة على C، لكل مجموعة S في المجموعة، بحيث تكون $f(S)$ عنصراً من s.

مراجعة طلاب المرحلة الابتدائية الكوريين الموهوبين في الرياضيات

لنظرية يولر (Euler) للشكل متعدد الوجوه

جيهون يم، سانغهوم سونغ، وجون كيم



ملخص

يستكشف هذا البحث كيفية تشابه البنى التي يقدمها طلاب الصفين الخامس والسادس الابتدائيين الموهوبين في الرياضيات باستخدام نظرية يولر للشكل متعدد الوجوه (Polyhedron Theorem)، مع تلك النظرية التي يقدمها علماء الرياضيات كما ناقشها لاكاتوس (Lakatos 1976). طُلب إلى أحد عشر طالباً من الموهوبين في الرياضيات في المرحلة الابتدائية تبرير النظرية، وتقديم أمثلة لحل التعارض بين النظرية والأمثلة المضادة، فقدّم الطلاب نوعين من التبريرات للنظرية. وصُنّفت الأشكال الهندسية المجسّمة كما وردت في الأمثلة المضادة، على النحو الآتي: (أ) أشكال مصمتة مجسمات بسطوح منحنية (ب) أشكال مصمتة مجسمات مؤلفة من أشكال مجسمات متعددة السطوح (Polyhedron) تشترك في النقاط أو الخطوط أو الأوجه (ج) أشكال كثيرة السطوح مع ثقوب (د) أشكال كثيرة السطوح تحتوي على أشكال كثيرة السطوح. اقترح الطلاب، إضافة إلى استخدام طريقة «منع الوحوش» (التشوه والقصور) (Monster-Barring)

Method) [1]، نوعين جديدين من التخمينات لحل التعارض بين الأمثلة المضادة والنظرية وطريقة منــع الاستثناءات وطريقة تعديل التشوه. حيث تشبه البنى التي قدمها الطلاب تلك التي قدمها علماء الرياضيات كما ناقشها لاكاتوس.

المقدمة

تقــول إحدى وجهــات النظر في تدريس الرياضيات إن مــن المهم تحليل عملية التطور الرياضي التاريخية للمعرفة الرياضية وإعادة بنائها؛ بهدف تحسين عملية تعليم الرياضيات وتعلّمها. ويشترك عدد من العلماء أمثال ;Clairaut (1741, 1746); Brandford (1980) Klein (1948); Toeplitz (1963); Lakatos (1976); Freudenthal (1983, 1991); And Brousseau (1976) فــي وجهة النظر هذه التي تفترض عادة وجود علاقة وثيقة بين النشأة التاريخية للفرد وعملية التعلم، وتفترض أيضاً أن الطلاب، بمساعدة المعلم وتوجيهه، قــادرون على بنــاء معرفة شبيهة بتلــك التي حصل عليهــا علماء الرياضيــات تاريخيّاً. وقد أظهــر لاكاتوس وجهة النظر هــذه ولا سيما في كتابه بعنوان – البرهان والتفنيد- عبر حوار متخيل بين معلم وطلابه، يدعم فيه المعلم والطلاب ادعاءات كل منهم وينتقدها من منظور شخصيات تاريخية متعددة. ومع ذلك، فإن البنية المعرفية التي نفذها المعلمون والطلاب، كمــا قدمها لاكاتوســ، هي تلك التي نفذها مشاهير علماء الرياضيــات وفيهم يولر وليجندر وكوشي (Euler, Legendre, Cauchy). ويبدو أن وجهة نظر لاكاتوس شبه التجريبية تطلب إلى الطلاب تعلّم الرياضيات في أثناء العمل بطريقة علماء الرياضيات (Chazan, 1990) من خلال إثارة التساؤل الآتي: «هل من الممكن أيضاً لطلاب المرحلة الابتدائية إنشاء البنى المعرفيــة استناداً إلى نظرية يولر للمجســم متعدد السطوح، شبيهة بتلك البنى التي ينتجها علمــاء الرياضيــات كما ناقشها لاكاتوس؟» وقــد ركزت هذه الدراسة فــي محاولتنا للإجابة عــن مثل هذا السؤال، علــى: (أ) البنى المعرفية لطلاب المرحلــة الابتدائية الموهوبين في الرياضيات، مقارنة بتلك المقدمة من علماء الرياضيات، كما ناقشها لاكاتوس، (ب) كيفية

1) منــع الوحوشــ» the monster-barring method مصطلح ابتدعه لاكاتوس (1976) للإشارة إلى تنقيح فرضية مــا باستبعاد الأمثلة المضادة السيئة، وهي طريقة للتعامل مع «الوحوش»؛ أي الأمثلة المضادة التي تبرز عندما تكون التعبيرات ضمن البرهان غير ما يقصد بها أصلاً- المراجع

تبرير طلاب الصفين الخامس والسادس الموهوبين في الرياضيات نظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، (ج) البنى التي اقترحوها بصفتها أمثلة مضادة لنظرية يولر للمجسم متعدد السطوح، و (د) ردود أفعالهم عند مواجهتهم لأمثلة مضادة.

خلفية

استعراض الدراسات السابقة

وجد سريرمان (2003) اختلافاً كبيراً في سلوك حل المسألة بين طلاب المرحلة الثانوية الموهوبين في الرياضيات وغير الموهوبين، وأفاد أن الطلاب النابغين يقضون وقتاً أطول في محاولة فهم موقف المسألة، وتحليل الفرضية بوضوح، ومن ثم وضع خطة تكون عالمية بطبيعتها. وقد ركزت الدراسات السابقة لعمليات المعرفة لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات على التعميم والتجريد والتبرير وحل المسألة (Krutetskii, 1976; Lee, 2005; Sriraman, 2003, 2004). ووجد «لي» (Lee, 2005) أيضاً أن الطلاب النابغين في الرياضيات يميلون إلى التقدم نحو مستويات عالية من الاستدلال من خلال التفكير التأملي.

حلّل بعض الباحثين بناء المعرفة للطلاب استناداً إلى منظور لاكاتوس (Athins, 1997; Boats, Dwyer, Laing, 2003; Borasi, 1992; Cox, 2004; Nunokawa, 1996; Reid, 2002; Sriraman, 2006). مثلاً، أعاد سريرمان بناء المناحي شبه التجريبية لمحاولات الطلاب الستة المذكورين آنفاً في حل مسألة تتعلق بالعد، وعرض احتمالات بناء الصيغ الرياضية في أثناء المناقشة الصفية بروح لاكاتوس. وأفاد كوكس (Cox, 2004) أن قدرة طلاب المرحلة الثانوية على البرهنة تتحسن بعد تعريفهم بعملية «التخمين البرهان النقد – القبول أو الرفض» في حصص الهندسة. وقد وصف بوراسي (Borasi, 1992) عملية مراجعة طالبين من المرحلة الثانوية لتعريف المضلع، وتوصل إلى أن التعامل مع المضلع «بطريقة لاكاتوس» قد أتاح المجال للتفكير الرياضي والأنشطة التي تشجع المشاركين على الإفادة من حدسهم وقدراتهم الرياضية. وحلّل «ريد» (Reid, 2002) عملية حل المسألة لطلاب الصف الخامس الأساسي، وصنّف عمليتهم في التعامل مع الأمثلة المضادة، استناداً إلى طريقة منع التشوه أو الانحراف، ومنع الاستثناء (Exception Barring)، إلى ثلاثة

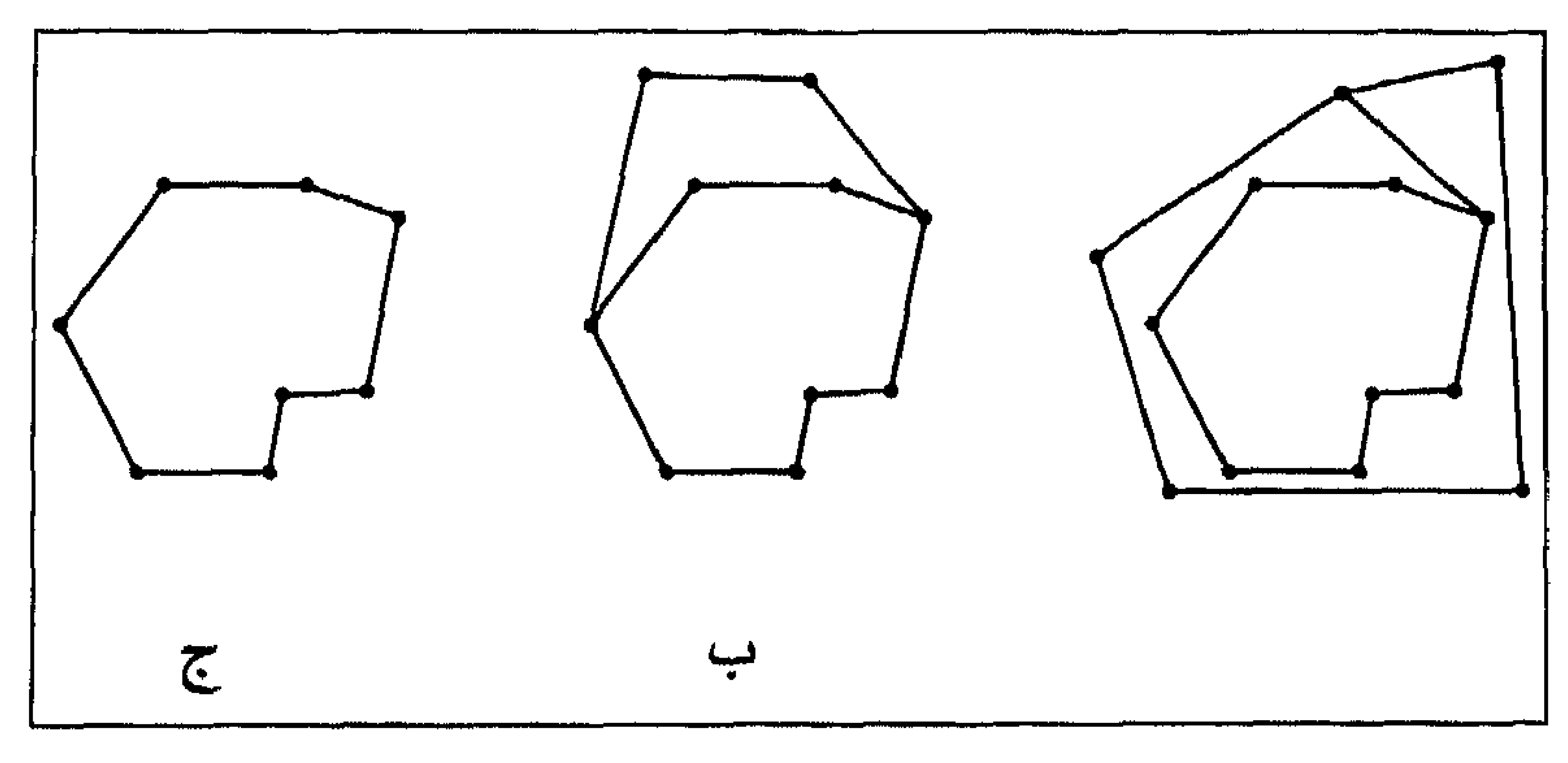
أنمــاط من الاستدلال. وأضـــاف أثنز (Athins, 1997) أيضاً أنه لاحـظ حالة منع تشوه على الزوايا في حصة رياضيات للصف الرابع.

نظرية يولر للشكل متعدد السطوح في براهين لاكاتوس وتفنيداته

عرض لاكاتوس في كتاب البرهان والتفنيد (**Proofs And Refutations**) بعض التبريرات لنظرية يولر، مثل إثبات كاتشي الذي ظهر في تاريخ الرياضيات عبر الحوارات بين المعلم والطلاب. فمثلاً، جعل لاكاتوس طالبين هما: Zeta و Sigma يقولان التوضيح الآتي (P.70-72).

الخطوة الأولى: لمضلع V=E

الخطوة الثانية: لأي مضلع V-E=0 (شكل 1:11أ). إذا طبّقت مضلعاً آخر على الشكل (ليس بالضرورة بالسطح أو المستوى نفسه) يكون للمضلع الإضافي عدد n_1 حافات و n_1 رؤوس. وبتطبيقه على الشكل الأصلي على امتداد سلسلة من n_1 حافات و n_1+1 رؤوس، نزيد عدد الحافات على النحو الآتـي: $n_1 - n_1$ وعـدد الرؤوســ $(n_1+1) - n_1$، أي سيكون في نظام المضلـع الجديد زيادة في عدد الحافات مقارنة بعدد الرؤوس: E − V=1 (شــكل 1:11 ب). للتطبيق التام أو غير المعتاد للأشكال نظر (شــكل 1:11 ج). سوف يؤدي «تطبيق» وجه جديد على النظام دائماً إلــى رفع الزيادة بواحد، أو، إلى نظــام F مضلع مبني بهذه الطريقة E − V =F − 1.



شكل (1:11)

الخطوة الثالثة: يمكنني توسعة تجربة فكرتي بسهولة لتشمل نظاماً مضلعاً «مغلقاً». ويمكن تحقيق مثل هذا الإغلاق بتغطية نظام مضلع مفتوح متعدد الأضلاع بمغلف مضلع: تطبيق مثل هذا الغطاء المضلع سوف يزيد F بقيمة واحد دون إحداث تغيير على V أو E، أو للنظام متعدد الأضلاع المغلق، أو الشكل متعدد السطوح المغلق المبني بهذه الطريقة يكون: $V - E + F = 2$.

بعد التخمين والبرهان، تبرز أمثلة مضادة تفند التخمين والبرهان. وقد أطلق لاكاتوس على الأمثلة المضادة التي تفند مصطلح ليما[1] (Lemma)، أو التخمينات الفرعية، اسم الأمثلة المضادة المحلية (Local Counterexamples)، والأمثلة المضادة التي تفند التخمين الأصلي بالأمثلة الكلية (Global Counterexamples) (ص. 11:10)، واقترح ستة أنواع من الأمثلة المضادة (شكل 11 :7 – 11 :2) التي تظهر في تاريخ الرياضيات على نحو ما هو موضح أدناه.

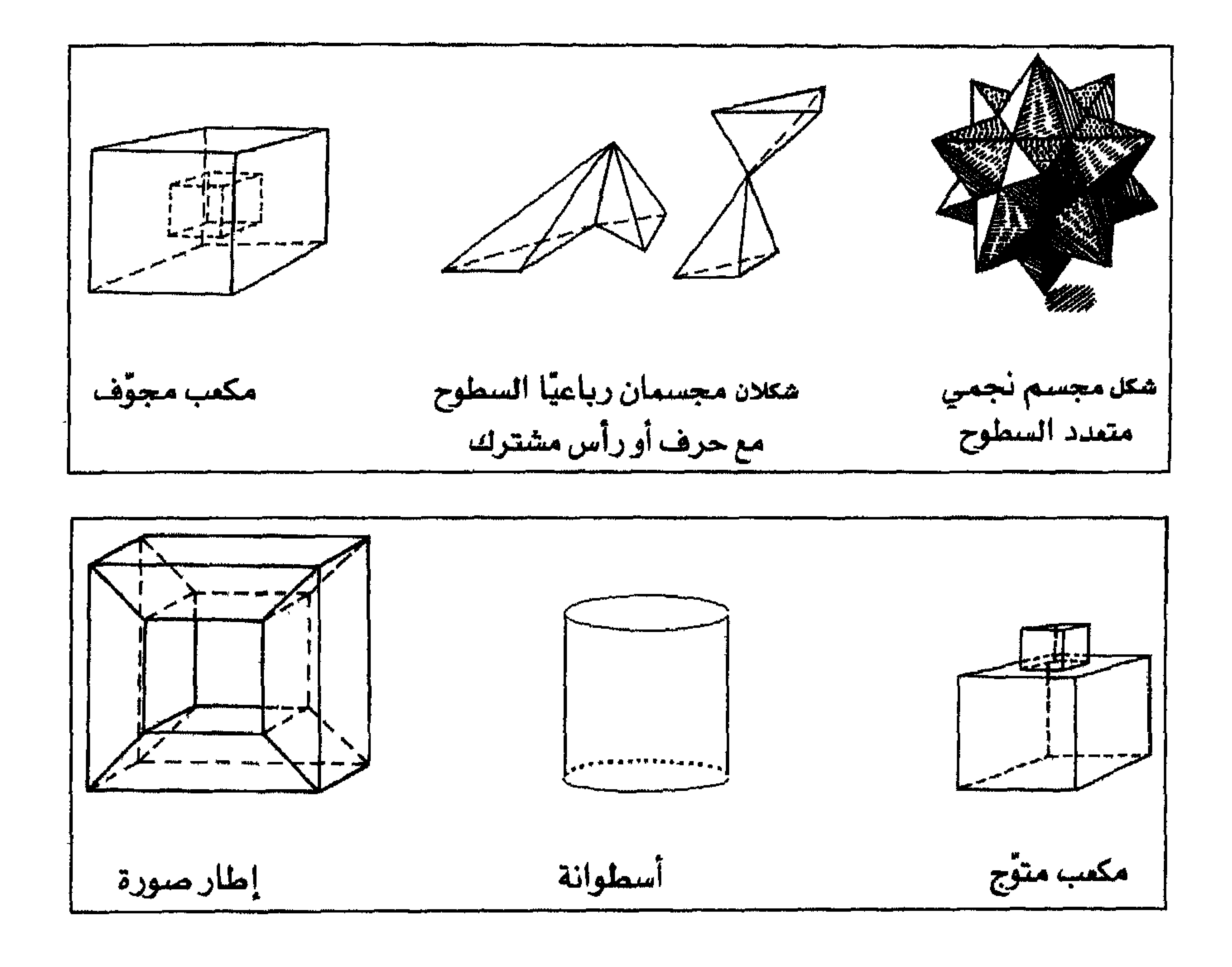
عندما يصار إلى عرض مثال مضاد، فهناك خمسة خيارات. أما الخيار الأول، فينظر إلى التخمين المرفوض على أنه غير صحيح، ومن ثم يرفضه. في حين يستخدم الخيار الثاني طريقة «منع الوحش» (التشوه، الانحراف)، حيث ينظر إلى المثال المضاد على أنه مخلوق عجيب، ويصار إلى الإبقاء على التخمين الأصلي (ص. 16-23). وتولد هذه الطريقة تعريفاً واضح المعالم، لكنها غير مفيدة من وجهة نظر الاستكشاف؛ لأنها لا تعين على تحسين التخمين، في حين يتمثل الخيار الثالث في منع الاستثناء، حيث يصار إلى تغيير التخمين الأصلي إلى تخمين منقح بإضافة جملة شرطية تشير إلى الاستثناء (P.24-27). ولا تضمن هذه الطريقة تحديد الاستثناءات جميعها، وتبقي على القضية المتعلقة بمدى صدق النظرية. ويتمثل الخيار الرابع في طريقة تعديل التشوه، حيث ينظر إلى المنظور

---

1) ليما Lemma في الرياضيات تعني عبارة رياضية يتوقع أن تكون صحيحة، أو عبارة رياضية مثبتة. وهي تسمى مبرهنة تمهيدية أو مساعدة، وهي جزء من إثبات نظرية رئيسة، أي افتراض فرعي يستخدم في إثبات فرضية أو مسألة أخرى. وهي ليست مهمة في ذاتها لكن تساعد على إثبات نظرية مهمة. وقد تصبح نظرية بعد الإثبات، لكنها تظل تسمى «ليما»، مثل ليما غاوس وليما زورن وغرونوال Gronwall Lemma & Zorn's & Lemma Gauss's

المراجع – Lemma

الـذي عُدّت بموجبـه الأمثلة أمثلة مضـادة على أنه مشـوه. ويُفسّر المثـال المضاد على أنه مثـال ع إعـادة تعديل المنظور (P.30-33). أما الخيار الخامس فيتمثل في دمج المُبرهِنة التمهيدية، حيث يحلل البرهان بكل عناية ودقة لتحديد المُبرهِنة الخاطئة التي قد تكون غير ظاهرة أو غير محددة في السابق، وعند كشفها، تضاف إلى التخمين الأولي بصفتها شرطاً لتحسين التخمين المفند (P.33-42).



المنهجية

المشاركون

علـى الرغم من وجود تعريفات متعددة للموهبة الرياضية، لكن لا يوجد تعريف مقبول عالميّـاً (E.G., Bluton, 1983; Miller, 1990; Gagne, 1991). وقـد استخدمنا في هذه الدراسـة تعريف جانييـه (Gagne, 1991) للطـلاب الموهوبين فـي الرياضيات بصفتهم «الطـلاب الذين حدّدهم خبراء على أنهم يمتلكون قدرة متميزة وإمكانات لتحقيق إنجازات كبيرة.» وشارك في هذه الدراسة أحد عشر طالباً من الصفين الخامس والسادس الابتدائيين،

تتـراوح أعمارهـم بين عشرة أعـوام واثني عشر عامـاً من مدارس ابتدائيـة كورية عدة في مقاطعـة جيونجيGyeonggi. وكان من المشاركين خمسة طلاب في الصف الخامس وستة طلاب من الصـف السادس الابتدائي. وكان طلاب الصف السادس الستة يعدّون برنامجاً متقدمـاً للطـلاب الموهوبين فـي الرياضيات؛ ثلاثة منهـم (A, B , C) ملتحقـون ببرنامج جامعـي ترعاه الحكومة، والثلاثة الآخرون (D, E, F) ملتحقون ببرنامج تابع لوزارة التربية والتعليـم. أمـا طلاب الصف الخامس (G, H, I, J, K)، فقد اجتـازوا عملية انتقاء اشتملت علـى اختبار كتابي ومقابلة معمقة، وأوصى مدير مدرستهـم بإلحاقهم بالبرنامج الجامعي. وكان الطلاب جميعهم يتمتعون بدافعية قوية ومتضلّعين من الرياضيات.

المهام

أُعطي المشاركون المهام الآتية:

المهمة الأولى: اشـرح ما تعرفه عن العلاقة بين الرؤوس (V) والأحرف (E) والأوجه (F) فـي المجسم متعدد السطوح، ووضـح كيف يمكن تبرير مثل هذه العلاقة.

المهمة الثانية: هل المعادلة الآتية صحيحة في المجسّمات متعددة السطوح جميعها: $V - E + F = 2$؟ وإذا لم يكن الأمر كذلك، فمتى لا يكون ذلك صحيحاً؟

المهمة الثالثة: إذا عـددت أن مثـالاً مضـاداً يمثـل مجسمـاً متعدد السطـوح، فكيف ستراجع النظرية؟

وإذا كنت تعتقد أن مثالاً مضاداً لا يمثل مجسماً متعدد السطوح، فكيف ستراجع تعريف المجسم متعدد السطوح وتنقحه؟

صُمّمـت المهمة الأولى لتحديـد معرفة المشاركين في نظرية مجسـم متعدد السطوح وتحديـد طريقة تبريرهم للنظرية، في حين هدفـت المهمة الثانية غلى تحديد أنواع الأمثلة المضـادة التـي حددهـا المشاركون. أمـا المهمـة الثالثـة، فصمّمت لملاحظـة كيفية حل المشاركين التباين بين النظرية والأمثلة المضادة.

كان المشاركـون يعرفون العلاقة بين الرؤوس والأحـرف والأوجه الممثلة بالمعادلة: V – E + F=2 قبـل مشاركتهـم في هذه الدراسة. وعلى الرغم من ذلك، فلم يختبر أي منهم صـدق النظريـة سابقاً في المجسمات متعددة السطوح كلها، ولـم يبحث أيضاً أي منهم عن أمثلة مضادة للنظرية.

جمع البيانات وتحليلها

صُمّمـت هذه الدراسة استناداً إلى منهجية دراسة الحالة المتعددة (Multiple Case Study) التي وضعها ين (Yin, 2003). حيث أُعطي المشاركون الأحد عشر هذه المهام في مجموعات مرتبة، وأجريت معهم مقابلات في المدة الواقعة ما بين شهر نوفمبر عام 2005 حتـى شهـر يناير عام 2007. وقد صوّر أحد الباحثين كل مشـارك بوساطة الفيديو في أثناء حل المهام، ثم صُوّروا لاحقاً عندما قابلهم باحث آخر. وأكمل المشاركون المهام في غضون ساعتين تقريباً، ثم حلّل الباحثون لقطات الفيديو والمخطوطات وتقارير الملاحظات وأوراق عمل المشاركين.

وقـد شمـل التحليـل ثلاثـة أنـواع مـن البيانـات التـي جمعهـا الباحثـون: (أ) أنواع التبريـرات، (ب) أنـواع الأمثلـة المضـادة، (ج) طـرق حـل التضـارب. وحُللـت أنـواع التبريـرات والأمثلـة المضـادة التـي عرضهـا المشاركـون باستخـدام الترميـز المفتـوح Open Coding (Strauss And Corbin, 1998)، حيـث قُسّمـت أنـواع التبريـرات إلـى فئتيـن، والأمثلـة المضادة الـى أربعة أنـواع، قُسِّم ثلاثة منهـا إلى جزأيـن فرعيين أو ثلاثـة أجـزاء فرعية. وقـد حُلّلت محاولات المشاركيـن في تعاملهم مع التبايـن بين الأمثلة المضـادة والتخمينـات التـي أظهرتهـا الأمثلـة المضـادة باستخـدام الترميـز الانتقائـي Selective Coding (Strauss And Corbin, 1998) الـذي استنـد إلـى «طريقـة منـع التشوه»،و«طريقـة منع الاستثناء»، و«طريقة تعديـل التشوه»،و«طريقة دمج المبرهنة– ليما» التـي اقترحها لاكاتوس. واستخدم أيضاً تحليل جـدول المتغيرات الإحصائية، وتولى زملاء الدراسة عملية تحقق النتائج (Merriam, 1998).

النتائج

تبريرات المشاركين لنظرية يولر للشكل متعدد السطوح

يمكن تقسيم تبريرات المشاركين للنظرية إلى طريقتين: (أ) تصنيف المجسمات متعددة السطوح إلى فئات عدة، وتبرير النظرية لكل فئة من فئات المجسمات متعددة السطوح، (ب) محاولة عرض تبريرات عامة دون اللجوء إلى تصنيف المجسمات متعددة السطوح. وقد برّر جلّ المشاركين النظرية في أثناء تصنيف المجسمات متعددة السطوح إلى فئات، ومن ثم تبرير النظرية. وقد أظهر المشارك (D) في المقابلة المشار إليها أدناه من خلال تفسيره منطقيّاً أن النظرية مبررة في الأشكال المنشورية (Prism) والهرمية (Pyramids) والموشورية (Prismoids).

المقابلة الأولى:

المشارك D: يبدو أولاً، في أشكال المناشير، أنه يمكن تبريرها في الحالات جميعها.

الباحث: ماذا تعني بذلك؟

المشارك D: (وهو يرسم أشكالاً) حسناً، انظر إلى منشور بعدد زوايا يساوي n وهو منشور مستطيل، ويسمى كذلك لأن قاعدته مستطيلة. إذن، عندنا أربعة رؤوس على الوجه العلوي وأربعة رؤوس على الوجه السفلي، وبذلك فإن عدد الرؤوس يساوي $2n$. وأن عدد الأحرف يساوي $3n$ بسبب وجود أربعة أحرف على الوجه العلوي، وأربعة على الوجه السفلي، وأربعة على الجوانب. وكذلك، فإن عدد الأوجه يساوي $n+2$ بسبب وجود أربعة أوجه على الجوانب، إضافة إلى الوجهين العلوي والسفلي. وأما في حالة المنشور الخماسي، فإن عدد الأوجه يساوي أيضاً $n+2$، حيث يوجد خمسة أوجه جانبية إضافة إلى القاعدة (الأوجه العلوية والسفلية). وتشير المعادلة «$V - E + F$» إلى «عدد الرؤوس − عدد الأحرف + عدد الأوجه»، وفي

حالـة المناشير التي عـدد زواياها n فإنها تكـون: $2n-3n+$ $(n+2)$, ، لذا، فإن «V − E + F» تساوي 2.

الباحث: نعم.

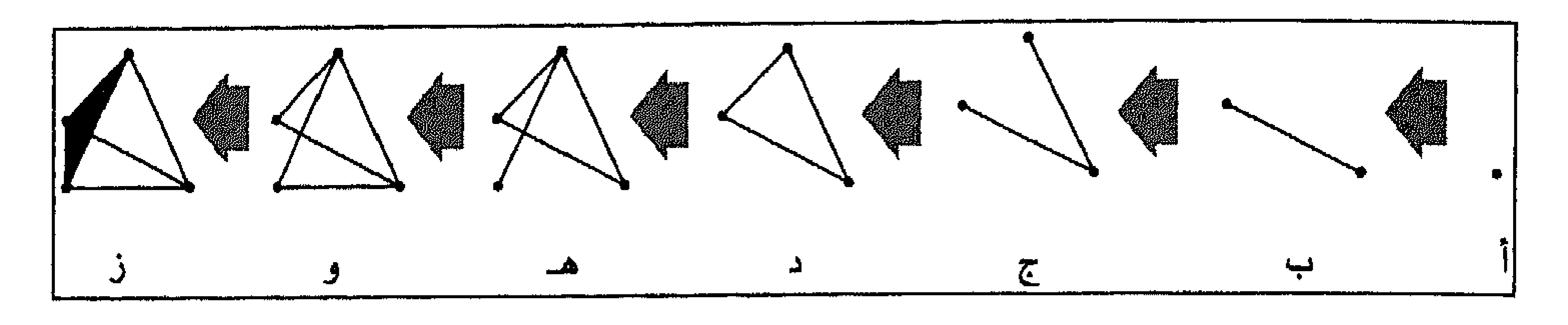
المشارك D: إذن، لقـد انتهينا مـن المناشير... وأما فـي الأشكال الهرمية فيمكن تبريرها أيضاً في الأحوال جميعها.

الباحث: وضح ذلك من فضلك.

المشارك D: هـرم عدد زواياه n، يمكن تبريـره لأن عدد رؤوسه يساوي $n+1$. ولديـه عدد أحـرف تساوي $2n$، وأوجه تسـاوي $n+1$. فإذا أضفـت عـدد الرؤوس إلـى عـدد الأوجه وطرحتهـا من عدد الأحرف فسوف تحصل على 2.

عرضـ المشارك D توضيحـات باستخدام الأشـكال متعددة السطوح، مثـل المنشور المستطيل في حالة المنشور، والهرم والشكل الموشوري. ويُعدُّ المنشور المستطيل مثالاً عامّاً (Mason & Pimm, 1984) يمثـل زاوية المنشور. وأما في حالة الشكل أو الأشكال متعددة السطـوح العادية مثل كرة القدم، فقد استقصـى المشارك D تطبيقات النظرية بوساطة عدّ مجموع نقاط مجسمات معيّنة وأحرفها وأوجهها.

أمـا المشارك B فلم يعمد إلـى تصنيف الأشكال، ولكنه جـرب التبريرات العامة بدلاً مـن ذلـك، حيث بدأ بنقطـة (انظر شكل 8:11)، وتحقق صحـة V − E + F مع ازدياد عدد النقـاط والخطوط والأوجه تدريجيّاً. وكانت هنـاك V واحـدة فقط في البداية بالنسبة إليه، لكن V و E أو E و F تزداد بقيمة واحد على التوالي بالسير قدماً من (A) إلى (G)، في حين تستقـر V−E+F عند واحد. وفي المرحلة الأخيرة، عنـد تغطية أحد الأوجه في (G)، أثبت أن V−E+F=2، استنـاداً إلى حقيقة أن F تزداد بمقدار واحد. وهذا التبرير يماثل تفسيرات الطالبين زيتا وسيجما (Zeta And Sigma) عند لاكاتوس (1976, Pp. 70−72).



شكل (11،8)

بعد تبرير نظرية يولر، عبّر المشاركون جميعاً عن رأي يفيد بوجود شكل متعدد السطوح لـم تكن فيه نظرية يولر صحيحة. مثلاً، اعتقـد المشارك D، كما هو مشار إليه في المقابلة الثانية، بعدم انطباق النظرية على الأشكال متعددة السطوح جميعها.

المقابلة الثانية

المشارك D: حسناً...في البداية، بُـرّرت فقط في الأشكال العادية متعددة السطـوح دون استثناء، وذلـك بسبب وجود خمسـة أنواع من الأشـكال العاديـة متعـددة السطـوح. أعتقد أنهـا مبررة في الأشـكال الخمسة جميعـاً، ومن ثم فهي مبـررة في المناشير والأشـكال الموشورية. لذا، فإنني أعتقد أنها مبررة في معظم الأشكال متعددة السطوح بصورة عامة.

الباحث: إذن، هل تعتقد وجود حالات لا تنطبق عليها النظرية؟

المشارك D: فـي بعضـ الحـالات... أعتقـد أنهـا لا تنطبق علـى الحالات جميعها. (بدأ برسم أشكال ليحصل على مجسمات تثبت عدم انطباق نظرية الأشكال متعددة السطوح).

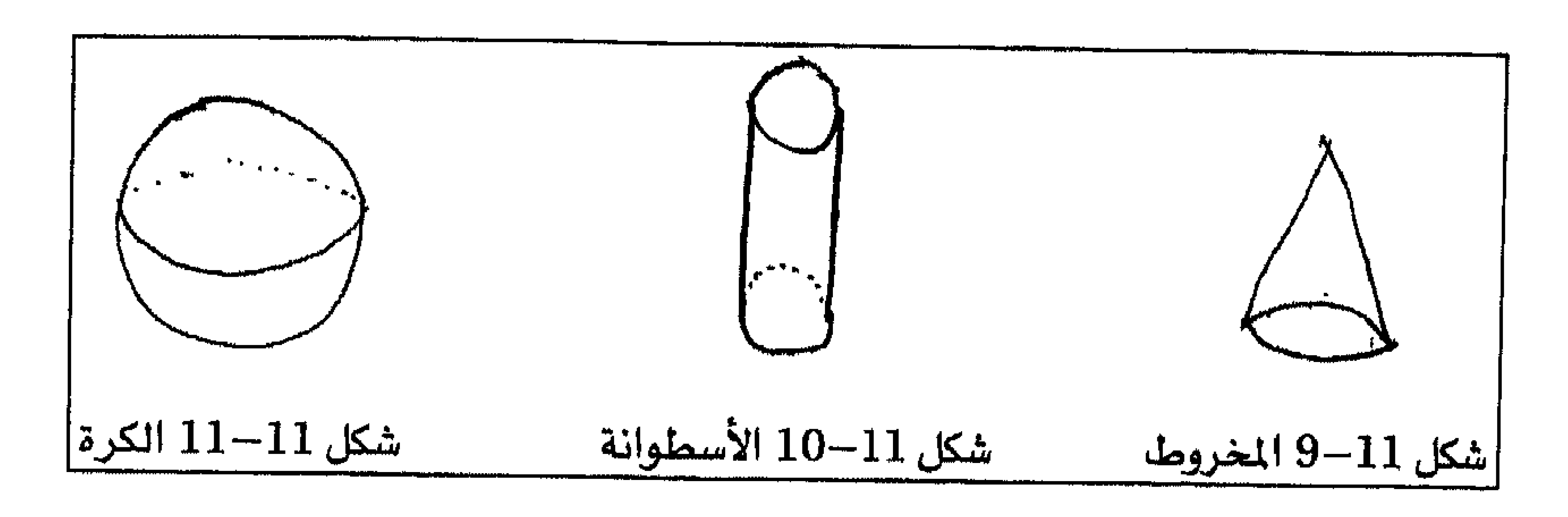
وعلـى الرغم مـن أن المشارك B برّر النظرية باستخـدام الطريقة العامة، فإنه حاول إيجـاد مثـال مضاد معتقداً وجـود مثال على الأقل. وقـد عبّر المشاركون جميعـاً عن رأيهم بوجود مثال لا تنطبق عليه النظرية.

المجسّمات الهندسية التي اقترحها المشاركون بصفتها أمثلة مضادة

اقتــرح المشاركــون أنواعاً مختلفة مــن الأشكال الهندسيــة المجسمة علــى أنها أمثلة مضــادة للنظرية. وصُنِّفت الأشكال الهندسية المجسمة التــي اقترحها المشاركون إلى أربع مجموعات كما هو موضح أدناه.

مجسمات بسطوح منحنية

اقتــرح المشاركــون (B,C, E, F, H, I) مجسمات بسطوح منحنية كالشكل المخروطي (شكل 11:9) والأسطواني (شكل 11:10) والكروي (شكل 11:11) على أنها أمثلة مضادة.



شكل 11–9 المخروط — شكل 11–10 الأسطوانة — شكل 11–11 الكرة

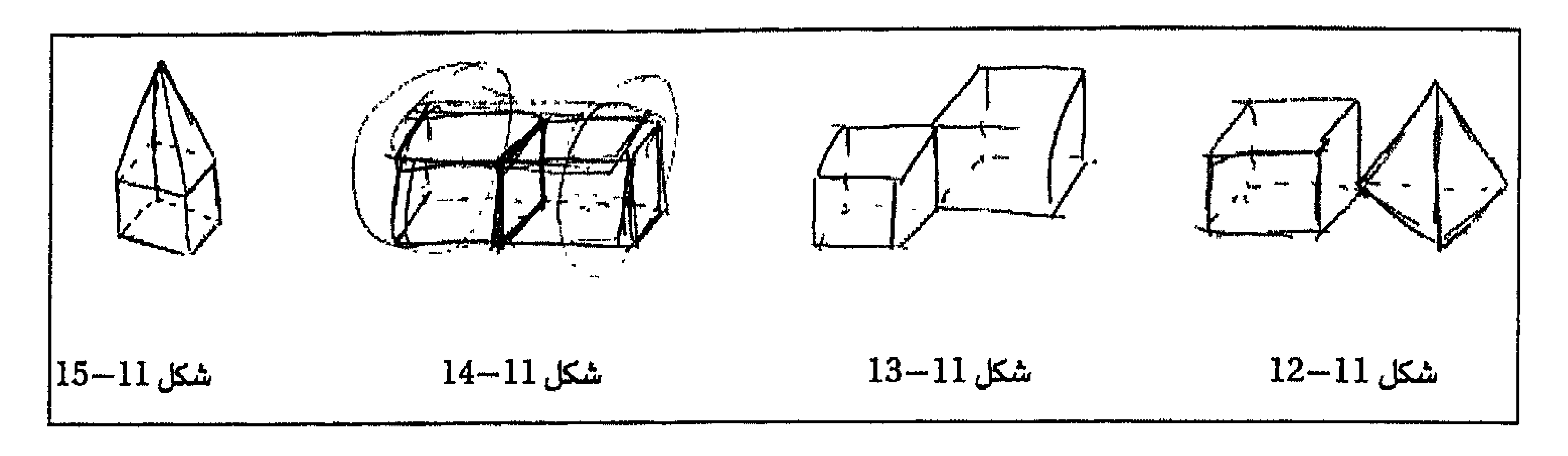
مجسمات هندسية متعددة السطوح تشترك في النقاط والخطوط والأوجه

استشهــد تسعــة مشاركيــن هــم: (A, B,C, D, E, F, G, H, I) بمجسمــات مكونة من شكليــن هندسييــن متعددي الأوجه يشتــركان في النقاط والخطوط والأوجــه بصفتها أمثلة مضــادة. ويمكن تقسيم هذه المجسمات إلــى: (أ) مجسمات تشترك اشتراكاً تاماً في بعض النقــاط أو الخطوط أو الأوجه (من شكل 11:12 إلى شكل 11:15)، (ب) مجسمات تشترك جزئيّاً فقط في خطوط أو أوجه (من شكل 11:16 إلى شكل 11:19).

مجسمات تشترك اشتراكاً كاملاً في النقاط أو الخطوط أو الأوجه

تنطبــق النظرية في المجسمات التي تشترك فــي نقطة واحدة كما هو موضح في شكل 11:12، علــى كل شــكل متعدد الأوجــه، ويشترك شكلان متعددا الأوجــه في نقطة، حيث V–E+F=3. واقتــرح المشاركون أيضاً مجسمات تشترك في الحــرف (شكل 11:13)، إضافة

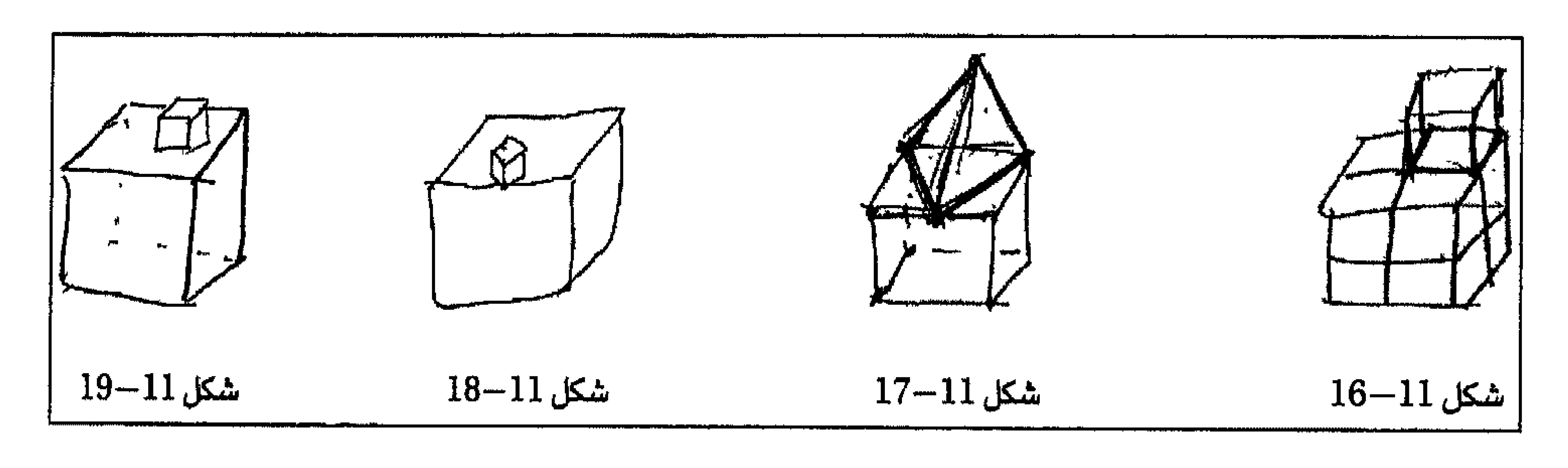
إلــى تلك المجسمات التي تشترك في الوجه اشتــراكاً تامّاً (شكل 11:14 و 11:15) بصفتها أمثلة مضادة.



شكل 11–12 شكل 11–13 شكل 11–14 شكل 11–15

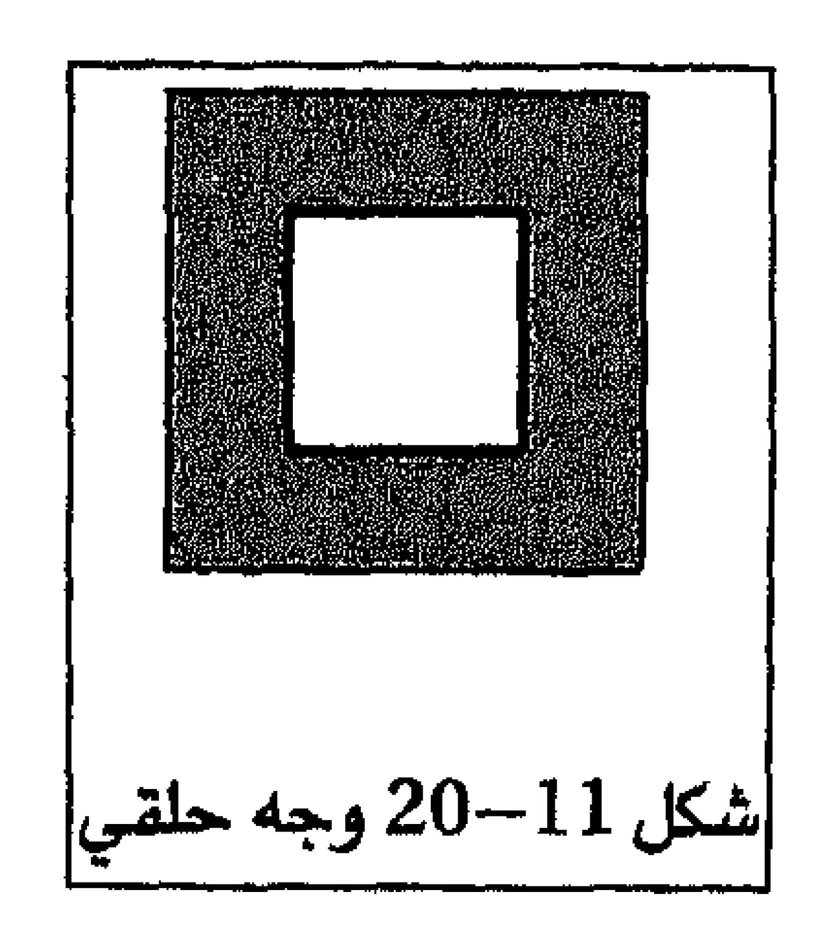
مجسمات تشترك جزئيّاً فقط في خطوط أو أوجه

أثار الشكلان 11:14 و11:15 لدى المشاركين السؤال الآتي: هل يكون من المناسب أن نعدهمــا مشتركين في الوجوه؟ واقترح المشاركون المجسمــات المعدلة التي تشترك جزئيّاً في الخطوط أو الوجوه بصفتها أمثلة مضادة.



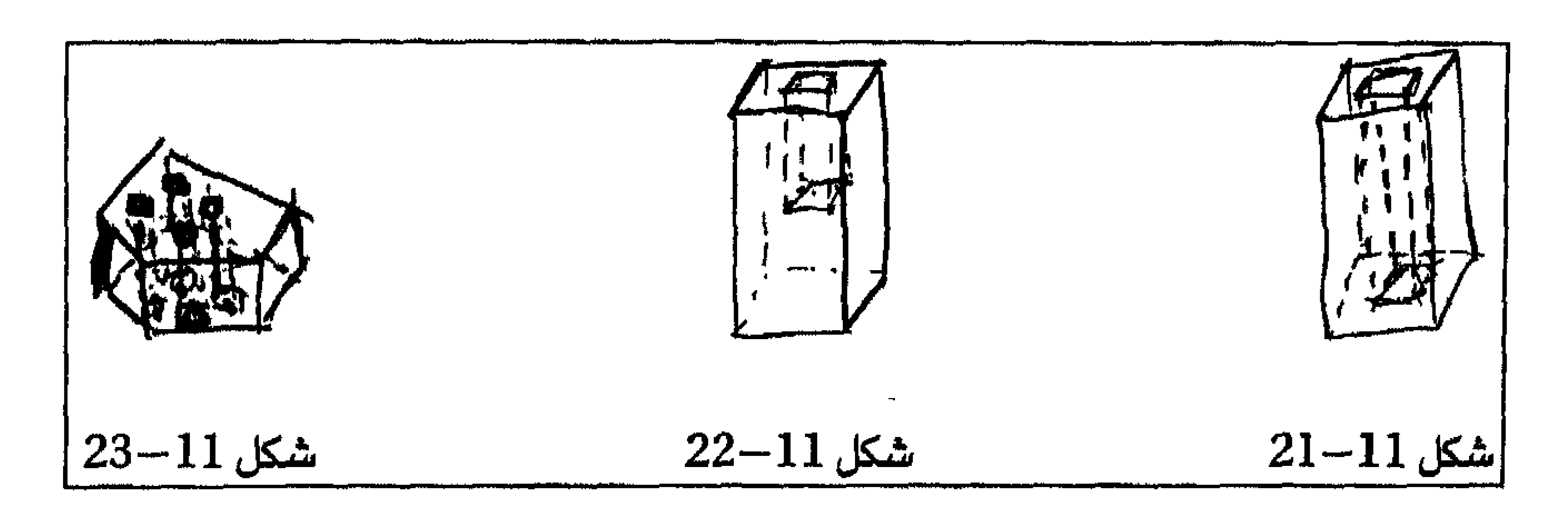
شكل 11–16 شكل 11–17 شكل 11–18 شكل 11–19

فكــر المشاركــون مليّــاً في كيفيــة عدّ الأحــرف عندما تكــون مشتركة جزئيّــاً كما في شــكل11:16، وعندما تكون مقسمة كما فــي شكل 11:17. وقاد المثــال المضاد المشار إليه فــي شــكل 11:19المشاركين إلى التفكير في السؤال الآتي: «هل مــن المناسب أن نعد الوجه النــاجــم عن ربط وجهين وجهاً واحــداً؟» أطلق لاكاتوس (Lakatos, 1976, P.74) على هذه الحالة اسم «وجه حلقي» (Ring-Shaped Face) (شكل 11:20).


شكل 11–20 وجه حلقي

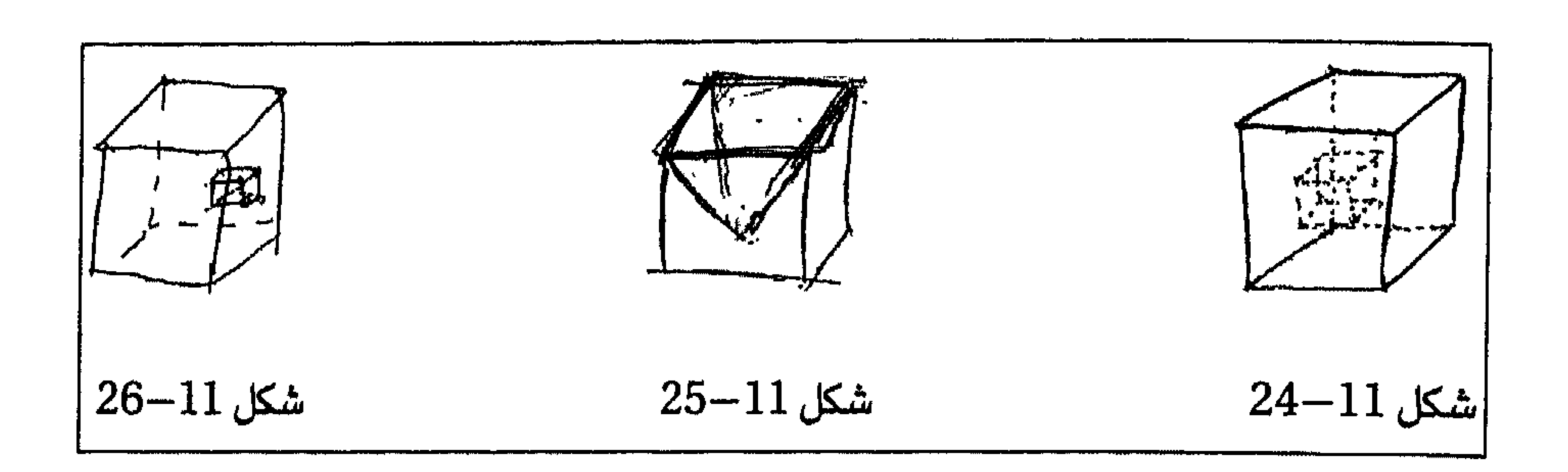
المجسمات متعددة الأسطح بثقوب (Polyhedra With Holes)

يمثـل النوع الثالث من المجسمات الذي اقترحه المشاركون (A, B, C, G, J, K) أمثلة مضـادة لمجسمات تحتوي على ثقوب، كما هو موضح فـي الشكل 21:11 إلى الشكل 32:11. وقد شجعت هذه الأمثلة المضادة المشاركين على إعادة التفكير في تعريف الوجه أيضاً.


شكل 11–21 شكل 11–22 شكل 11–23

المجسمات متعددة الأوجه التي تحتوي على مجسمات أخرى متعددة الأوجه

اقتـرح ثمانيـة مشاركـون، هـم: (A, B, C, D, F, G, J, K) مجسمـات تكـون متعددة الأوجـه، تحتوي على مجسمات أخرى متعددة الأوجه بصفتهـا أمثلة مضادة. ويمكن تقسيم مثـل هذه الأمثلة المضادة إلى ثلاثة أنواع فرعية علـى النحو الآتي: يتمثل النوع الأول بوجود مجسم داخل مجسم آخر، بحيث لا يشترك معه في أي وجه أو نقطة أو خط (شكل 24:11)، فـي حين يتمثل النوع الثاني بمجسمين يشتركان في وجه اشتـراكاً تامّاً (شكل 25:11)، أما النـوع الثالث، فيتمثل فـي وجود شكل داخل شكل آخر، ويشترك الشكلان في جزء من الوجه (شكل 26:11).



شكل 11–24 شكل 11–25 شكل 11–26

إجابات المشاركين على التباين الذي أحدثته الأمثلة المضادة

قُسّمت إجابات المشاركين على التباين بين الأمثلة المضادة والنظرية إلى أربع فئات، هي: طريقة منع التشوه، وطريقة منع الاستثناء، وطريقة تعديل التشوه، والتخمينات الجديدة.

طريقة منع التشوه

استخدم المشاركان D و E طريقة منع التشوه. واقترح المشارك E في الحلقة الثالثة أشكالاً مخروطية وأسطوانية وكروية بصفتها أمثلة مضادة، وتساءل عن كيفية تحديد عدد النقاط والخطوط والأوجه في هذه الأشكال. وبعد ذلك قال: «الشكل متعدد الأوجه هو عبارة عن شكل هندسي مجسم مكون من مضلعات متعددة»، والسطح المنحني لا يكوّن مضلعاً. وعلى هذا، فإن المجسمات ذات السطوح المنحنية ليست أشكالاً متعددة الأوجه بل هي كائنات غير سوية غريبة الشكل.

المقابلة الثالثة

المشارك E: المخاريط لها سطوح منحنية، لذا، أرى أنها لن تفيد.

الباحث: ما المشكلة في السطوح المنحنية؟

المشارك E: لأنك لا تستطيع إحصاء عدد الأحرف والأوجه في السطوح المنحنية. فهل تستطيع إحصاء عدد الأوجه؟ لكن عدد الرؤوس واحد، وأعتقد أنه لا يوجد أي حرف بحسب التعريف الذي أفكر فيه.

الباحث: هل تستطيع القـول أن المخروط شكل متعدد الأوجه؟ نظرية يولر تتحدث عن الأشكال متعددة الأوجه.

المشارك E: عندمـا نتحدث عن السطـوح المنحنية فـإن للمجسم الكروي سطوحـاً منحنيـة، ولهذا المجسـم وجه واحد، ولكـن ليس له حرف أو نقطة مميزة، وأرى أنه لا يوجد شيء من هذا القبيل.

الباحث: ما تعريف الشكل متعدد الأوجه، في رأيك؟

المشارك E: أعتقـد أنه مكون من أوجـه لها زوايا. (بـدأ بكتابة التعريف) «الشـكل متعـدد الأوجـه = شـكل هندسي مجسـم مكون من مضلعات متعددة».

طريقة منع الاستثناء

لاحـظ الباحثون المشاركين (A, D, F, G, I) وهم يجربون طريقة منع الاستثناء. وقد عـرّف المشتـرك F الشكل متعدد الأوجه أنـه «شكل هندسي مكون من أوجـه». وبذلك، فإن الأشـكال الهندسية المجسمة تعدُّ أشكالاً متعددة الأوجـه؛ لأن السطوح المنحنية عبارة عن وجوه. وبهدف استثناء المخاريط والأسطوانات والأشكال الكروية، عدّل المشارك F التخمين الأصلـي ليصبح على النحو الآتي: «في جميع الأشكال متعددة الأوجه، باستثناء تلك المكونة مـن أوجه منحنية، فإن $V-E+F=2$». واستخدم المشارك I في المقابلة الرابعة طريقة منع الاستثنـاء عن طريق تعديل النظرية لتصبح على النحو الآتـي: «في الأشكال متعددة الأوجه التي لا تحتوي على دائرة، فإن $V-E+F=2$».

المقابلة الرابعة

الباحث: (مشيراً إلى الشكلين الكروي والأسطواني)، هل يمكننـا أن نعدهما أشكالاً متعددة الأوجه أيضاً؟

المشارك I: لديهما وجه أو أكثر. يمكننا أن نعدهما شكلاً متعدد الأوجه.

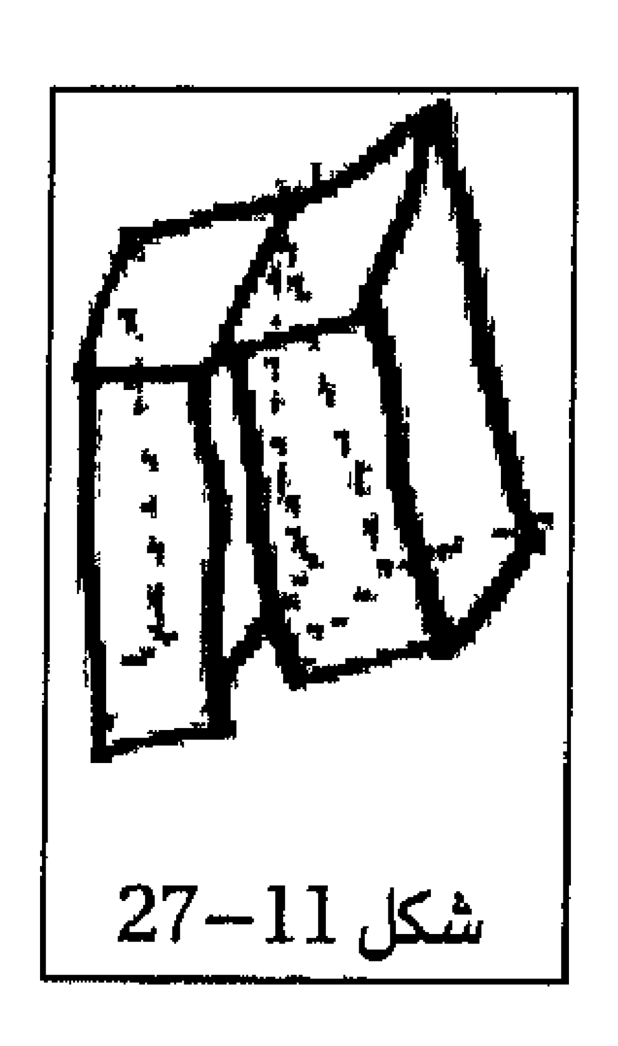
الباحث: إذن، ألا يجب علينا تعديل هذه المعادلة ($V-E+F=2$)؟

المشارك I: نعم...

الباحث: كيف يمكننا تغييرها؟

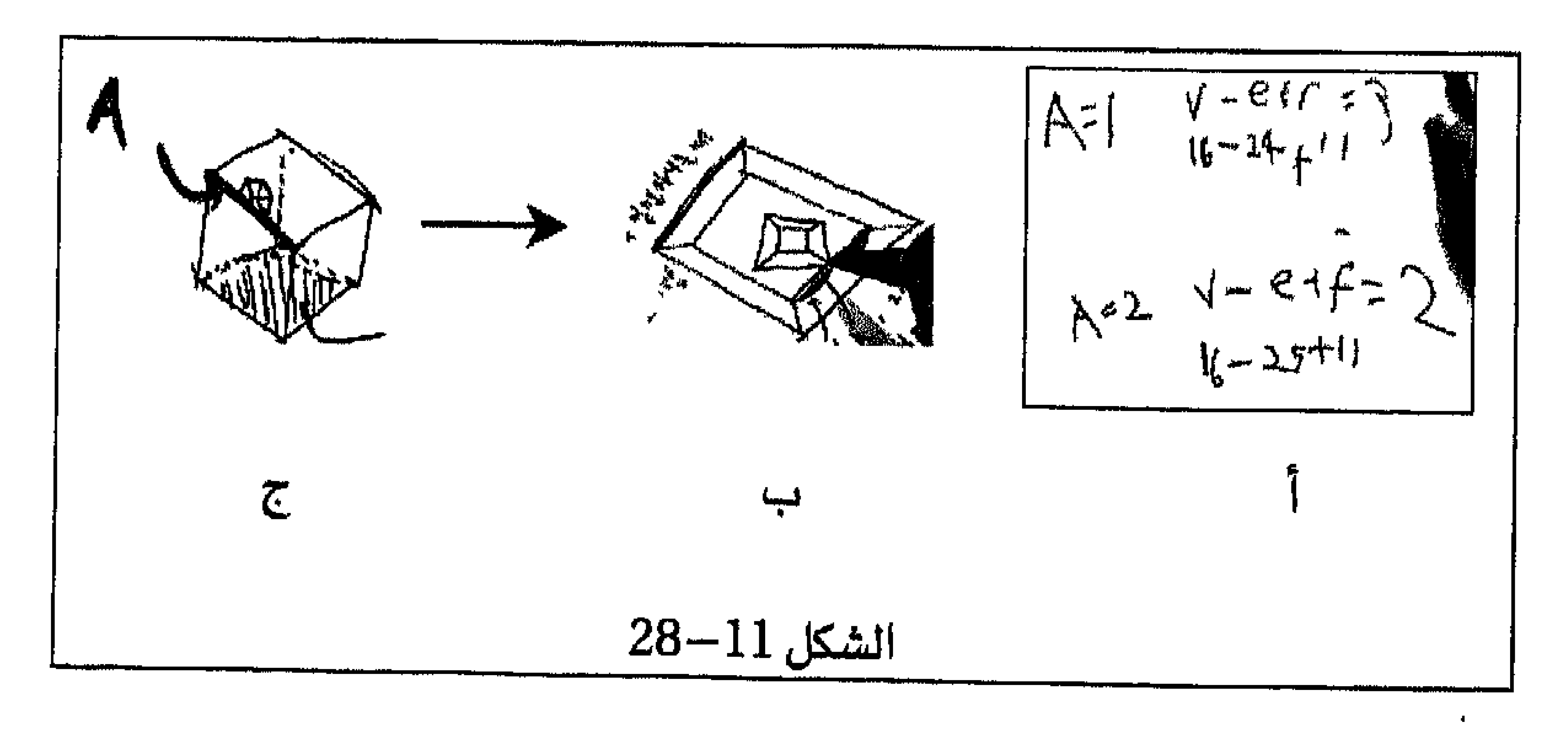
المشارك I: (فكر ملياً) إذا ضمّنا الدائرة... فإنني أعتقد أن أي شكل متعدد الأوجه دون أي دوائر ينتمي إلى هذه الفئة (V−E+F=2).
أليس كذلك؟

اقترح المشارك I مجسمين مستطيلين يشتركان في حرف واحد (شكل 27:11) بصفتهما مثالين مضادين. ثم نقّح بعد ذلك النظرية لتصبح على النحو الاتي: «في الأشكال متعددة الأوجه التي لا تحتوي على دائرة وغير مربوطة بغيرها من الأشكال متعددة الأوجه، فإن V−E+F=2». ووجد المشارك G أشكالاً هندسية مجسمة بثقوب على أنها أمثلة مضادة، وعدّل النظرية لتصبح على النحو الآتي: «في الأشكال متعددة الوجوه غير المخترقة بثقب اختراقاً تامّاً، فإن V−E+F=2».


شكل 11−27

طريقة تعديل التشوه

جرّب المشاركون B, D, E, F, G طريقة تعديل التشوه لتحويل المثال المضاد إلى مثال. واعتقد المشارك B بعد التوصل إلى المثال المضاد الذي يكون فيه جزء من الوجه مشتركاً بشكلين، أن تبرير نظرية يولر يعتمد على عدّ الحافة المقسمة بنقطة، حافة واحدة أو اثنتين.



الشكل 11−28

قارن المشارك B النتائج عند عدّ الحرف (الخط أ في شكل11:28أ) المقسوم بنقطة علــى أنه حرف واحــد (أ=1)، وعندما عده على أنه اثنــان (أ=2). وعندئذٍ، فإن المشارك B فــي المقابلة الخامسة أوضح سبب عدّه الحرف المقسوم بنقطة في هذا الشكل الهندسي المجسم على أنه اثنان.

المقابلة الخامسة

الباحث: هل يُعدُّ المجسم شكلاً متعدد الأوجه؟

المشارك B: نعم، إنه كذلك.

الباحث: إذن، ماذا بوسعنا أن نفعل؟

(المشارك يكتب B)

المشــارك B: إذا كان هناك رأس في منتصف الحرف (حتى لو لم يكن في المنتصف تمامــاً)، فعندئــذٍ سيصار إلى عدّ الجانبيــن الأيمن والأيسر للرأس علــى نحوٍ مستقل. ومن الضروري جدّاً عدّ هذا الجزء على نحوٍ منفصل (الجزء الأيسر من الخط أ)، وذلك الجزء أيضاً (الجزء الأيمن من الخط أ). وفي حالة الأشكال المستوية، نعدّ أي خط بين أي نقطتين بصورة منفصلة؛ ويجب عليك حتى تتمكن من جعل (قيمة V-E+F) في المجسمات تساوي 2، أن تعدّ الجانبين الأيمن والأيسر للنقطة كل جانب على حدة.

وأن أحــد المشاركيــن أيضاً لم يعدّ الشكلين متعددي الأوجــه اللذين يشتركان في وجه اشتــراكاً تامّــاً، حيث إن أحدهما بداخـل الآخر (شكل11:25)، على أنهمــا مثال مضاد بعد استخـدام طريقة تعديل التشــوه. ورأى المشارك D أن الشكل لم يكن مثــالاً مضاداً لأنه عُدّ مجسماً مغموراً دون غطاء، بدلاً من كونهما مجسمين يشتركان في وجه واحد.

أمــا الوجه الذي علــى شكل حلقة(شــكل11:20)، ففضّل بعض المشاركين استخدام طريقة منع التشوه بعدم عدّه وجهاً، ومن ثم، استخدم طريقة تعديل التشوه بعدم عدّ الأشكال المجسّمــة ذات الوجــه الحلقي على أنها أمثلــة مضــادة -E.G., V=16, E=24, F=10, V E+F=2) (شكل11:19). وقد استخدم المشارك I، طريقة منع التشوه للأشكال الأسطوانية

والكروية، وطريقة تعديل التشوه للمخروط آخذاً في الحسبان أن نظرية الأشكال المتعددة يمكن تعديلها بموجب الشرط $V=1, E=1, F=2$.

التخمينات الجديدة

لم تقتصر مناحي المشاركين على منع التشوه، وتعديله ومنع الاستثناء، وهي طرائق تتشابه إلى حد ما، حيث إنها جميعاً تستخدم لدعم الصيغة الرياضية $V-E+F=2$. لذا، اقترح المشاركون نوعين جديدين من التخمينات، يشتمل أولهما على البحث عن صيغة جديدة بخصوص قيمة $V-E+F$ التي يُعبّر من خلالها عن العلاقة بين النقاط، والخطوط، والأوجه في الأشكال الهندسية المجسمة، وفيها الأمثلة المضادة التي توصلوا إليها. ويمثل الجدول الآتي 1:11 ملخصاً للتخمينات الجديدة التي اقترحها المشاركون:

جدول 1:11 ملخص تخمينات المشاركين

V-E+F	الشروط	المشاركون
0	إذا لم يكن الوجه على شكل الحلقة في الأشكال متعددة الأوجه بثقوب	G
1	في الأشكال متعددة الأوجه التي تحتوي على دائرة	I
3	في الأشكال متعددة الأوجه التي تشترك اشتراكاً تامّاً إما بنقطة أو بخط مع أشكال أخرى متعددة الأوجه	G and F
	إذا رُبطت الأشكال المجسمة عند الرأس أو الحرف أو الوجه	H
4	في الأشكال متعددة الأوجه التي تحتوي على أشكال أخرى متعددة الأوجه مثل المكعب الأجوف (Hollow Cube)	F

تتعلق الأنواع الأخرى من التخمينات التي اقترحها المشارك A بضرورة أخذ العناصر الجديدة في الحسبان خلا النقاط والخطوط والأوجه. واقترح كما في المقابلة السادسة تطوير صيغة تشتمل على عناصر ثلاثية الأبعاد.

المقابلة السادسة

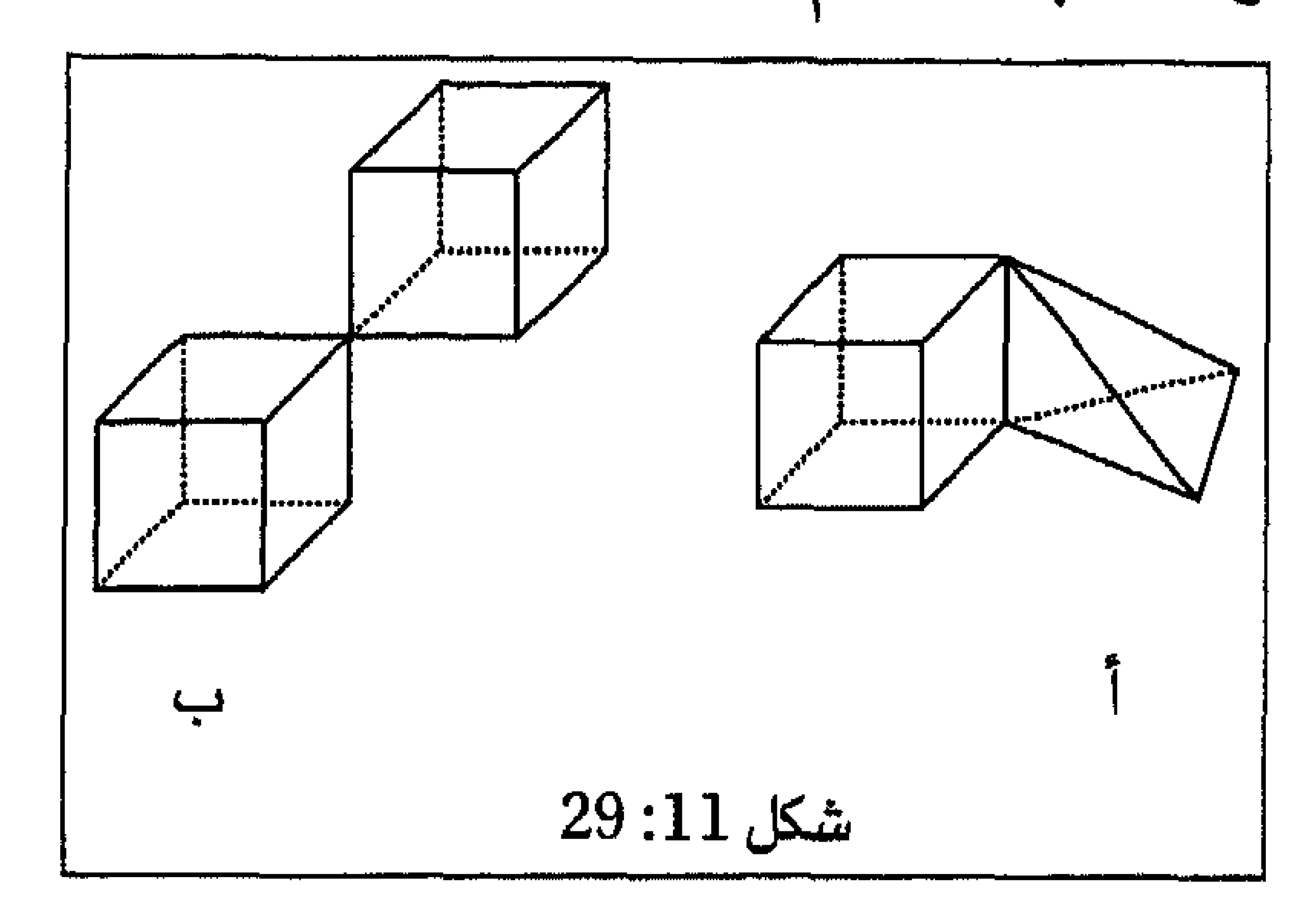
المشارك A: يمكن في حالة البعد الثنائي، وضع قانون بكل سهولة باستخدام V, E, F فقط، لكن في ثلاثية الأبعاد يُضاف عنصر جديد هو المساحة. وعلى هذا، إذا كانت صيغة نظرية يولر قد وضعت باستخدام عناصر ثنائية الأبعاد، فإنني أعتقد أن بإمكاننا وضع صيغة جديدة تنطبق حصريّاً على البعد الثالث وفيه المساحة، أليس كذلك؟

الباحث: العنصر الجديد ذو الأبعاد الثلاثة. هل نستطيع القيام بذلك فعلاً ذلك إذا فكرنا في ذلك؟

المشارك A: نعم، أعتقد ذلك.

الباحث: إذن، كيف يمكننا تحديد الأرقام في ثلاثيات الأبعاد ؟

المشارك A: باستخدام المساحة.



شكل 11: 29

وبعد ذلك، اقترحتُ المعادلتين V-E+F-S=1 و V-E+F+S=3 بصفتهما تخمينين جديدين، وتأكد أن المعادلة V-E+F-S=1 يمكن تبريرها بالأشكال المجسمة في شكل: 29:11أ على النحو الآتي: V=15, E=24, F=12, S=2, V-E+F-S=1. (شكل 11 :29ب) V=10, E=17, F=10, S=2, V-E+F-S =1. وقد قاد هذا التخمين المشارك A إلى التفكير في إمكانية توسعة نظرية الأشكال متعددة الأوجه لتشتمل على مجسمات رباعية الأبعاد.

مناقشة

كانت الأشكال متعددة السطوح التي درسها المشاركون قبل البحث مقصورة على فئة الأشكال العادية متعددة الأوجه، والمناشير، والأشكال الهرمية والموشورية والأشكال متعددة الأوجه شبه العادية مثل كرة القدم، التي تنطبق نظرية يولر عليها جميعها. وعلى الرغم من ذلك، فكّر المشاركون في وجود بعض الأشكال متعددة الأوجه التي لا تنطبق عليها النظرية. وبدا أن هذا الاعتقاد نجم عن طريقة التبرير التي استخدمها غالبية المشاركين. يمكن الحصول على قيمة V-E+F بإحصاء عدد النقاط والأحرف والأوجه في حالة الأشكال المنشورية والهرمية والموشورية (فمثلاً: في المنشور ذي الزوايا التي عددها n، فإن $V=n+2$, $V=2n,E=3n$، وبذلك، فإن $V-E+F=2$). وعلى الرغم من ذلك، فقد أخفق هذا التبرير في تقديم معلومات عن أنواع جديدة من المجسمات التي لم تجتز هذا الاختبار بعد. وتشير آراء المشاركين التي تقول بوجود أشكال متعددة الأوجه لم تصلح معها نظرية الأشكال متعددة السطوح، إلى اعتقادهم أن نطاق الأشكال متعددة الأوجه واسع. ويدعم وجهة النظر هذه الأنواع المتعددة من المجسمات التي عرضها المشاركون بصفتها أمثلة مضادة.

هناك أوجه تشابه قوية بين الأشكال المجسمة التي اقترحها المشاركون على أنها أمثلة مضادة، وتلك التي ناقشها لاكاتوس. وتمثّل النوع الأول من الأمثلة المضادة التي توصل إليها المشاركون في المجسمات ذات الأوجه المنحنية، التي ظهرت لدى لاكاتوس كالأسطوانات (ص.22). في حين تمثّل النوع الثاني بشكلين هندسيين، أو أكثر، متعددي الأوجه يشتركان في النقاط أو الخطوط أو الأوجه، التي اكتشفها علماء رياضيات أمثال هيزل (Hessel) (الأشكال التي تشترك في الخطوط أو النقاط) ولوليّر (Lhulier) (المكعب مع قمة أو تاج) في العامين 1813 و 1832 على التوالي (P.15,34). وكان لوليّر أول من اكتشف النوع الثالث من الأمثلة المضادة (ص.19)، إضافة إلى إطار الصورة والنفق اللذين أشار إليهما لاكاتوس، وجد المشاركون أيضاً شكلاً متعدد الأوجه لم يكن مثقوباً بصورة تامة. أما النوع الرابع، فيتمثل في الأشكال متعددة الأوجه داخل أشكال أخرى متعددة الأوجه، التي اكتشفها

هيـزل ولوليّر استنــاداً إلى الفكرة التــي تُوصِّل إليها خــلال مراقبة مجموعــة المعادن شبه البلورية (Crystalloid Of Mineralogy) الموجودة داخل معدن بلوري شفاف (ص. 13).

ونحــن نعتقد أنه يمكــن استخدام الأمثلــة المضادة في مساعدة الطــلاب على تطوير الاستــدلال الرياضــي (Lakatos, 1976; Boats, Et Al., 2003). وقد درس المشاركون في هــذه الدراسة مفاهيم مثــل؛ الشكل متعدد السطوح، والوجه وتوصلــوا إلى تعريفات جديدة. وشجعتهم الأمثلة المضادة التي اكتشفها المشاركون أيضاً على دراسة تعريف المصطلحات على نحوٍ دقيق. وقد دفع الوجه الحلقي خاصة بعض المشاركين إلى إعادة النظر في تعريف الشــكل متعدد الأوجه، حيث أكدوا عدم إمكانية تسميته بالشكل متعدد الأوجه؛ لأن الشكل لا يتماشــى ومجموع الزوايا الداخلية للشــكل متعدد الأوجه $180 \times n - 2$ n -Polygon. وهذا يبين أنه كان ينظر إلى صيغة مجموع الزوايا الداخلية للشكل متعدد الأوجه بصفتها خاصية للتعريــف تقــرر هل كان الشكل متعدد الأوجــه أم لا. وتشبه هذه الطريقــة في تعريف الشكل متعــدد الأوجه، التعريف الذي عرضه بالتــزر (Lakatos, 1976, P. 16) (Baltzer): «أي، نظام الشكل متعدد الأوجه حيث المعادلة $V-E+F=2$».

لقــد لوحــظ أن طلاب المرحلة الابتدائيــة استخدموا طريقة منــع التشوه وطريقة منع الاستثنــاء عند كل مــن «ريد» و«أثنز»، ولوحظ أيضاً استخــدام المشاركين في هذه الدراسة طريقــة منع التشوه، وطريقــة منع الاستثناء، وطريقة تعديل التشــوه، والتخمينات الجديدة. ولم يرفض المشاركون النظرية الأصلية، بل حاولوا تطوير تخمينات جديدة تتألف من أمثلة مضادة، وقد أقدم أربعة من المشاركين الخمسة الذين استخدموا طريقة منع الاستثناء على وضــع تخمينات جديدة. وكانت هنــاك حالات في المــاضي، عُدّت فيها بعض الأمثلة المضادة انحرافــات، وبذلك استُثنيت، لكنها قُبلت أخيراً، واعتُمدت بصفتها أمثلة (E.G. Lakatos, 1976, P.31). وقــد أظهر المشاركون هــذه القدرة على مراجعة موقفٍ ما وتغييره. واتخذوا في البداية كلاًّ من طريقة منع التشوه وطريقة منع الاستثناء دليلاً على الأمثلة المضادة التي عرضوها، لكنهم حاولوا تضمين الأمثلة المضادة داخل نطاق الأمثلة في أثناء تعديل التشوه

أو التخمينـــات الجديدة. وهـــذه المرونة في التفكير هي التي قال كروتتسكي وسريرامان إنها تُعدّ سمة من سمات الموهوبين في الرياضيات.

رأى لاكاتوس أن طريقة دمج المبرهنة التمهيدية تُعـد طريقة مفيدة لتنقيح التخمين استناداً إلى البرهان. ويُعدُّ تحليل البرهان شرطاً أساسيّاً لهذه الطريقة، ويُعدُّ أيضاً عنصراً مهمّاً من عناصر البرهان والتفنيد، كما أشار ننوكاوا (Nunokawa, 1996) . وعلى الرغم مـن ذلك، لم تلاحظ طريقة دمـج المبرهنة التمهيدية وتحليل البرهـان في هذه الدراسة. وعندمـا شُجّع المشارك B، الذي عرض إثباتاً بازدياد عناصر الشكل متعدد الأوجه، على التفكيـر في صدق إثباته للمثـال المضاد (الشكل 18:11)، عرض حلّاً لتعديل التشوه بقوله: «ليس البرهان هو الخطأ، بل إن هناك مشكلة في هذا المجسم».

الخاتمة

تركز هذه الدراسة على البنى التي عرضها طلاب الصف الخامس أو السادس الأساسي لحل المهام المتعلقة بنظرية يولر للمجسمات متعددة السطوح، ومقارنتها بالبنى التي عرضها علمـاء الرياضيـات، التي ناقشها لاكاتوس. ولدى تحليل سريرامـان (Sriraman, 2004) مفهـوم طلاب الصف التاسع الأساسي للبرهان، بيّـن أن العمليات التي استخدمها الطلاب الموهوبـون تظهر تماثلاً ملحوظاً مع تلـك التي يستخدمها علمـاء الرياضيات المختصون. وتظهـر هذه الدراسة أيضاً تشابهاً بين أبنية طلاب الصفين الخامس والسادس الأساسيين الموهوبيـن في الرياضيـات، وأبنية علماء الرياضيـات الذين درسهم لاكاتوس. إن الأمثلة المضـادة وطرق حل التضـارب بين النظرية والأمثلـة المضادة التي اقترحهـا المشاركون، باستثنـاء طريقة دمج المبرهنة التمهيدية وتحليـل البرهان، قد أظهرت تشابهاً ملحوظاً مع تلك المقدمة في تاريخ الرياضيات.

قائمة المراجع

Athins, S. (1997). Lakatos' Proofs And Refutations Comes Alive In An Elementary Classroom. School Science And Mathematics, 97(3), 150-154.

Bluton, C. (1983). Science Talent: The Elusive Gift. School Science And Mathematics, 83(8), 654-664.

Boats, J. J., Dwyer, N. K., Laing, S., & Fratella, M. P. (2003). Geometric Conjectures: The Importance Of Counterexamples. Mathematics Teaching In The Middle School, 9(4), 210-215.

Borasi, R. (1992). Learning Mathematics Through Inquiry. Portsmouth, Nh: Heinemann.

Branford, B. (1908). A Study Of Mathematical Education. Oxford: Clarendon Press.

Brousseau, G. (1997). Theory Of Didactical Situations In Mathematics (N. Balacheff, M.Cooper, R. Sutherland & V. Warfield , Ed. And Trans.). Dordrecht: Kluwer Academic.

Chazan, D. (1990). Quasi-Empirical Views Of Mathematics And Mathematics Teaching. Interchange, 20(1), 14-23.

Clairaut, A. C. (1741). ѕLéments De Géométrie. Paris: Gauthier-Villars.

Clairaut, A. C. (1746). ѕLéments De Algébre. Paris: Rue Saint Jacques.

Cox, R. (2004). Using Conjectures To Teach Sutdents The Role Of Proof. Mathematics Teacher, 97(1), 48-52.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology Of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic.

Gagne, F. (1991). Toward A Differentiated Model Of Gifted And Talent. In N. Colangelo & G.A. Davis (Eds.), Handbook Of Gifted Education (Pp. 65-80). Boston: Allyn And Bacon.

Klein, F. (1948). Elementary Mathematics From An Advanced Standpoint: Arithmatic, Algebra, Analysis. (E. R. Hedrick & C. A. Noble, Trans.). New York: Dover. (Original Work Published 1924).

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children. Chicago: The University Of Chicago Press.

Lakatos, I. (1976). Proofs And Refutations: The Logic Of Mathematical Discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1986). A Renaissance Of Empiricism In The Recent Philosophy Of Mathematics? In T. Tymoczko (Ed.), New Directions In The Philosophy Of Mathematics (Pp. 29–48). Boston: Birkhauser.

Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students' Geometrical Reasoning And Informal Proof. In L. C. Helen, & L. V. Jill (Eds.), Proceedings Of The 29Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education (Vol 3. Pp. 241–248), Melbourn, Australia: Pme.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing The General In The Particular. Educational Studies In Mathematics, 15, 277–289.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research And Case Study Applications In Education. John Wiley & Sons, Inc.

Miller, R. C. (1990). Discovering Mathematical Talent. (Eric Digest No. E482).

Nunokawa, K. (1996). Applying Lakatos' Theory To The Theory Of Mathematical Problem Solving. Educational Studies In Mathematics, 31, 269–293.

Reid, D. (2002). Conjectures And Refutations In Grade 5 Mathematics. Journal For Research In Mathematics Education, 33(1), 5–29.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations: The Problem–Solving Experiences Of Four Gifted Students. Journal Of Secondary Gifted Education, 14(3), 151–165.

Sriraman, B. (2004). Gifted Ninth Graders' Notions Of Proof: Investigating Parallels In Approaches Of Mathematically Gifted Students And Professional Mathematicians. Journal For The Education Of The Gifted, 27(4), 267–292.

Sriraman, B. (2006). An Ode To Imre Lakatos: Quasi–Thought Experiments To Bridge The Ideal And Actual Mathematics Classrooms. Interchange, 37(1–2), 151–178.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics Of Qualitative Research (2Nd Ed.). Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.

Toeplitz, O. (1963). The Calculus—A Genetic Approach (L. Lange, Trans.). Chicago: The University Of Chicago Press. (Original Work Published 1949).

Yin, R. K. (2003). Case Study Research: Design And Methods (3Rd Ed.). Thousand Oaks, Ca: Sage Publications.



الطلاب الموهوبون في الرياضيات من عصر الفضاء إلى عصر المعلومات

ليندا جنسن شيفيلد

عصر الفضاء

في الرابع من شهر أكتوبر عام 1957، ومع إطلاق الاتحاد السوفييتي للقمر الصناعي سبوتنيك Sputnik، دخل العالم عصر الفضاء، وباتت الولايات المتحدة قلقة جداً بسبب سبق الاتحاد السوفييتي لها بغزو الفضاء. وبعد مرور عام، أقرت الحكومات الفدرالية في الولايات المتحدة قانون الدفاع الوطني للتعليم (National Defense Education Act, Ndea) بعد أن أدركت أهمية تقديم الدعم للطلاب النابغين في الرياضيات والعلوم، حيث بدأت بتقديم المساعدات لقطاع التعليم في الولايات المتحدة على المستويات جميعها، بهدف تحفيز التقدم في التعليم في مجال العلوم والرياضيات واللغات الأجنبية الحديثة. وفي هذه الأثناء أيضاً، أُدخل إلى مناهج التدريس ما عُرف بـ «الرياضيات الحديثة» New Math التي تركز على المفاهيم المجردة والأفكار الموحدة على نحو كبير. ومن المشروعات الفريدة التي عرفت حينئذٍ برنامج الرياضيات المدرسي الشامل Comprehensive School Mathematics Program (Smp) الذي طوّرته مؤسسة بحوث وسط القارة للتعليم والتعلم (Mid-Continent Research for Education And Learning, Mcrel)، وما زال موجوداً عبر شبكة الاتصالات على الموقع Http: / /Ceure.Buffalostate.Edu/Csmp/. وعلى الرغم

مـن عـدم تطبيقه بصورة تامة علـى نحو ما خُطّط له، فـإن بعض مشروعـات «الرياضيات الحديثـة»، إلى جانب قانـون الدفاع الوطني للتعليم، قد أسهمت في هيمنة الولايات المتحدة علـى العلـوم والتقانة في الجـزء الأخير من القرن العشرين، حيث حثّـت آلاف الطلاب على عمل استقصاءات رياضية، والحصول على درجات علمية في الرياضيات والعلوم والتقانة.

وفـي شهـر يوليو عام 1969 انطلقت مركبة الفضاء أبولـو 11 (Apollo 11) من مركز كنـدي الفضائي تجاه القمر، وفي العشرين مـن يوليو من العام نفسه هبط رائد الفضاء نيل أرمسترنج (Neil Armstrong) على القمر ليكون بذلك أول إنسان تطأ قدماه سطح القمر، وقال حينئذٍ كلماته التي خلدها التاريخ: «خطوة صغيرة للإنسان تمثل قفزة عظيمة في تاريخ البشريـة». وحـدث الهبوط البشري السادس والأخير على سطح القمر فـي شهر يناير عام 1972، وبذلك، سجلت الولايات المتحدة نصراً عظيماً في سباق الفضاء. واستمرت الولايات المتحـدة بتقديم الدعم للطلاب الموهوبين مـن الراغبين في تعلم الرياضيات والعلوم مدة خمسـة عشـر عامـاً لا سيما ما يتعلـق منها بتقانة الفضـاء، ولكن ما الذي حـدث منذ ذلك التاريخ؟

نمو التقنية

شهـدت سبعينيـات القـرن الماضـي حركة قوية عرفـت بـ «العـودة إلـى الأساسيات» (Back To Basics) مـع تركيـز علـى مهـارات الحسـاب بصفتها ردة فعـل جزئية على ما أطلـق عليه اسـم «الرياضيات الحديثة». وفي عـام 1980، نشر المجلـس الوطني الأمريكي لمعلمـي الرياضيـات (National Council of Teachers of Mathematics, Nctm) برنامج العمل (An Agenda for Action) مشيراً إلى أن أهم معرفة أساسية هي مهارة حل المشـكلات. وتشير العبارة الآتية المقتبسة مـن التقرير نفسه إلى الإدراك المتنامي لأهمية تطوير الطلاب النابغين في الرياضيات:

> «إن أكثر الطلاب الذين يعانون الإهمال والتجاهل، فيما يتعلق بتحقيق إمكاناتهم كلها، هم الطلاب النابغون في الرياضيات. ولا جدال في أن المقدرة الرياضية المتميزة تعدُّ مصدراً اجتماعيّاً ثميناً نحن في حاجة ماسة إليها لإدامة القيادة في عالم التقنية». (Nctm, 1890, P.18).

وفي عام 1983، نشرت اللجنة الوطنية للتميز في التعليم (The National Commission On Excellence In Education) تقريراً بعنوان «أمة في خطر» (A Nation At Risk)، نبّهت فيه إلى وجوب تحسين مهارات قوى العمل الأميركية وتطويرها على نحوٍ كبير، إذا ما أرادت الولايات المتحدة المنافسة على الصعيد العالمي. وفي عام، 1989 عقد الرئيس الأميركي جورج بوش (الأب) قمة تربوية لحكام الولايات تبنت ستة أهداف تربوية وطنية، تمثّل الهدف الخامس منها في أن «يكون طلاب الولايات المتحدة الأوائل في العالم في تحصيل الرياضيات والعلوم بحلول عام 2000». وعلى الرغم من الاعتراف العام بأهمية الطلاب الذين يمتلكون مهارات عالية جدّاً في الرياضيات والعلوم، فإنه لم يُعمل شيء كثير إزاء هذا الأمر منذ ذلك الحين بهدف تقديم الدعم لأبرز طلابنا النابغين.

عصر المعلومات

قال وزير التربية الأمريكي ريتشارد ريلي (Richard Riley)، عام 1993 في مقدمة لتقرير التميز الوطني، قضية لتطوير الموهبة في أميركا (A Case for Developing America's Talent): «يستطيع طلابنا جميعاً، وفيهم أصحاب القدرات العالية، أن يتعلموا أكثر بكثير مما نتوقع الآن. لكن ذلك يتطلب التزاماً وطنيّاً على مستوى الأمة لتحقيق ذلك» (Ross, 1993, P.Iii). وأشار التقرير إلى «أزمة كبيرة في تعليم الطلاب الموهوبين» بالعبارة الآتية: «تبدّد الولايات المتحدة واحدة من أكبر مواردها النفيسة— المواهب والإبداعات والاهتمامات العالية جدّاً لكثير من طلابها» (Ross, 1993, P.1).

وبعد مرور عام على نشر هذا التقرير، كلّف المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات لجنة عمل خاصة تتولى شؤون الطلاب الموهوبين في الرياضيات بتحليل هذه المسألة، لا سيما في مجال الرياضيات. واتفقت لجنة العمل على وجوب وجود التزام وطني على مستوى البلاد لقلب هذه الأزمة لمصلحة الطلاب الواعدين رياضيّاً، الذين عرّفتهم بمن: «يملكون القدرة على القيادة وحل المشكلات في المستقبل». ودعت اللجنة إلى تبنّي إستراتيجيات من شأنها زيادة أعداد الطلاب الموهوبين في الرياضيات، ورفع مستوياتهم من خلال رفع قدراتهم،

وإثــارة دافعيتهم، وتقوية معتقداتهم، وإثــراء خبراتهم، وإتاحة الفرص أمامهم، إلى أقصى قــدر ممكن. وأشــار التقرير إلــى أن العوامل الأربعــة المشار إليها تكــوّن متغيرات لا بد من زيادتها عن طريق تقديم الدعم المناسب والتشجيع. وبعد ملاحظة البحث المتعلق بوظائف الدمــاغ الــذي يشير إلى أن التغيرات الكبيرة في الدماغ مردهــا الخبرات، طلب التقرير إلى الإداريــن والمعلمين وأولياء الأمور والطلاب أنفسهم تحقــق إتاحة الفرصة للطلاب جميعاً ليمروا بخبرة متعة حل المسائل الرياضية الصعبة بانتظام، وتوافر مساقات عالية المستوى فــي الرياضيات للطلاب جميعاً بغض النظر عن المدرسة التي يدرسون فيها. ومع الاعتراف أن الثقافــة في الولايــات المتحدة غالباً ما تعمــل باتجاه معاكس لرغبــة الطلاب في التميز فــي العلــوم والرياضيات والتقانة، أشــار التقرير أيضاً إلى أهميــة إدراك الطلاب أن التميز فــي الرياضيات ليس ممكناً فحسب، بل يؤدي إلى الحصــول على وظائف مجزية ومثيرة في مجالات كثيرة (Sheffield Et Al., 1995). ويمكن القول أن رواج المسلسل التلفازي الأخير المسمى *NUMB3RS* يصبّ باتجاه دعم هذا الهدف، لكن هناك حاجة ماسة إلى المزيد.

القرن الحادي والعشرون

بحلــول عــام 2000، بدا واضحاً أن الولايات المتحدة ما زالت بعيدة عن تحقيق الهدف فــي أن تكون الأولــى عالميّاً في الرياضيــات والعلوم، حيث أظهرت الاتجاهــات في الدراسة الدولية للعلوم والرياضيــات (Trends in International Mathematics and Science Study. Timss) عــام 1995، وتكرارها في العامين 1999 و 2003، أن الولايات المتحدة لم تفشــل في تحقيــق المراكز الأولى فحسب، بل إن الطلاب الأوائل لــم يكونوا بالمستوى نفسه لنظرائهــم الأوائل في البلدان الأخرى. ففي عــام 1995، حقق 9% من طلاب الصف الرابع الأساسي فــي الولايات المتحدة علامات فوق المئين 90 في الجزء الخاص بالرياضيات من اختبــار (Timss)، مقابل 39% من طلاب الصف الرابع الأساسي في سنغافورة، فيما حقق 5% مــن طــلاب الصف الثامــن الأساسي في الولايــات المتحدة، و45% مــن طلاب الصف الثامــن الأساسي في سنغافــورة فوق المئين 90 في الجزء الخاصــ بالرياضيات من اختبار (Timss) للعــام نفسه. وبحلول عام 2003، حصل 40% من طلاب الصف الثامن الأساسي

في سنغافورة، و 38% من طلاب الصف الثامن الأساسي في تايوان، و7% فقط من طلاب الصف الثامن الأساسي في الولايات المتحدة على درجات متقدمة جدّاً. ومع أن ذلك يُعدُّ تقدماً لدى طلاب الولايات المتحدة، فإنهم ظلوا متأخرين جدّاً عن الدول المتقدمة الأخرى.

وكانت النتائج أيضاً مماثلة في برنامج القياس الدولي للطلاب (Program for International Student Assessment, Pisa)، حيث كان أداء الولايات المتحدة عام 2003 في معرفة الرياضيات وحل المشكلات أقل من متوسط أداء غالبية بلدان منظمة التنمية والتعاون الاقتصادي (Organization for Economic Co-operation and Development). إضافة إلى أن أداء الطلاب ممن حققوا أعلى العلامات في الولايات المتحدة (الذين صُنِّفوا ضمن أعلى عشرة في المئة في الولايات المتحدة)، كان أقل من أداء نظرائهم في منظمة التنمية والتعاون الاقتصادي (National Center for Education Statistics, 2003).

كان الغرض الأساس لقانون عدم إهمال أي طفل (No Child Left Behind) الصادر عام 2001 أن يصل الطلاب جميعهم إلى مستوى الكفاية في المعايير الرسمية، بحيث تتقلص فجوة التحصيل بين الطلاب من ذوي التحصيل العالي والمتدني. ولكن ما الذي يحدث للطلاب الذين يعني لهم السير قدماً تجاه الكفاية تقهقراً إلى الوراء عندما يكون الهدف سد فجوة التحصيل بين الطلاب من ذوي الأداء العالي والمتدني؟

في دراسة حول معرفة تأثير المعلمين والمدرسة في تعلم الطلاب، أوضح وليام ساندرز (William Sanders) وزملاؤه في نظام تينيسي لتقويم القيمة المضافة (Tennessee Value-Added Assessment System) أن: «مستوى تحصيل الطلاب كان دليل التنبؤ الثاني المهم على تعلمهم، فكلما زاد مستوى التحصيل، قل احتمال نمو الطالب» (Delacy, 2004, P.40).

ودون شك، فإن من بين طرق سد فجوة التحصيل بين الطلاب ذوي الأداء العالي والمتدني ما يتمثل في إبطاء تعلم الطلاب ذوي الأداء العالي، ولكن هل بمقدورنا تحمل مثل هذا الهدف؟

وقـد جاء في تقرير لمنتـدى الأعمال/ التعليـم العالي الذي يضم كبـار رجال الأعمال والتعليم:

«تفقـد الولايـات المتحدة تفوقهـا في الابتكار، وتراقب تـآكل قدرتها على إحـراز إنجازات خارقة فـي العلـوم والتقانـة... إذا مـا أرادت أميركا الحفـاظ على القدرة علـى التنافس عالميّاً، وعلى أمنهـا القومي وجـودة الحياة التي يعيشهـا مواطنوها، يجـب عليها التحرك بسرعـة نحو تحقيق تطـورات مهمة وكبيرة في مشاركة الطلاب كلهـم في الرياضيات والعلوم». (Business-Higher Education Forum, 2005, P.1, 3).

وفـي عـام 2005، عرض المؤتمر السنـوي للجمعية الوطنية للأطفـال النابغين (The National Association of Giftef Children-Nagc) مسـاراً خاصّـاً بالرياضيـات والعلـوم عبـر خطابٍ رئيسٍ ألقـاه جيم روبيلـو (Jim Rubillo) المديـر التنفيذي للمجلس الوطنـي لمعلمـي الرياضيـات، وكلّف جيـري ويلـر (Gerry Wheeler) المديـر التنفيذي للرابطـة الوطنية لمعلمي العلوم، ولجنة عمل الرياضيات/ العلوم المعينة من جمعية الأطفال الموهوبيـن بإتمـام هذا العمل. وفي ضوء ما تقدّم، نرى أنـه إذا ما أرادت الولايات المتحدة أن تحافـظ علـى قيادتها في هذا العالـم التقني، فمن الأهمية بمـكان أن نتعاون ونسارع في اتخاذ تدابيـر جذرية لتعرّف الموهبة الرياضية ودعمها وإيجادها وتطويرها لدى عدد كبير جـدّاً من الطـلاب ومعلميهم- الذكور والإنـاث، البيض أو السود، من مرحلـة الروضة حتى الجامعـة، الأغنيـاء والفقـراء، في الريف وفي المدينـة. ومع كل احتفال لنـا بذكرى إطلاق القمـر الصناعي سبوتنيـك (Sputnik) وقانون الدفاع الوطني للتعليـم، دعونا نتكاتف معاً لإلهـام جيل جديد من الطلاب علـى تحقيق الوعد والتميز في هـذه المجالات ذات الأهمية الكبيرة لرفاه بلدنا وللعالم كافة على حدٍّ سواء.

قائمة المراجع

Achieve, Inc. And The National Governor's Association. (2005). An Action Agenda For Improving America's High Schools: 2005 National Education Summit On High Schools. Retrieved July 31, 2005, From Http://Www.Nga.Org/Files/Pdf/0502Actionagenda.Pdf.

Adelman, C. (1999). Answers In The Tool Box: Academic Intensity, Attendance Patterns, And Bachelor's Degree Attainment. Retrieved February 15, 2005, From Http://Www.Ed.Gov/Pubs/Toolbox/Index.Html.

Anderson, S. (Summer 2004). The Multiplier Effect. International Education. National Foundation For American Policy. Retrieved February 15, 2005, From Http://Www.Nfap.Net/.

Association Of American Universities. (2005). A National Defense Education Act For The 21St Century: Renewing Our Commitment To The U. S. Students, Science, Scholarship, And Security. Retrieved December 13, 2005 From Http://Www.Aau.Edu/Education/Ndeaop.Pdf#Search='National%20Defense%20Education%20Act'

Business–Higher Education Forum. (January 2005). A Commitment To America's Future: Responding To The Crisis In Mathematics And Science Education. Retrieved July 31, 2005 From Http://Www.Bhef.Com/Mathedureport–Press.Pdf.

Colvin, G. (July 25, 2005). America Isn't Ready: Here's What To Do About It. Fortune, 152(2), 70–82.

Delacy, M. (June 23, 2004). The 'No Child' Law's Biggest Victims? An Answer That May Surprise, Education Week, 23(41), 40.

Florida, R. (2005). The Flight Of The Creative Class: The New Global Competition For Talent. New York: Harper Business.

Friedman, T. L. (2005) The World Is Flat: A Brief History Of The Twenty–First Century. New York: Ferrar, Straus, And Giroux.

Giambrone, T. M. Comprehensive School Mathematics Preservation Project. Retrieved December 14, 2005 From Http://Ceure.Buffalostate.Edu/~Csmp/.

Lewis, J. A. (October 2005). Waiting For Sputnik: Basic Research And Strategic Competition. Retrieved December 14, 2005, From Http://Www.Csis.Org/Media/Csis/ Pubs/051028_Waiting_for_sputnik.Pdf

National Center For Education Statistics. (December 2000). Pursuing Excellence: Comparisons Of International Eighth–Grade Mathematics And Science

Achievement From A U.S. Perspective, 1995 And 1999. Retrieved July 31, 2005 From Http://Nces. Ed.Gov/Pubsearch/Pubsinfo.Asp?Pubid=2001028.

National Center For Education Statistics. (2003). Program For International Student Assessment (Pisa) 2003 Summary. Retrieved December 10, 2005 From Http://Nces.Ed.Gov/Surveys/Pisa/Pisa2003highlights.Asp.

National Commission On Educational Excellence. (April 1983). A Nation At Risk: The Imperative For Education Reform. Retrieved May 25, 2005, From Http://Www.Ed.Gov/Pubs/Natatrisk/Index.Html.

National Council Of Teachers Of Mathematics (Nctm). (1980). An Agenda For Action:recommendations For School Mathematics Of The 1980S, Reston, Va: Nctm.

National Education Goals Panel. (1990). Building A Nation Of Learners. Retrieved June 10, 2005, From Http://Govinfo.Library.Unt.Edu/Negp/.

National Science Board. (2004). An Emerging And Critical Problem Of The Science And Engineering Labor Force. Retrieved March 13, 2005, From Http://Www.Nsf.Gov/Sbe/Srs/Nsb0407/Start.Htm.

Public Law 107–110 (January 8, 2002) The Elementary And Secondary Education Act (The No Child Left Behind Act Of 2001). Retrieved May 30, 2005, From Http://Www.Ed.Gov/Policy/Elsec/Leg/Esea02/Index.Html.

Ross, Pat O'connell (Project Director). (1993). National Excellence: A Case For Developing America's Talent. Washington, Dc: U.S. Department Of Education, Office Of Educational Research And Development.

Sheffield, L. J. (Fall, 2005) Mathematics: The Pump We Need To Combat The Brain Drain. Gifted Education Communicator, 36(3).

Sheffield, L. (Chair), Bennett, J., Berriozجbal, M., Dearmond, M., And Wertheimer, R. (December 1995) Report Of The Task Force On The Mathematically Promising. Reston, Va: Nctm News Bulletin, Volume 32.

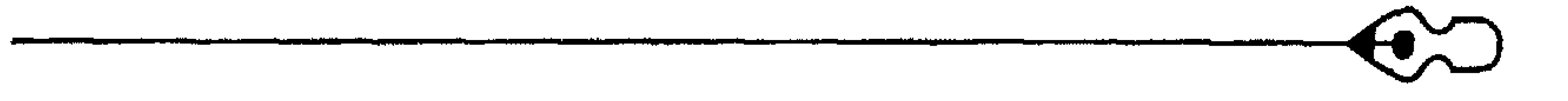
Task Force On The Future Of American Innovation. (February 16, 2005). The Knowledge Economy: Is America Losing Its Competitive Edge? Benchmarks Of Our Innovation Future.

Retrieved July 31, 2005, From Http://Www.Futureofinnovation.Org/Pdf/ Benchmarks.Pdf.

Trends In International Mathematics And Science Study (Timss). (2004). Timms 2003 Results. Retrieved March 23, 2005 From Http://Nces.Ed.Gov/Timss/Results03.Asp.

Trends In International Mathematics And Science Study (Timss). (2000). Timms 1999 Results. Retrieved March 23, 2005 From Http://Nces.Ed.Gov/Timss/Results.Asp.

United States Commission On National Security/21St Century. (February 15, 2001). Roadmap For National Security: Imperative For Change. Retrieved July 31, 2005, From Http://Www.Au.Af.Mil/Au/Awc/Awcgate/Nssg/Phaseiiifr.Pdf



مراجعة احتياجات الطلاب الموهوبين في الرياضيات

هل يكافح هؤلاء الطلاب من أجل البقاء أم أنهم يتطورون؟

آلان زولمان

ملخص

هل يكافح الطلاب الموهوبين من أجل البقاء (Surviving) أم أنهم يتطورون (Thriving)؟ تكون الإجابة في أغلب الأحيان، عن هذا السؤال في دروس الرياضيات غير قاطعة، فالأمر يعتمد على عوامل عدة، إذ إن للمدارس الحكومية أولويات أخرى غير احتياجات الطالب الموهوب الفردية. وتطلب الولايات المتحدة، بل العالم الحديث في الواقع، إلى الطلاب جميعاً، خاصة النابغين جدّاً، تحقيق الذات. وهذا البحث: (أ) يستعرض الأنواع المختلفة للطلاب الموهوبين، (ب) يعيد تحديد المناحي المختلفة لتلبية احتياجاتهم، (ج) يستعرض العوائق الحالية لتلبية احتياجات الطلاب الموهوبين بدراجة عالية او استثنائية، (د) يدرس بعناية الفرص المتاحة المهوبين، و(هـ) يتأمل في مستقبل الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

مقدمة

جيمس (James) طالب في الصف السادس يبلغ من العمر عشر سنوات. هرب في السابق من حصص الرياضيات عندما كان في الصفين الثاني والخامس. وأُلحق بدروس تسريع في الجبر في مستوى الصف التاسع، وهذا هو مساق الرياضيات الثالث الجديد له خلال هذا الفصل، وذلك بسبب موهبته المتقدمة في الرياضيات. ويُعدُّ هذا الحل المؤقت مقبولاً لهذا الطالب الذي كان يشعر بالملل والإحباط من مساقات الرياضيات الأخرى، لكنه سيكمل دروس الرياضيات جميعها للمرحلة الثانوية في صفه التاسع. ولكن، ماذا سيفعل في المرحلة الثانوية؟ لا شك في أنه سيصاب بالملل والإحباط مرة أخرى من مادة درسها سابقاً، وأصبح على دراية بتفاصيلها كلها. وهل ستتولى المدرسة، بصورة غير مباشرة ودون أن تدري، تعليم جيمس ليصبح «متفوقاً متدني التحصيل» (House, 1987) وعدوانيّاً تجاهها، مع عادات دراسية ضعيفة، إضافة إلى مستوى متدنٍ من الانضباط الذاتي؟

بدلاً من الالتحاق ببرنامج متخصص للموهوبين يأخذ احتياجاته العاطفية والاجتماعية والفكرية في الحسبان، حيث جرى تسريعه أكاديميّاً إلى صفوف ذات مستوى أعلى. وتعدُّ هذه الخطة «الأسهل والأجدى اقتصاديّاً» من منظور المدرسة، إذ لا يتطلب الأمر معلمين أو حصصاً متخصصة. والسؤال الذي يتبادر إلى الذهن الآن: هل ساعدت المدرسة جيمس أم أنه قد أوذي بهذا المنحى؟ وهل سُمح له أن يتطور رياضيّاً؟ أين الخطة التربوية الفردية المصممة خصّيصاً لاحتياجاته العاطفية، ومتطلباته الاجتماعية، ورغباته الشخصية، وقدراته الفردية؟

ولكن، لماذا تريد المدرسة الإبقاء على جيمس في الصف السادس ؟ يقول المعلم إن المدرسة تريد أن تجمع علامته في الرياضيات في اختبار القياس الرسمي مع علامات طلاب الصف السادس الآخرين. وهذا يشير إلى تركيز اهتمام المدرسة على قياس الولاية عالي المستوى. وهل يمثل نهج البقاء (Survival Tactic) الذي تتبناه هذه المدرسة الأسلوب الأفضل لتلبية احتياجات جيمس؟

في عام 1991, أصدرت وزارة التربية والتعليم في الولايات المتحدة » أمريكا 2000: إستراتيجية التربية والتعليم » (America 2000: An Education Strategy). وتمثّل هدفها التربوي الوطني الرابع بما يأتي: «بحلول عام 2000، سوف يكون طلاب الولايات المتحدة الأوائل في تحصيل العلوم والرياضيات في العالم» (ص.9). لكن الولايات المتحدة لم تتمكن من تحقيق هذا الهدف. وبحسب نتائج مسابقة الدراسة الدولية الثالثة للرياضيات والعلوم (Timss, 1999)، وتقرير التوجهات في مسابقة الدراسة الدولية الثالثة للرياضيات والعلوم (Timss, 2003)، لم تتمكن الولايات المتحدة من تحسين «ترتيبها» منذ عام 1991.

في عام 2002، طبّقت وزارة التعليم في الولايات المتحدة قانون عدم إهمال أي طفل: الصادر قبل عام. حيث يتطلب هذا القانون الاتحادي أن تجمع الولايات المختلفة البيانات المتعلقة بعلامات اختبار الطلاب ونسب تخرجهم وحضورهم، ومستويات كفايات المعلمين، وتحللها. ويطلب أيضاً إلى الولايات إرسال المعلومات إلى مناطق المدارس التعليمية، التي ترسلها بدروها إلى أولياء الأمور. وتتحمل المدارس مسؤولية إحراز تقدم سنوي مناسب، وتفرض عقوبات قاسية على المدارس التي «لا تلبي أو لا تتجاوز» الحد الأدنى من مستويات القياس السنوي للرياضيات على مستوى الولاية. ومن المفارقات العجيبة إذا ما أخذنا في الحسبان ما سبق ذكره آنفاً بخصوص هدف أميركا 2000، أن الجانب الأول الرئيس لهذا القانون يتمثل في أن يكون «كل طفل كفئاً (Proficient) في الرياضيات والقراءة بحلول العام 2014». ولكن ماذا تعني كلمة «كفء» لطفل موهوب في الرياضيات، مثل جيمس؟

قانون عدم إهمال أي طفل: هل أهمل الأطفال الموهوبين؟

لا توجد مكافآت لتحسين واقع الطلاب الموهوبين في قانون «عدم إهمال أي طفل»، إذ تستند فلسفة هذا القانون كمّياً نحو احتياجات الطلاب الأقل تحصيلاً. ويتعين على الطلاب جميعاً (أو على الغالبية العظمى منهم على الأقل) أن «يحققوا» مستوى معيناً من الكفاية في الرياضيات. وتتعرض المدارس للمساءلة عند عدم تلبية هذا الهدف سنويّاً، ولكن لا توجد مكافآت لتحسين واقع الطلاب «الذين يتجاوزون المستوى».

وتفادياً من العقوبات، تلجأ المدارس إلى تركيز مصادرها للارتقاء بالأطفال ذوي التحصيل المتدني ليصبحوا في مستوى «الكفاية»، وهذا ما يجعل جوانب أخرى من التعليم تفقد مصادرها، التي تشتمل على توفير الفرص للموهوبين. لكن تلبية الاحتياجات الأساسية للأغلبية لا يلبي احتياجات الطلاب الموهوبين المنفردين. وهنا يبرز تساؤل آخر في هذا السياق: ماذا عن جوانب جودة التعليم؟ يصف وزير التربية والتعليم في سنغافورة نظام التعليم في الولايات المتحدة بالنظام الفاشل حيث: «لا يفلح الطلاب النابغون في الولايات المتحدة بسبب طرائق التدريس التي تركز على جعلهم جميعاً متساوين، وبذلك لا يُدفع الطلاب ذوو الذكاء المتوقد إلى الأمام (Newsweek, Jan. 9, 2006). ولكن، ماذا عن جوانب الجودة في التعليم؟

في المثال السابق، لم يحقق برنامج المدرسة احتياجات جيمس الفردية، ولم يتح المجال أمامه وأمام غيره من الطلاب الموهوبين في الرياضيات كي يحققوا «الكفاية الذاتية في الرياضيات» على مستوى قدراتهم الفردية. إنهم الفئة القليلة من الطلاب الموهوبين الذين تحتاج إليهم الولايات المتحدة بشدة؛ ليكونوا قادة المستقبل في المجالات العلمية والطبية والتقنية. وبهذا الخصوص، أشار جان وبوب ديفيدسون (Jan And Bob Davidson) في كتابهما بعنوان: التنكر للعبقرية: كيف نوقف فقدان شبابنا الأذكياء (Genius Denied: How To Stop Wasting Our Brightest Young Minds)، إلى هؤلاء الأطفال بصفتهم «مصادر طبيعية تُهدر» (Davidson & Davidson, 2004).

إذا كانت قصة جيمس تبدو لك مألوفة فهي كذلك في واقع الأمر، إذ إنه لم يكن الوحيد الذي تأثر من غياب برنامج الموهوبين المتمايز. قبل ثلاثة عشر عاماً، كان جيف (Jeff) طالب الصف الأول الثانوي مثله أيضاً - أي في عام 1994، يعانى إحباطاً كبيراً ومللاً قاتلاً. وكان موهوباً جدّاً، لكن تحصيله الأكاديمي كان متدنيّاً. وكانت قصته الباعث القوي وراء هذه المقالة «إفشال احتياجات الموهوبين: الجدل حول التسريع الأكاديمي للطلاب الموهوبين جدّاً في الرياضيات» (Failing The Needs Of The Gifted: The Argument For Academic Acceleration Of Extremely Gifted Mathematics Students Ream & Zollman, 1994).

وتأتي هذه المقالة بصفتها مراجعة للمقالة المنشورة عام 1994 لتعرّف التقدم الذي أُحرز؟ أي نكسات حدثت؟ وسوف يستعرض هذا البحث احتياجات الموهوبين في الرياضيات في البداية، والأنواع المختلفة للطلاب النابغين، ومن ثم مراجعة المناحي التي تلبي احتياجاتهم، ويناقش ثالثاً العوائق الحالية التي تواجه احتياجات الطلاب الموهوبين، أما الأمر الرابع فيتمثل في دراسة الفرص المتاحة للطلاب الموهوبين، وأخيراً التأمل في مستقبل الطلاب الموهوبين في الرياضيات في المدارس.

تحديد الأنواع المختلفة من الطلاب «الموهوبين»

يُصنّف نحو 5% تقريباً من سكان الولايات المتحدة على أنهم «مهوبون» بمعدل ذكاء يصل إلى مئة وخمسة عشر فأكثر. وهناك ما نسبته واحد في الألف من سكان الولايات المتحدة يُعدّون من الموهوبين جدّاً بمعدل ذكاء يصل إلى مئة وخمسة وأربعين فأكثر، في حين يصل معدل ذكاء الموهوبين للغاية إلى مئة وستين فأكثر، ويمثل هؤلاء ما نسبته واحد من عشرة آلاف من عدد السكان (Davidson & Davidson, 2004).

يُمنح الطالب الذي يكون أداؤه جيداً في الرياضيات المصطلح العادي الفضفاض «المتفوق والموهوب» من غالبية الناس (وفيهم المعلمون). وعلى أي حال، فإن الدراسات تشير إلى وجود مستويات متنوعة من المهوبة (Greenes, 1981). ويتمثل أحد هذه الأنواع في طالب يكون أداؤه جيداً على نحوٍ منتظم في المدرسة، لكن هؤلاء الطلاب يكون أداؤهم جيداً بسبب المثابرة والعمل الجاد. وقد أطلق جرينز (Greenes) على هؤلاء الطلاب «منفذي التمارين الجيدين» (Good Exercise Doers) وقال: إن هؤلاء الطلاب قد حُددوا خطأً على أنهم متفوقون.

أما النوع الثاني من الطلاب فهم «أعلى» من مجموعة منفذي التمارين الجيدين. إنهم يعرضون استدلالات على نحو جيد، ويحلون المسائل غير الاعتيادية، ويتعلمون المادة الجديدة بسرعة، ويحتفظون أيضاً بالمعرفة الجديدة، إضافة إلى أنهم قادرون على تطبيق معارفهم ونقل أثرها. ويشتركون في مجموعة من الخصائص والسمات المتعلقة بمنهجية الرياضيات لا يتبعها غيرهم من الطلاب (أو لا يكونون قادرين على اتباعها). ويستطيع

هــؤلاء الطلاب العمــل بمفردهم مدة طويلة من الزمن، والتأمل علــى نحوٍ مجرد. ويمكن أن يُطلق على مثل هؤلاء الطلاب صفة الموهوبين جدّاً» (Highly Gifted).

أمــا الصنــف الثالــث فيتألف مــن أولئك الطــلاب ذوي النضــج المبكــر، الذين يكون أداؤهم مماثلاً لأداء من يكبرونهم سنّاً بسنوات عدة، ويستطيعون بقليل من التعليم الرسمي وأحيانــاً مــن دونه؛ أن يتعلمــوا بمعدل سريــع، وأن يتعاملوا مع المحتــوى والمسائل المعقدة بصــورة جيــدة، ويُطلق عليهــم «الموهوبون جــدّاً أو الموهوبــون للغاية. وأضــاف سريرمان (Sriraman, 2005) مستــوى آخــر فوق هذه المستويات كلها أطلــق عليه «المبدع رياضيّاً». حيث يقدم الطلاب المبدعون رياضيّاً (أ) حلولاً جديدة عميقة للمسائل. (ب) صياغة أسئلة جديدة تخيلية للمسائل المعروضة. وينصب اهتمام هذا البحث على النوعين الثاني والثالث وأعني: «الموهوبين جدّاً» (Highly Gifted) و«الموهوبين للغاية» (Extremely Gifted).

ســوف نحــدد الأطفال في هــذا البحث ضمــن النوعيــن الأخيرين «الموهوبيــن جدّاً» (Highly Gifted) و«الموهوبين للغاية (Extremely Gifted)» بصفتهم أطفالاً موهوبين. حيث يتفوق الطلاب الموهوبون في الرياضيات، فهم قادرون على تنظيم البيانات، واستخدام منــاحٍ وإستراتيجيــات متعددة في حل المسائــل، إضافة إلى قدرتهم علــى التوصل إلى أكثر مــن حــل للمسألــة الواحــدة (Sriraman, 2003). وهم يتــرددون كثيراً فــي أداء الأعمال الاعتياديــة التي تُعطى لتمضية الوقت، أو ممارسة مهارات أتقنوها سابقاً. وعوضاً عن ذلك، فهــم يستمتعــون بالتحديــات والمسائل المعقدة فــي الرياضيات، ويرغبون أيضــاً في إيجاد المسائــل المخصوصة بهــم أو توسيعها. وتُعدُّ مدة الانتباه الطويلــة والقدرة على العمل على نحــوٍ مستقل من السمات التي تميز الطلاب الموهوبين جدّاً من الموهوبين للغاية. وغالباً ما ترتبــط لديهم النزعة إلى الكمــال (Perfectionism) والنقد البنّاء بروح الدعابة. ولاحظ ستانلي (Stanely) أيضاً أنه على الرغم من امتلاك الطلاب الذين يتميزون في الرياضيات كثيــراً من السمات العقلية المشتركة، فإنهم يختلفــون بعضهم عن بعض في معظم السمات والخصائــص الجسدية والشخصية، كما هو الحال للطلاب ذوي القدرات العادية من العمر نفسه (Stanley, 1977).

المناحي والحواجز التي تحول دون تلبية احتياجات الطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية (النابغين)

لدى الطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية في الرياضيات احتياجات عقلية خاصة بسبب اهتماماتهم وقدراتهم الفريدة. ويشار في هذا الإطار إلى وجود خيارين أساسيين للمحافظة على المستويات العالية للاهتمام والتحصيل للأطفال الموهوبين في الرياضيات، هما: (أ) التسريع الأكاديمي (ب) الإثراء الأكاديمي. ويشتمل التسريع الأكاديمي على تحفيز الطلاب الموهوبين عبر المنهاج المعياري على نحوٍ أسرع من الطلاب العاديين. في حين يشتمل الإثراء الأكاديمي على جعل الطلاب النابغين يدرسون المنهاج المعياري بالسرعة التي يتميز بها الطلاب العاديون، ولكن على مستوى أوسع وأعمق.

وقد عالج المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات هذه الخيارات، وأوصى بما يأتي: «ينبغي إلحاق الطلاب الموهوبين في الرياضيات جميعهم ببرنامج يقدم تصوراً واسعاً وغنيّاً في الرياضيات ضمن مجال مرتفع من التوقعات» (House, 1987, P. 100). وأكد المجلس نموذج الإثراء الشامل للمدرسة كلها (Schoolwide Enrichment Model) ، (Renzulli & Reis, 2003) واستخدام نموذج رينزولي الثلاثي للإثراء Renzulli Enrichment Triad (Model) House, 1987) ، وأعرب المجلس عن قناعته أن الطلاب الموهوبين يفيدون، على نحوٍ أكبر، من الإثراء مقارنة بالتسريع في أغلب الأحيان تقريباً (Sheffield, 1994). وعلى الرغم من ذلك، أيد المجلس برامج التسريع المعززة بالإثراء لعدد محدود من «الطلاب الموهوبين والموهوبين للغاية الذين تظهر اهتماماتهم ومواقفهم ومشاركاتهم قدرتهم على المواظبة والتميز الواضحين على امتداد مدة البرنامج كلها» (House, 2000).

غير أن التمويل الاتحادي «الفيدرالي» المخصص لتعليم النابغين قليل، إذ أعلنت وزارة التعليم في الولايات المتحدة أن مبلغ (سنتين فقط) من كل مئة دولار (0.02%) تُنفق على التعليم تذهب إلى برامج الموهوبين. ويُطلق على البرنامج الحكومي اسم برنامج جاكوب-جافيتس (Jacob K. Javits) لتعليم الطلاب الموهوبين، ويهدف إلى تنفيذ برنامج منسّق للبحوث القائمة على العلم، ومشروعات العرض والإيضاح، وإستراتيجيات الابتكار، وغيرها

من الأنشطة المماثلة المصممة لبنـاء قدرة المدارس الابتدائية والثانوية وتعزيزها؛ بهدف تلبية احتياجات التعليم الخاصة بالطلاب الموهوبين. وليس من الغريب أن تقرأ على الموقع الإلكترونـي (Jacob K. Javits) لوزارة التعليم في الولايـات المتحدة العبارة الآتية: «نظراً للقيـود المفروضة على موازنة السنة المالية، لن تعقد منافسة المنحة التقديرية لهذا العام لبرنامـج (Jacob K. Javits) لتعليم الطلاب الموهوبين، وستكون منح التنافس المستقبلية مرهونة بتوافر التمويل اللازم» (Javits, 2007).

ويُعدُّ التسريع الأكاديمي الخيار التقليدي الأكثر شيوعاً والأقل نفقة فيما يتعلق بالمدارس، وهـو الخيار الوحيد الذي يقدم عـادة للموهوبين. ومع ذلك، فإن التسريع الأكاديمي وحده لا يلبي احتياجات هذين النوعين من الطلاب، إذ إنه يقدم «شيئاً ما» لاحتياجات الطفل العقلية الأمـر الذي يقبـل به جُلّ أولياء الأمـور. وأنه أيضاً لا يلبي الاحتياجـات الأخرى للطفل مثل؛ الاحتياجـات العاطفية، واحتياجات الاحتـرام والتقدير وتحقيق الذات (Maslow, 1954). وبحسب منظور أبراهام ماسلو (Abraham Maslow)، فإن للبشر جميعاً مستويات خمسة من الاحتياجات موضحة على النحو الآتي:

- لمستـوى الخامس: رغبات تحقيق الـذات – (Self-Fulfillment)، والسعي نحو التطور الذاتي. (احتياجات الكينونة أو الوجود)
- لمستـوى الرابـع: احتياجـات التقديـر – احتـرام الـذات (Self-Esteem)، التحصيل، الإتقـان، الاستقلال، الموقع، الهيمنة، الوجاهة، المسؤوليات الإدارية، التأثير والنفوذ (احتياجات العجز أو النقص D-need).
- المستـوى الثالـث: الاحتياجـات العاطفية – الشعـور بالانتماء والحـب في العمل الجماعي، الأسرة، والعلاقات. (احتياجات العجز أو النقص D-need).
- المستوى الثاني: احتياجات الأمان– الأمن، النظام، القانون، القيود، والاستقرار. (احتياجات العجز أو النقص D-need).
- المستـوى الأول: احتياجـات البقاء – الطعام، الشراب، المـأوى، الدفء، والنوم. (احتياجات العجز أو النقص D-need).

وتجدر الإشارة هنا إلى أن احتياجات البشر هذه مرتبة ترتيباً هرمياً، ويجب تلبيتها وفقاً للترتيب المقدّم بدءاً من المستوى الأول وانتهاء بالمستوى الخامس. وقد أطلق ماسلو على المستوى العاطفي ومستوى الاحترام (3و4) اسم احتياجات العجز أو النقص (Deficit Needs) أو D-needs إلى جانب مستويين أدنيين، هما: احتياجات البقاء واحتياجات الأمان، فأنت إذا شعرت بنقص في شيء ما فإنك تعاني عجزاً، وعندئذٍ تشعر بالحاجة. أما إذا حصلت على كل ما تريد، فإنك لن تشعر بشيء من هذا القبيل أبداً، وبعبارة أخرى، لا تصبح الاحتياجات محفزة. أما المستوى الأخير وهو مستوى تحقيق الذات، فهو مختلف، إذ عمد ماسلو إلى استخدام مصطلحات متنوعة في الإشارة إلى هذا المستوى: فقد أطلق عليه دافع النمو (Growth Motivation)، بصفته نقيضاً لدافع العجز، واحتياجات الوجود (Being needs) (أو B-needs مقارنة بـ D-needs)، وتحقيق الذات أو الكينونة (Maslow, 1954).

تُعد احتياجات تحقيق الذات من الاحتياجات التي لا تشتمل على التوازن أو الاستقرار الداخلي، فعندما تظهر هذه الاحتياجات لدى الفرد، يستمر شعوره بها. وفي الواقع، فإن هذه الاحتياجات تصبح أكثر قوة كلما «غُذّيت». فهي تشتمل على الرغبة المتواصلة في تلبية الإمكانات، أي «أن تكون كل ما يمكن أن تكون». إنها مسألة تتعلق بالوصول إلى أقصى درجة ممكنة من الكمال الذي يشار إليه بمصطلح تحقيق الذات. وهكذا، إذا أردت تحقيق ذاتك بالفعل، وفقاً للترتيب الهرمي لنظرية الاحتياجات البشرية لماسلو، يتعين عليك العناية باحتياجاتك من المستوى الأدنى، بدرجة معقولة في الأقل (Maslow, 1954).

ومرة أخرى، تختار المدارس تقديم التسريع الأكاديمي فقط، إما عن طريق «الترقية المبكرة» لطلاب المرحلة الابتدائية، أو جدولة طلاب المرحلتين المتوسطة والثانوية وإلحاقهم بمساقات رياضيات ذات مستوى أعلى، أو مساقات مستويات خاصة متقدمة. وقد أشارت البحوث المتعلقة بالتسريع إلى المزايا الإيجابية فقط للموهوبين (Ablard, Mills, & Duvall, 1994; Brody, Assouline, & Stanley, 1990, Kolitch & Brody, 1992)، ولوحظت الآثار السلبية أيضاً وعلى رأسها الشعور بالوحدة وعدم الراحة. لكن ليس لهذه

السلبيات تأثيرات كبيرة من وجهة نظر ألبارد وآخرين (Albard, Et Al., 1994)، «حيث إن فرصة التحدي العقلي تفوق أي سلبيات اجتماعية.»

ويمكن للتسريع الأكاديمي أن يفي باحتياجات الطلاب في مجال احترام الذات مدة من الوقت، لكن هؤلاء الطلاب على الرغم من (تلبية احتياجاتهم العاطفية في البيت، واحتياجات الاحترام والتقدير في المدرسة عن طريق التسريع الأكاديمي) يظلون في خطر شديد من عدم وصولهم إلى مستوى تحقيق الذات والتطور الشخصي. ويحتاج هؤلاء الطلاب إلى مساقات مصممة مخصوصة بهم، يشرف عليها معلمون مدربون لهذه الغاية، يزودونهم بالتحديات الأكاديمية التي تتصل باحتياجاتهم الوجودية (B-needs)، ويقدمون لهم الدعم العاطفي لتلبية «احتياجات العجز» (D-needs) لديهم. وبخلاف ذلك، يكون الطلاب عرضة لأن يتحولوا إلى «متفوقين متدني التحصيل» باتجاهات عدائية نحو المدرسة، وعادات دراسية ضعيفة، ومستوى متدن من الانضباط المدرسي.

الفرص المتاحة أمام الطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية

هناك فرص متاحة أمام الطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية أبعد من التسريع الأكاديمي، لكن مثل هذه الفرص لا يمكن العثور عليها بسهولة في المدارس الحكومية، إضافة إلى أنها محدودة جدّاً. وحتى المدارس الجاذبة[1] (Magnet Schools)، تُعدُّ أكثر ملاءمة «لمنفذي التمارين الجيدين» وليس للطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية. تقول داريا هول(Daria Hall) المديرة المساعدة لمؤسسة التربية (The Education Trust) التي تهدف إلى سد الفجوة في التحصيل بين الطلاب جميعاً، إن مراجعتها لمخطوطات المناهج أظهرت أدلة على «تضخم في المساقات» تقدم مساقات عالية المستوى، تحمل «عناوين صحيحة»، ولكن المناهج سخيفة (La Times, Feb. 23, 2007). هناك بعض

---

1) المدارس الجاذبة(Schools Magnet) : مدارس بديلة عامة لكل مراحل التعليم الإلزامى، وقد اشتق اسمها من كونها تجذب الطلاب من أنحاء المدينة أو المدن كلها المحيطة بها، وتتمتع بشعبية كبيرة، حيث يمكن أن تقبل الطلاب من مقاطعة تعليمية واحدة أو مقاطعات تعليمية عدة، فتقدم المناحي المتنوعة من التعليم والمناهج المتخصصة. ويركز بعض هذه المدارس على مقرر أكاديمي معيّن مثل اللغات الأجنبية، الفنون، الرياضيات، والعلوم، في حين يركز بعضها الآخر على التعليم المهني أو الفني. وتقدم أيضاً المناهج المؤهلة للالتحاق بالكليات ذات المنافسة العالية التي تتطلب الحصول على علامات عالية في الاختبارات المقننة -المراجع.

الطلاب المحظوظين في ولايات أمريكية، مثل ولاية إلينوي (Illinois)، توجد فيها أكاديمية علوم ورياضيات انتقائية واحدة ومدرسة ثانوية داخلية للمتفوقين والموهوبين، لكن مثل هذه الأكاديميات تقتصر على عدد قليل جداً من طلاب المرحلة الثانوية الذين يتمتعون بقدر كبير من الذكاء والغنى والحظ ليكونوا ضمن المقبولين في مثل هذه الأكاديميات.

يرعى عدد محدود من الولايات والجامعات في الولايات المتحدة (نحو عشرين تقريباً) معسكرات ومعاهد وبرامج صيفية للطلاب النابغين، لكنها مرتفعة الأجر كما هو الحال مع معظم المعسكرات الصيفية. غير أن الصعوبة لا تتوقف عند هذا الحد، بل إن المعلمين والمرشدين في المدارس الثانوية لا يعرفون كثيراً عن الخدمات التي تقدّمها مثل هذه المعسكرات المتخصصة. ويسمح عدد كبير من الجامعات لطلاب المرحلة الثانوية النابغين بدخول الحرم الجامعي وحضور المحاضرات، لكن هذا الخيار يتطلب نفقات كبيرة إلى حدٍّ ما، لذا، فهو غير متاح لطلاب عائلات الطبقتين الوسطى والدنيا. ويوجد لدى أربع جامعات رئيسة (ديوك، وجونز هوبكنز، ونورث ويسترين، ودينفر Duke, Johns Hopkins, Northwestern, And Denver برامج بحوث في مجال الموهوبين والنابغين، وتقدّم أيضاً كل من جامعة جونز هوبكنز (Johns Hopkins) وجامعة ستانفورد (Stanford) مساقات عن بعد مخصوصة بالطلاب الموهوبين.

وبعيداً عن هذا العدد المحدود من طلاب المرحلة الثانوية المسموح لهم بهذه الخيارات المحدودة، يبحث أولياء الأمور «على عاتقهم» عن مصادر لتلبية احتياجات الطلاب النابغين؛ ومنها شبكة الاتصالات التي أصبحت أكبر مصادر المعلومات. ويحدّث مركز البحوث الوطني للموهوبين في جامعة كنكتيكت (Connecticut)، والرابطة الأميركية للطلاب الموهوبين في جامعة ديوك (Duke) موقعاً على هذه الشبكة يحتوي على معلومات ذات صلة بأولياء أمور الطلاب الموهوبين. وتتبنى قضايا أولياء الأمور هؤلاء مواقع متخصصة يديرها في الأغلب متطوعون، مثل: موقع التنكر للعباقرة (Genius Denied)، وموقع معهد ديفيدسون للموهبة والتطور (Davidson Institute For Talent And Development)، ومصادر للعائلات الموهوبين (Resources For Gifted Families) والموهوبين جدّاً

(Highly Gifted)، وتعليم الموهوبين ذوي الاحتياجات المزدوجة (Twice Exceptional) (Rortigel & Fello, 2004) (Hoagies' Gifted Education).

ويوجد هناك أيضاً مواقع لشبكة الاتصالات مصممة خصّيصاً لاستخدامات الطلاب. وهي ليست مقتصرة فقط على النابغين، بل تقدم هذه المواقع مثل موقع منتدى الرياضيات (Math Forum)، و(Go Math)، وكيف تعمل الأشياء (How Stuff Works) أنشطة إثرائية، إضافة إلى مسائل لأي طالب مهتم لديه القدرة على أداء المهام بصورة فردية، دون إشراف (Rortigel & Fello, 2004).

مستقبل الطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية في المدرسة

تبدأ جُلّ المقالات التي تتحدث عن الموهوبين بقصة شخصية عن طفل ما. فما سبب ذلك؟ إن سبب ذلك هو أن الموهوبين لا يكوّنون الغالبية ولا يمثلون سوى 0.1% من مجموع الطلاب، وهي نسبة قليلة جدّاً، لكنها ثمينة أيضاً. لذا، تأخذ قصة احتياجات الموهوبين منحى القصة الفردية لتتحدث عن هدر طاقات أفضل الأفراد الأذكياء والنوابغ. أما عدد الطلاب الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية في الرياضيات فقليل جدّاً. وعلى هذا، فإن «خسارة» أي واحد من هؤلاء الطلاب يُعدُّ أمراً خطيراً. وفي الحقيقة، أن عدد الطلاب الموهوبين في الصين والهند الذين يمثّلون 12.5% من الطلاب يساوي مجموع عدد الطلاب في الولايات المتحدة تقريباً.

هناك أنظمة اتحادية في الولايات المتحدة تلزم المدارس تقديم ما بوسعها لتلبية الاحتياجات الفردية للطلاب ذوي التحديات الجسدية والعقلية، إذ يوجد لكل طالب يعاني هذه التحديات خطة تعليم فردية بموجب القانون، مصمّمة خصّيصاً لتلبية احتياجاته العاطفية ومتطلباته الاجتماعية ورغباته الشخصية وقدراته الفردية. أما الطلاب الموهوبون فلا توجد حماية لاحتياجاتهم الخاصة. وإضافة إلى ذلك، لا يبدو في الأفق ما يشير إلى الاعتقاد أن الطلاب الموهوبين يحتاجون إلى معاملة خاصة. وفي الحقيقة أن معظم الطلاب يحاولون ألا يُميزوا عن أقرانهم (هذا هو المستوى الثالث للاحتياجات، الحاجة إلى الانتماء).

يمكـن القـول بناءً على ما تقـدّم أن هناك فرصاً للطلاب الموهوبيـن، لكن يتعين على أوليـاء الأمـور السعي وراءها والبحـث عنها، وطلبهـا. ونحن نلاحظ أن أقصـى ما يحصل عليه الطلاب الموهوبـون في المدارس التقليدية هو التسريع الأكاديمي، أما خارج المدرسة فالخدمات المتاحة للموهوبين محدودة، ولا يستطيع ولي الأمر تحمل نفقاتها إلا إذا كان ثريّاً ومحظوظاً.

بـدأت هذه المقالة بالسـؤال الآتي: «هل يكافح الطلاب الموهوبون مـن أجل البقاء أم أنهـم يتطـورون؟» وبعد إعـادة النظر في وضـع الرياضيات، فإن الإجابة فـي الأغلب تعتمد علـى ثـراء الآباء ووعيهم ومثابرتهـم، إذ إن لدى المدارس الحكومية أمـوراً أخرى تهتم بها غيـر الاحتياجـات الفردية للطلاب النابغين. ونؤكد في نهاية هـذه المقالة ضرورة مساعدة الطـلاب جميعاً، ولا سيمـا الموهوبين جدّاً والموهوبين للغاية، علـى تحقيق ذواتهم. فهؤلاء الطلاب نادرون وهم مصدر ثمين في هذا العصر المتسارع تقنيّاً.

قائمة المراجع

Ablard, K. E., Mills, C. J., & Duvall, R. (1994). Acceleration Of Cty Math And Science Students. Baltimore, Md: Johns Hopkins University, Center For Talented Youth.

America 2000: An Education Strategy. (1991). Washington, D.C.: U.S. Department Of Education.

Brody, L. E., Assouline, S. G., & Standley, J. C. (1990). Five Years Of Early Entrants: Predicting Successful Achievement In College. Gifted Child Quarterly, 34, 138–142.

Davidson, J., & Davidson, R. (2004). Genius Denied: How To Stop Wasting Our Brightest Young Minds. New York: Simon & Schuster.

Greenes, C. (1981). Identifying The Gifted Student In Mathematics. Arithmetic Teacher, 28(6), 14–17.

House, P. (Ed.). (1987). Providing Opportunities For The Mathematically Gifted K–12. Reston, Va.: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Jacob K. Javits Gifted And Talented Students Education Program. (2007). Available: Http://Www.Ed.Gov/Programs/Javits/Index.Html.

Kolitch, E. R., & Brody, L. E. (1992). Mathematics Acceleration Of Highly Talented Students: An Evaluation. Gifted Child Quarterly, 36(2), 78–85.

Landsberg, M. (2007, February 22). Study Says Students Are Learning Less. Los Angeles Times.

Maslow, A. H. (1954). Motivation And Personality. New, York: Harper & Row.

National Center For Education Statistics. (1999). Third International Math And Science Survey. Washington Dc: U.S. Department Of Education.

National Center For Education Statistics. (2003). Trends In International Math And Science Study. Washington Dc: U.S. Department Of Education.

National Council Of Teachers Of Mathematics (2000). Principles And Standards For School Mathematics. Reston, Va: Author.

Ream, S. K., & Zollman, A. (1994). Moving On: The Case For Academic Acceleration Of Extremely Gifted Mathematics Students. Focus On Learning Problems In Mathematics, 16(4), 32–43.

Renzulli, J. S. & Reis, S. M. (2003). The Schoolwide Enrichment Model: Developing Creative And Productive Giftedness. In Colangelo, N. And Davis, G. A. (Eds.). Handbook Of Gifted Education (184–203). Boston: Allyn And Bacon.

Rotigel, J. V., & Fello, S. (2004). Mathematically Gifted Students: How Can We Meet Their Needs? Gifted Child Today, 28(4). 46–51.

Sheffield, L. (1994). The Development Of Gifted And Talented Mathematics Students And The National Council Of Teachers Of Mathematics Standards. Storrs: National Research Center On The Gifted And Talented, University Of Connecticut.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. The Journal Of Secondary Gifted Education. 14(1), 151–165.

Sriraman, B. (2005). Are Giftedness And Creativity Synonyms In Mathematics? The Journal Of Secondary Gifted Education. 17(1), 20–36.

Stanley, J. (1977). Rationale For The Study Of Mathematically Precocious Youth (Smpy) During Its First Five Years Of Promoting Educational Acceleration. In J. Stanley, W. C. George, & C. H. Solano (Eds.), The Gifted And The Creative: A Fifty Year Perspective. (Pp. 75–112). Baltimore: Johns Hopkins University Press.

U.S. Department Of Education. (2001). No Child Left Behind Act Of 2001 (Public Law 107–110). Washington, Dc: Author.

Zakaria, F. (2006, January 9). We All Have A Lot To Learn. Newsweek.



اللعب بِـ «القوى»

بهارات سريرامان

باول ستوزيلكي

ملخص

يستكشف هــذا الفصل النطاق الواسع للرياضيات البحتة التــي أصبحت سهلة المنال عبــر استخدام المسائل التي تشتمل على القــوى Powers. ونركز هنا على وجه الخصوص، علــى ضــرورة تحقيق التوازن بين منحى تدريسي ومنهاج تعليمي فــي الرياضيات يستند إلى التطبيــق والسيــاق من ناحيــة، والرياضيات البحتة القويــة، الكامنة ببساطــة تحت الأسئلة المطروحة والمفهومة بسهولة في الرياضيات البحتة من ناحية أخرى؛ وبذلك يدرك الطلاب محدوديــة أدوات الحساب، واكتساب تقديرٍ لجمال الرياضيــات وقوتها، إضافة إلى قابليتها البعيدة المدى للتطبيق في العالم الحقيقي.

المقدمة

ندرس في هذا البحث التبعات التربوية والمنهاجية في المجال العام «للقوى». ونعني بـ «القوى» الرياضيات الناشئة عن دراسة الدوالّ الأسّية (Exponential Functions). وتوصي معايير الجبر في الولايات المتحدة أن يصار إلى تعريف طلاب الصفوف التاسع إلى الثاني عشر بالدالة الأسية وفئات الدوال على نحوٍ عام بما في ذلك الدوال متعددة الحدود (Polynomial)، واللوغرتمية (Logarithmic) والفترية (Periodic) (NCTM, 2000). ويُعرّف طلاب الصفين التاسع والعاشر (الذين تتراوح أعمارهم بين 13-16 سنة) على نحوٍ تقليدي في الولايات المتحدة بالدوال الأسية، عن طريق توسيع قوانين الأس من قوى العدد الصحيح (Integer Powers) إلى القوى الحقيقية (Real Powers). وعادة ما يتبع ذلك رسوم بيانية للدوال الأسية، مثل: 2^x, 3^x وهكذا، بهدف نقل حقيقة أن نطاق الدوال على صيغة a^x $(a>1)$، يكون عبارة عن مجموعة أعداد حقيقية، في حين يكون المدى $(0, \infty)$. ويظهر الرسم البياني أيضاً خصائص مثل زيادة سلوك الدالة، ويمثل محور السينات (x-Axis) الخط الأفقي المقارب لهذه الدالة، ويكون على صيغة $x\to-\infty$. ثم يصار إلى تعريف الطلاب بالحالة $0<a<1$؛ من أجل دراسة خصائص نعرفها جميعاً. ويتمثل الموضوع الرئيس في هذه المعاملة التقليدية للدوال الأسية في تعريف الطلاب العدد غير النسبي (E) عن طريق دراسة سلوك $(1+1/n)^n$ as $n\to\infty$. وأخيراً، يُعرّف الطلاب باللوغريتمات (Logarithms) والقوانين المماثلة في اللوغريتمات المشتقة من لوغريتمات الأسس (Logarithms Of Exponents).

وبحسب الخبرات الرياضية للمؤلف الثاني في بولندا بصفته طالباً في المرحلة الثانوية، فإن الدوال الأسية تظهر في وقت متأخر نوعاً ما في المنهاج مقارنة بمناهج الولايات المتحدة الأمريكية، أي مع بداية السنة الثالثة للمرحلة الثانوية (للطلاب الذين تتراوح أعمارهم بين 16 و 17 سنة). وقد كان تسلسل الأحداث مشابهاً لما وصفناه في الفقرة السابقة. ففي البداية تعلّم الطلاب كيفية تعريف القوة ذات الأس النسبي (Rational Exponents)، وبذلك، تُلبّى متطلبات قوانين الأسس الطبيعية جميعاً. وبعدئذٍ، وبالنظر إلى الرسم البياني، يُحثّ الطلاب على ملاحظة أن الدوال الأسية تنظم التقدم اللوغاريتمي إلى

تقــدم هندسي (وتستخدم هذه السمــة في رسم الدوال الأسية على ورقــة رسم بياني) إلخ. وأخيــراً، عُرّفت القوى ذات الأسس الحقيقية العشوائيــة بطريقة أكثر أو أقل دقة باستخدام الاضطراد (Monotonicity) في الأعداد. ومن الصعوبة بمكان تحديد عدد الطلاب الذين تمكنــوا من استيعاب هذا الجزء مــن الكتاب المدرسي والاحتفاظ بمــا استوعبوه. وعلى أي حــال، فإننــا نخشى أن العدد لم يكـن كبيراً. لقد كان هدف هذا الكتاب، فـي رأينا، واضحاً ويتمثل في تبسيط الرياضيات على غرار طريقة مجموعة البورباكي[1] (Bourbaki)، ولكن يــا للأسف، لم يفلح في ذلك، فتعريف مجموعة «البورباكــي» لـ $2^{\sqrt{2}}$ بصفته أصغر حد أعلى لمجموعــة القــوى النسبية للعدد، 2، لم يكن موفقاً، إذ إن الطالب البالغ من العمر ستة عشر عامــاً، والمتألق رياضيّاً، لديه كثير من الأمور الأكثر أهمية التي بوسعه عملها، لذا، يجب أن تكون الرياضيات البحتة مصدر ترفيه وتسلية، وسنعود إلى هذا لاحقاً.

ويواجــه الطــلاب أيضاً في المنهاج التقليدي مشكلات فــي الكلمات المرتبطة بالدوال الأسيــة؛ إذ إن الــدوال التي تنتج مــن الانحدار الأسي للبيانات الناشئــة عن العلوم الطبيعية والاجتماعية والمالية، تُعطى الأولوية عند تقديمها للطلاب في سياق حل المسائل الكلامية. وهنــاك كثيــر من الأمثلة علــى مثل هذه الدالــة. فمثــلاً، $p = 760e^{-0.145H}$ تربط الضغط p علــى السطح المستوي (بالمليمتــر الزئبقي) حتى ارتفاع h (بالكيلومتر) فوق مستوى سطح البحر. وينمذج انتشار المعلومات عبر وسائل الإعلام (التلفاز والمجلات) بوساطة الصيغة $d = p(1- e^{-Kt}$، حيث تشير p إلى عيّنة محددة، في حين تشير T إلى الزمن (Coleman, 1964). وتوجــد أمثلــة تقليديــة كثيــرة في الفيزيــاء. مثلاً، يمثّــل قانون نيوتن فــي التبريد بالصيغــة الآتيــة: $f(T) = T + (f_0 - T)e^{Kt}$ حيــث $k < 0,$، وتمثــل $f0$ الحرارة الإبتدائية للجســم المسخّن، في حين تمثــل T حرارة الوسط المحيط. ومن الأمثلــة التقليدية الأخرى التحلل الإشعاعي ونمو البكتيريا وغيرهما.

---

1) نيكـولا بورباكـي Bourbaki Nicolas اســم جماعي مستعار لمجموعة من خبراء الرياضيات (معظمهم فرنسيــون)، وهي مجموعة كانت تحرر منذ عام 1934، سلسلة من كتب الرياضيات في محاولة منها لجعلها أكثر منطقية، حيث تبدأ دائماً من العام إلى الخاص، وتعرّف جميع المصطلحات والمفاهيم التــي تستعملها، وهذا يسهـل على القارىء فهم المادة المكتوبة. وقد عُرفت البراهين الرياضية التــي تستخدمها ببراهين بورباكي، أي براهين يفهمها الناس من غير ذوي الاختصاص أيضاً- المراجع.

وقـد قُلب هذا المنحى من خلال المنهاج المستند إلى الإصلاح في الولايات المتحدة، الذي يركز على نمذجة الأنشطة بوصفها وسيلة لتوليد البيانات، حيث يمكن، مثلاً، استخدام الكـرات المرتدة ذات درجة مرونة معروفة. وبناءً على هذا المثال، يطلب إلى الطلاب إلقاء الكـرة (كرة سلة، كـرة تنس،.. إلخ) من ارتفاع معروف، ومتابعـة ارتفاع الارتدادات إلى أن تستقـر الكرة على الأرض. ويكون لمثل هذه البيانـات معنى عند إدراك سيـر ارتفاع الكرة المرتـدة مقارنـة بعدد الارتدادات الـذي يوضح تناقص النمط الأسي، ومن ثـم يؤدي إلى الانحـدار الأسـي. مثلاً، تنمـذج البيانات الخاصة بكـرة السلة المرتدة بـكل دقة من خلال $f(x) = A(0.5)x$، حيـث تشيـر A إلـى الارتفـاع الابتدائـي، فـي حين تشيـر x إلى عدد الارتدادات. وهذه أمثلة محددة من بين عدد كبير من النماذج التي تشير إلى أنشطة تعرِّض الطـلاب للرياضيـات التطبيقية في سياق العالم الحقيقي في سـن مبكرة جدّاً في المدرسة (Lesh & Doerr, 2003). ويمثـل هذا نقيضاً كاملاً للأيـام «الخوالي الجميلة» عندما كان علـى المرء أن يدرس مساقاً في المعـادلات التفاضلية ليواجه مثل هذا النـوع من المسائل ضمن بيئة تعليمية إملائية.

ينقل التعرض للجوانب التطبيقية من الرياضيات جانباً واحداً فقط للطلاب من طيف الرياضيـات، ويمكننـا القول إن أنشطة الرياضيـات البحتة يمكن تحقيقهـا أيضاً، بوساطة مسائل تحتوي على قوى يمكن أن تقود الطلاب إلى تبصر عميق بسلوك الأعداد، والاحتمالات المثيرة في الرياضيات البحتة، على الرغم من جملتها الابتدائية المثيرة. ويتمثل هدفنا من هـذا البحث فـي إبراز هذه الاحتمالات البديلة في الرياضيـات البحتة، وتطبيقها عن طريق التلاعب بالقوى، وبذلك يتسع خيال الطلاب.

مدخل لأساسيات نظرية الأعداد

المداخـل إلى أساسيـات نظرية الأعداد يصـادف الطلاب مفاهيـم أساسية لنظرية الأعـداد، مثل الأعداد الأولية والأعداد المركبة، وخوارزميـة القسمة، والاختبارات المتعلقة بهـا)، ومفاهيـم المضاعـف المشتـرك الأصغـر، والقاسم المشتـرك الأعظـم، والنظرية الأساسيـة في الحساب في مرحلة المدرسـة المتوسطة للطلاب الذين تتراوح أعمارهم بين

(10-13 سنة). ويالللأسف، ليس هناك متابعة، أو أنها متابعة لا تفي بالغرض، لهذه الموضوعات في مراحل الدراسة العليا. ويتمثل أحد عيوب المنهاج في إظهار حساب التفاضل والتكامل، بصفته قمة خبرات المرحلة الثانوية للطلاب في تناول مجموعة من الأعداد الحقيقية ذات دوال متغيرات مستمرة. ويقدم التسلسل التقليدي للجبر، والهندسة، وعلم المثلثات، والهندسة التحليلية فرصاً ضئيلة لتطوير مفاهيم نظرية الأعداد الأولية التي يعرفها الطلاب سابقاً على نحوٍ أكبر. ويمكن للمسائل التي تحتوي على قوى أن تكون مفيدة في حل مثل هذا الوضع غير الملائم. ويمكن تصنيف جُلّ الكتب الموجودة التي تشتمل على معالجة المسائل المحتوية على قوى ونظرية الأعداد، في كتب «المسابقات»، لذا، فهي توجِد هالة «نخبوية» تتعلق بمثل هذه المسائل. ونحن نفكر في ذلك بطريقة مغايرة، وندعو المعلمين إلى الإفادة، على نحوٍ ملائم، من مهام «القوة»؛ لينقلوا إلى الطلاب قوة الرياضيات البحتة ومحدودية أدوات الحساب. وسيصار إلى توضيح مثل هذه المسألة لاحقاً.

قد يفترض أحدهم السؤال الآتي: ما باقي قسمة العدد 131 6 على 215؟ لا تستطيع معظم الآلات الحاسبة حل هذه المسألة، وهذا يحتم علينا ضرورة تفحص المسألة بأدوات مفاهيمية مختلفة. نستطيع التفكر فيما يعنيه الباقي، ويمكننا الرجوع إلى مفاهيم من الصفوف الأولى والبدء بعمليات حساب أساسية، مثل:

ما باقي قسمة العدد 5 على 3؟ إنه 2، كان ذلك سهلاً.

ما باقي قسمة 40=8×5 على 3؟ إنه 1، لا يزال الأمر سهلاً.

والآن، ما باقي قسمة 280=7×8×5 على 3؟ نستطيع بصعوبة إجراء القسمة على 3، والتوصل إلى أن الباقي يساوي 1.

هل هناك درس يمكن تعلّمه من خلال هذا العمل التجريبي؟ نعم؛ الظاهرة الرياضية المهمة التي نسعى إلى إيصالها تتمثل في أننا لو حسبنا باقي كلٍّ من 7، 8، 5 (التي هي 2، 2، 1 على التوالي)، وضربنا هذا الباقي، أي 4= 1×2×2، وقسمناه على 3، فإننا سنحصل على الرقم نفسه في باقي قسمة 280 على 3. ويطلق على هذه الظاهرة بصورة عامة نظرية

الباقــي التي يمكــن كتابتها على النحو الآتــي: باقي حاصل ضرب أعــداد مقسومة على عدد معيّــن يساوي باقــي حاصل ضرب باقي كلٍّ مــن الأعداد (يكوّن الناتــج) المقسوم على هذا العدد.

دعونــا نعود مرة أخرى إلى المسألــة الأصلية. نستطيع استخــدام قوانين الأسس التي حفظهــا طلابنا بدقة، ونكتــب 6^{131} بصفتها حاصل ضرب أعداد تتــرك وراءها باقياً بسيطاً عند قسمته على العدد 215. وسيكون أفضل جواب محتمل هو العدد 6^3، حيث إن $216 = 6^3$، وبقسمة العدد 216 على 215 يكون الباقي 1، ونستطيع بسهولة ضرب 1S.

وهكــذا، فــإن $6^{131} = 6^3 \times 6^3 \times 6^3 \times 6^3 ....$ (43 مرة $6^2 \times$) مقسوماً على 215 يترك ناتجــاً يســاوي $1\times1\times1\times1\times1....$ (43 مــرة $36 \times$)، وهي عبارة عــن 36 و 36 مقسومة على 215 بحيــث يكــون الباقي 36. انتهــى. لا تسمح لنا هــذه المسألة بالإفادة مــن قوانين الأس فحسب، بل تقود أيضاً إلى بعض وجهات النظر في نظرية الأعداد.

ومــن المسائــل اللطيفة الأخرى التــي تشتمل على القــوى، حساب الرقــم الأخير لقوة معيّنــة، الــذي يكون رقماً ضخماً عادة مثل 777^{777} أو 2004 2004. ومرة أخرى، يتيح لنا هذا التواصــل مــع السلوك الأساسي للأعــداد. وإذا ما نظرنا إلى مسألة سهلــة مثل 12345 11، فإننا نلاحظ أن الرقم الأخير هو 1، حيث إننا نضرب الناتج 1S. وأما إذا كان لدينا 11^{12345} فإننــا نستطيــع التحقق بالتجربــة، أن 11^4، 11^3، 11^2، 11^1...تنتهي دائماً بواحد. ويمكن أن يتوصــل الطلاب إلى أن الرقــم الأخير هو 1، وعموماً، فإن الرقم الأخير لأي عدد ضخم مثل 777^{777} يمثــل ناتــج الرقم الأخير مضروبــاً في نفسه في عدد المــرات المحددة. وعلى هذا، فإن الرقم الأخير 777^{777} هو الرقم الأخير نفسه لِ 7^{777}. والآن، إذا كتبنا قوى العدد 7، فإننا سنكتشف ظاهرة دورية في الأرقام الأخيرة ذات صلة بقواها، وهذا يلاحظ بوساطة سلسلة القــوى للعــدد 7^9،7^8،7^7، 7 6، 11 5، 7 4، 7 3، 7 2، 7 1، 7 :7... التي تعطي الأرقام الأخيرة 7، 9، 3، 1، 7، 9، 3، 1، 7، 3.......... وبذلك، نستطيع مرة أخرى أن نوظف قوانين الأسس في إعادة كتابة 7 777 على النحو الآتي:

$$7^{777} = (7^4) \times (7^4) \times (7^4) \times (7^4) \times ... \text{(194 مرة)} \times 7^1$$

لذا، فإن الرقم الأخير هو 7.

ولمّا كنا قادرين على تحديد الأعداد الأخيرة للأعداد الكبيرة، فلماذا لا ننظر إلى مسألة تحديد الأعداد الأولية.

البدء بمسائل الأعداد: «مبررات» للتوافيق والتحليل

دعونا نستهل حديثنا بمسألة موجودة. هل ثمة قوة صحيحة للعدد 2 تبدأ بِ 1999... في امتدادها العشري؟ وبعبارة أخرى، يطلب إلينا السؤال المطروح إثبات وجود عدد صحيح «n» مثل العدد 2ن 1999 = 2^n 1999=... دون السؤال على نحوٍ صريح عن مقدار هذه القوة بالتحديد. ونستطيع بكل وضوح افتراض أن $n>0$. عندما نرفع العدد 2 إلى أي قوة صحيحة، هناك تسعة خيارات واضحة لكل رقم بعد ذلك. وبذلك، يكون هناك 9000= 9.10.10.10 طريقة ممكنة لترتيب الأرقام الأربعة الأولى. ولمّا كانت $n>0$، فليس لدينا أي قيود على عدد القيم التي نستطيع إيجادها، ونستطيع بسهولة أن نوجد أكثر من 9000 قيمة للعدد 2^n. وباستخدام مبدأ برج الحمام، يجب أن تبدأ بعض قوى العدد 2 بالأعداد الأربعة الأولى نفسها، لكننا لا نزال غير متأكدين أن إحدى هذه السلاسل الأولية تساوي فعلاً 1999. ويُعدُّ هذا سؤالاً دقيقاً ذا صلة باللانسبية، وقد ارجأناه بعض الوقت بعد الإشارة إلى شيء أكثر سهولة.

هناك مسألة لطيفة تحل بسهولة من خلال مبدأ برج الحمام، وتستفيد من خصائص قابلية القسمة في إثبات وجود بعض قوى العدد 3 التي تنتهي بِ 001. ويمكن توضيح هذا بسهولة على النحو الآتي: افترض أن 3^m و 3^n حيث $(m > n>1)$، وعند قسمتهما على العدد 1000 يكون الباقي متساوياً. (يحتاج وجود مثل M و N إلى تطبيق مبدأ برج الحمام، وسنترك هذا كله للقارئ). إذن، فإن $(3^{m-n}-1)$ 3^n= $3^m - 3^n$ تقبل القسمة على 1000. ومن الواضح الآن أن 3N و 1000 ليس بينهما عامل مشترك، وهذا يعني أن 1000 يجب أن تقسم العامل$3^{m-n}-1$ ، وهذا يعني أيضاً أن 3^{m-n} ينتهي بِ 001.

دعنا نعود مرة أخرى إلى قوى العدد 2، وإلى السؤال الآتي: هل كان أحدها يبدأ بالعدد 1999، في الترميز العشري. ربما يبدو هذا التسلسل غريباً جدّاً من حيث ظهوره في بداية الترميز العشري لبعض قوى العدد 2. فدعونا نجرب شيئاً أكثر سهولة في البداية، ولنأخذ مثلاً، التسلسل A(N) المؤلف من الأعداد الأولى للقوى المتتالية للعدد 2:

1، 2، 4، 8، 1، 3، 6، 1، 2، 3، 5، 1، 2، 4، 8،..... فهل سيظهر العدد 7 في هذا التسلسل؟

هذه المسألة معروفة في النسخ المختلفة للدراسات المتعلقة بالرياضيات، وظهرت الإشارة الأولى إليها في الكتاب المشهور المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equations (Arnold, 1978)، وعادةً ما تكون مصحوبة بحقائق مساعدة، أو مقترحات يقصد بها إيجاد حلول يمكن الوصول إليها بسهولة. ومع ذلك، لم يصادفنا أي حل تفصيلي لهذه المسألة. وسنعالج هذا الموقف المؤسف، وسوف نوضح في هذه العملية الرياضيات الغنية التي ستنجم عنها. بادئ ذي بدء، فإن أي حل سريع باستخدام ورقة وقلم رصاص أو أي أداة حساب أخرى سوف يتوصل بسهولة إلى:

$$2^{46} = 70{,}368{,}744{,}177{,}664$$

وبالمضي قدماً في هذه التجربة، نستطيع ملاحظة أن العدد 7 يمثل العدد الأول في القوة السادسة والخمسين والسادسة والستين والسادسة والسبعين والسادسة والثمانين للقوة 2 (لكن العدد الأول للقوة 106 للعدد 2 هو 8 وليس 7). ومع ذلك، فإن هذه الطريقة التجريبية بعيدة كل البعد من أن تكون جذابة رياضيّاً، ونحن نحتاج إلى حل أفضل يتيح لنا وضع نتائج أخرى. ويجب علينا في البداية أن ندرك معنى الجملة القائلة إن العدد 7 يمثل العدد الأول للعدد $2n$. الجواب بسيط: فالعدد سبعة يمثل العدد الأول لِ $2n$ إذا، و إذا فقط، كان للعدد الطبيعي k:

$$7.10^k < 2^n < 8.10^k$$

ونستطيع الحصول على وصف أكثر سهولة لهذا الشرط إذا أخذنا اللوغريتمات العشرية لكلا الجانبين في الحسبان، وهو ما يعرفه طلابنا. وعلى هذا، ينتج: $K + \text{Log}(7) < n\text{Log}(2) < k + \text{Log}\,8$. ولما كانت اللوغريتمات العشرية للعددين 7 و8 تقع بين 0 و 1، فنستطيع القول إن K هو الجزء المتمم للعدد، $n\text{Log}(2)$ الذي يقود إلى التباينات الآتية:

$$\text{Log}\,7 < n\text{Log}2 - [n\text{Log}2] < \text{Log}8$$

ويكفي الآن أن نجمع بعض الحقائق المعروفة، وندعو القارئ إلى تحققها.

ليما (مُبرهنة) 1: العدد $\text{Log}(2)$ غير نسبي.

ليما 2: إذا كان العدد x غير نسبي، وكان $c(n) := nx - [nx]$، فعندئذٍ يكون لكل A و B تنتمي إلى المجموعة [0,1] عدد غير محدود من التسلسل $c(n)$ يقع داخل الفترة (A,B).

نأمل أن يحث من يقرؤون هذا الكتاب طلابهم ويشجعونهم على إثبات ليما 1، التي من السهل جدّاً إثباتها بوساطة التناقض. وبافتراض أن البرهان قد تم، فدعونا نلقي نظرة على إثبات ليما 2، ومن ثم نتفحص تبعاتها.

إثبات ليما 2: لاحظ أولاً أن عناصر التسلسل $c(n)$ جميعها مختلفة. وفعلاً إذا كان $c(k) = c(m)$ حيث $k>m$، فإن. $(k-m)x = [kx] - [mx]$ وهذا يُعدُّ تناقضاً، حيث إن ناتج العدد الصحيح غير الصفر $(k-m)$، والعدد غير النسبي x لا يمكن أن يكونا عدداً صحيحاً.

لنأخذ الآن عدداً صحيحاً موجباً N حيث يكون $1/n<b-a$، وحيث تكون الأعداد $c(1), c(2), \dots, c(n+1)$

مختلفة وتنتمي إلى الفترة [0,1]، ونستدل بوساطة مبدأ برج الحمام أنه للعددين I و S، حيث I و (I+S) يقعان بين 1 و (N+1)، فيكون لدينا التباين الآتي:

$$0 < \varepsilon = \left| c(i) - (i+s) \right| \leq 1/n < b-a$$

والآن، لُـفّ المحـور الحقيقي على صورة محيط الدائـرة T بمحيط طوله 1 مع نقطة0 مميـزة فـي المركز. للعدديـن a, b في [0, 1]، ندلـل بوساطة (a, b) قوسـ T، الذي يقابل الفتـرة (a,b)، على المحـور الحقيقي. لتكـن f: T→T دوراناً بعكس تجـاه عقارب الساعة بزاويـة نصف قطرية $X\pi 2$. ويتعين علينا النظر إلى صور النقطة المميزة 0 تحت التكرارات F علـى T، بـدلاً من مراقبـة الأعداد $c(n)$ في الفتـرة [0,1]. وبعد لحظة مـن التأمل، فإننا نلاحظ أن طول القوس $(0, b(n))$ حيث $[\ b(n) = f n\ (0) = f\bullet f\bullet \ldots \bullet . f(0)\ ]$ مجموعة مـن التفاصيـل= •] مساوٍ لِ $c(n)$. ومن هنا، فإننا نعرف بوساطة (1) أن طول القوس بين النقاط $b(i), b(i+s)$ أصغر من $b-a$. وهذا يعني أن مجموع تكرار s لِ f هو دوران لنصف الزاويـة القطريـة $X\pi 2$. واتجاه الـدوران لا يهم أيّاً كان. وهذا يعنـي أن العدد غير المحدود للنقـاط $b(s), b(2s), b(3s)$، . . . تنتمـي إلى القوس (a,b). وفي الحقيقة، إذا بدأنا من النقطـة الثابتة 0 وسرنا مدة زمنية غير محدودة علـى امتداد المحيط T باتجاه واحد فقط بخطـوات طولهـا ε، فإننا سنقفـز إلى القوسـ (A,B) مرات غير محـدودة، حيث إن طوله (B−A) أكبر من طول خطواتنا، وهذا يتمم البرهان.

والآن، بتطبيق ليما 2 على، $x = \text{Log}\ (2), a = \text{Log}(7), b = \text{Log}\ (8)$ نستخلص أن 7 هو الرقم الأول للقوى غير المحدودة للعدد 2. وإذا ما طبّقنا ليما 2 مرة أخرى على الأعداد $x=\text{Log}(2), a=\text{Log}(77)-1, b=\text{Log}(78)-1$، فعندئـذٍ، نستخلص بسبب التساوي بين $[\text{Log}77]=[\text{Log}78]=1$، أن العدد 7 يظهر مرتين في المكانين الأول والثاني للمؤشر العشري لقوة العدد 2. ونكتشف من خلال استخدام البرهان القياسي أن أي تسلسل محدود للأرقام يمكـن أن يظهر في بداية المؤشر العشري لقـوة العدد 2 مثل 1234 أو 567890، أو (أخيراً) 1999. إذا كنـت لا تصدق هـذه الجملة الأخيرة، فإننا ندعوك إلى حسـاب (لنقل) 2^{9030} أو 2^{11166}. وسنظهر بعض التواريخ المهمة في نهاية هذه الرواية، مقارنة بقوى العدد 2 المقابلة لإقناع المتشككين، ونستطيع إضافة إلى ذلك استنتاج النتيجة المباشرة الآتية:

النتيجـة الطبيعيـة المباشرة: إذا كان العدد الصحيح $p>1$ ليس قوة العدد الصحيح 10، فعندئـذٍ يمكـن أن يظهـر أي تسلسـل للأرقام في بدايـة المؤشر العشري للقـوة n لـِ p لبعض n.

والسـؤال الـذي يطرح نفسه مرة أخـرى: لماذا لم يظهر الرقم 7 مـن ضمن العناصر الأولـى للتسلسل الـذي طرحناه في البداية؟ ولماذا يتظاهر هـذا التسلسل المخادع على أنه دوري؟ والسبـب في ذلك بسيط. ويمكـن أن يُقرّب الرقم $\text{Log}(2) = 0.3010299956\ldots$ بوساطـة الرقـم النسبي 0.3، ويكـون التسلسل $c(n) = nx - [nx]$ دوريّـاً للأرقام النسبية x جميعهـا. وبعبـارة أخرى: $2^{10} = 1024$، وهو رقم قريب جـدّاً من الألف. ويتمثل ضربه في العـدد ألـف بإضافة أصفار في النهايـة، بحيث تبقى الأعداد الأولى ثابتـة. لذا، نتوصل إلى استنتـاج خاطـئ بمجرد النظر إلى عـدد قليل من التسلسل $a(n)$ فـي البداية، أن التسلسل الـذي يحـوي على الفترة 10 و 7 ليس عنصـراً (عضواً) فيه، في حين يظهر العدد 8 في كثير مـن الأحيـان. ولكي يُـرى الرقم سبعة، يجب على المـرء أن ينظر إلى الأرقـام الستة الأولى فـي $a(n)$ (أي، الرقـم الأول مـن $2^6 = 24$)، ومن ثـم ينتظر إلى أن تعمـل الآثار التراكمية للاضطرابات الصغيرة $2^{10} - 1000 = 24$.

في عـام، 1910 أثبت سيربنسكـي (Sierpinski) وويل (Weyl) وبـول (Bohl)، كل علـى حـدة، أنه لكل عدد x غيـر نسبي فإن التسلسـل $c(n) = nx - [nx]$ يكـون موزعاً على الفترة. (Arnold & Avez, 1968) [0,1] وعلى نحوٍ أكثر دقة، إذا أخذنا b و a عشوائيّاً من [0,1] حيث $(a<b)$، وتشير $k(n,a,b)$ إلى مجموع عناصر المجموعة

$$\mathcal{E}(a,b)\}\ n, c(i)\ \{c(i): 1 \le i \le$$

فعندئذٍ نحصل على: $\lim_{n\to\infty} k(n,a,b) / n = b - a$

ولمزيد من الإيضاح، فإن هذه النظرية تقول إننا إذا سرنا على امتداد محيط دائرة وحدة متكاملة، بحيث نسير بخطوات غير نسبية، فعندئذٍ، نمرّ فوق كل حفرة بتكرار متناسب وبحجم الحفرة. دعنا نعبر عن هذه الحقيقة بلغتنا الخاصة باستخدام قوة العدد 2. لنفترض أن $a(8, n)$ و $a(7, n)$ أعداد السبعات والثمانيات من مجموع الأعداد n للتسلسل $a(n)$، فإنه وفقاً للصيغة الأخيرة يكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} a(7, n) / n = \text{Log}8 - \text{Log}7$$

$$\lim_{n\to\infty} A(8, n) / n = \text{Log}9 - \text{Log}8 ,$$ ومن ثم، فإن

$$\lim_{n\to\infty} a(7, n) / a(8, n) = (\text{Log}8 - \text{Log}7) / (\text{Log}9 - \text{Log}8) = 1.1337 \ldots > 1$$

وهذا يعني أنه بالنظر إلى الأجزاء الأولية من التسلسل $a(n)$، فإننا سنجد سبعات أكثر من الثمانيات. وتعدُّ النتيجة التي توصل إليها الباحثون المشار إليهم آنفاً، إضافة إلى حقيقتنا الصغيرة بخصوص السبعات والثمانيات، نتائج بسيطة لنظرية عامة عميقة جدّاً في نظرية الإرجوديك Ergodic Theory[1] المنسوبة إلى (Cornfield, G. D Birkhoff) (Fomin, & Sinai, 1982) التي نحث القارئ المهتم على متابعتها. ونختتم هذا الجزء بمسألة بسيطة لقرائنا.

---

1) نظرية الإرجوديك Theory Ergodic فرع من الرياضيات نشأ في ثلاثينيات القرن العشرين على يد Koopman And Birkhoff, Neumann, Von. يهتم بدراسة النظم الديناميكية في حالة قياس اللامتغير والمسائل المتعلقة به، ولهذه النظرية علاقة بالهندسة أيضاً ونظرية الأعداد، ولها تطبيقات على العمليات العشوائية. وقد خضعت هذه النظرية إلى تطوير مستمر من علماء الفيزياء- المراجع

المسألــة: لأي n يكون للعــدد 2^n أربع سبعات متتالية في البدايــة. وماذا يكون بالنسبة لخمســ سبعات؟ كيف يمكننا تقدير، مما ورد ذكره أعلاه، أقل n حيث يبدأ المؤشر العشري للعدد 2^n بِ 2004 سبعات متتالية؟

مسائل عملية: التعمق أكثر فأكثر

إذا غيرنا قوانين القوى (الأس)، نلاحظ أن $A^{x+y} = A^x . A^y$. دعنا نفترض أن $A>0$، فعندئــذٍ يمكن افتراض السـؤال العام على النحو الآتي: $F: R \to R$، ما الحلول الأخرى كلها لِ $F(X+Y)= F(X) . F(Y)$؟ وهنــاك مسألة جيدة أخرى تبرز من ملاحظة أن $Log (Xy) = Log X + Log Y$. إذن، مــا الحلــول الأخرى لِ $F(X.Y) = F(X) + (Y)$؟ من المسائل التقليديــة ذات الصلــة إيجــاد الدوالّ جميعها التــي تفي بمعادلة كوشــي الدالّية: $F(X+Y) = F(X0 = F(Y)$. وبالإجابــة عــن هــذه المسائل، فإن المــرء يدخل في أعمــاق استقصاء المعــادلات الدالّية، وهــي معادلات يستطيع المعلمــون استخدامها بوصفهــا مشروعاً ممتداً للطلاب ذوي الذكاء المتوقد.

بعض القوى غير العادية لِ 2 والنتائج

مــن أجــل إقناع المشككين في الخاصية غير العادية للقــوى 2، أدرجنا قائمة بالقوى 2 التي ترتبط بعينات (متحيزة) لأحداث تاريخية مهمة.

معمودية بولاندا	966 $2^{568} = 9.66... \times 10^{170}$
معركة هاستينجز	1066 $2^{5561} = 1.066... \times 10^{1674}$
كولمبوس يكتشف أميركا	1492 $2^{3761} = 1.492... \times 10^{1132}$
تأسيس جامعة هارفارد	1636 $2^{9528} = 1.636... \times 10^{2868}$
وفاة كرومويل	1658 $2^{3223} = 1.658... \times 10^{970}$
تأسيس الرابطة الملكية	1660 $2^{4874} = 1.660... \times 10^{1467}$

تغيير اسم نيوأمستردام إلى نيويورك — 1664 $2^{6040} = 1.664... \times 10^{1818}$

الطبعة الأولى «لمبادئ» نيوتن — 1687 $2^{6143} = 1.687... \times 10^{1849}$

وولبول يصبح أول رئيس وزراء لبريطانيا — 1721 $2^{10229} = 1.721... \times 10^{3079}$

الثورة الفرنسية — 1789 $2^{9857} = 1.789... \times 10^{2967}$

واترلو — 1815 $2^{931} = 1.815... \times 10^{280}$

بداية الحرب العالمية الثانية — 1939 $2^{5522} = 1.939... \ 10^{1662}$

نهاية الحرب العالمية الثانية — 1945 $2^{1931} = 1.945... \times 10^{581}$

نأمل أن نكون قد أوصلنا إلى القارئ خصوبة الرياضيات البحتة المتضمّنة في المسائل التي تحتوي على القوى. وتكمل مسألة التلاعب بالمسائل، التي تشتمل على القوى لعمل روابط متينة بموضوعات في نظرية الأعداد والتوافقيات والتحليل، والرياضيات التطبيقية والإحصاء التي يتعلمها الطلاب خلال المنحى النموذجي الذي يحظى حاليّاً بحماس كبير. وقد استخدم المؤلف الأول لهذا البحث مسائل بأرقام بداية ونهاية شبيهة بتلك المشار إليها في هذا البحث، لطلاب يبلغون من العمر أربعة عشر عاماً كانوا ملتحقين بمساق الجبر. وقد تمثل الهدف التربوي التعليمي باستخدام خبرات حل مسائل «الرياضيات البحتة»، ونجم عن ذلك زيادة اهتمام الطلاب بأسرار الأعداد الصحيحة وخفاياها. ومن الأمور الأخرى، إدراك الطلاب محددات أدوات الحساب، وفهم الحاجة إلى إبداع أدوات مفاهيمية لمعالجة المسألة. ولقيت مسائل أخرى أيضاً، تشتمل على ظاهرة خاصة من بين الأعداد الصحيحة الموجبة، ونجم عنها اكتشاف مبدأ برج الحمام، نجاحاً باهراً في غرفة الصف (Sriraman, 2004A; 2004B).

وفي الختام، نأمل ألا ننسى أبداً الجمال الذي تتضمنه أنشطة الرياضيات البحتة، وأن ننقل إلى طلابنا أن مثل هذه الأنشطة هي التي ألهمت خيال علماء الرياضيات، وأسهمت في تطورها منذ بداياتها الأولى. ونحن نعتقد أن صورة عالم الرياضيات البحتة المضطجع

تحت شجرة (الذي يبدو للعين غير المدربة على التمحيص أنه لا يفعل شيئاً)، تتمم صورة عالم الرياضيات التطبيقي والعالم المجتهد المنهمك في محاولة إعطاء معنى لفوضى العالم الواقعي وغطرسته، ففي المحصلة، ماذا سيفعل الشخص الثاني إذا لم يقم الأول بأي شيء؟

قائمة المراجع

Arnold, V. I. (1978) Ordinary Differential Equations (Translated From Russian By R. A. Silverman). Boston, Ma: Mit Press.

Arnold, V. I., & Avez, A. (1968) Ergodic Problems In Classical Mechanics, New York: Benjamin.

Coleman, J. (1964). Introduction To Mathematical Sociology. New York: The Free Press.

Cornfeld, I., Fomin, S., & Sinai, Ya. G. (1982). Ergodic Theory. New York: Spring–er–Verlag.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations Of A Models And Modeling Perspective On Mathematics Teaching, Learning And Problem Solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism (Pp. 3–34). Mahwah, Nj: Erlbaum.

National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics. Reston, Va: Author.

Sriraman, B. (2004A). Discovering A Mathematical Principle: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.

Sriraman, B. (2004B). Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations. The Journal Of Mathematical Behavior, 23(2), 205–222.

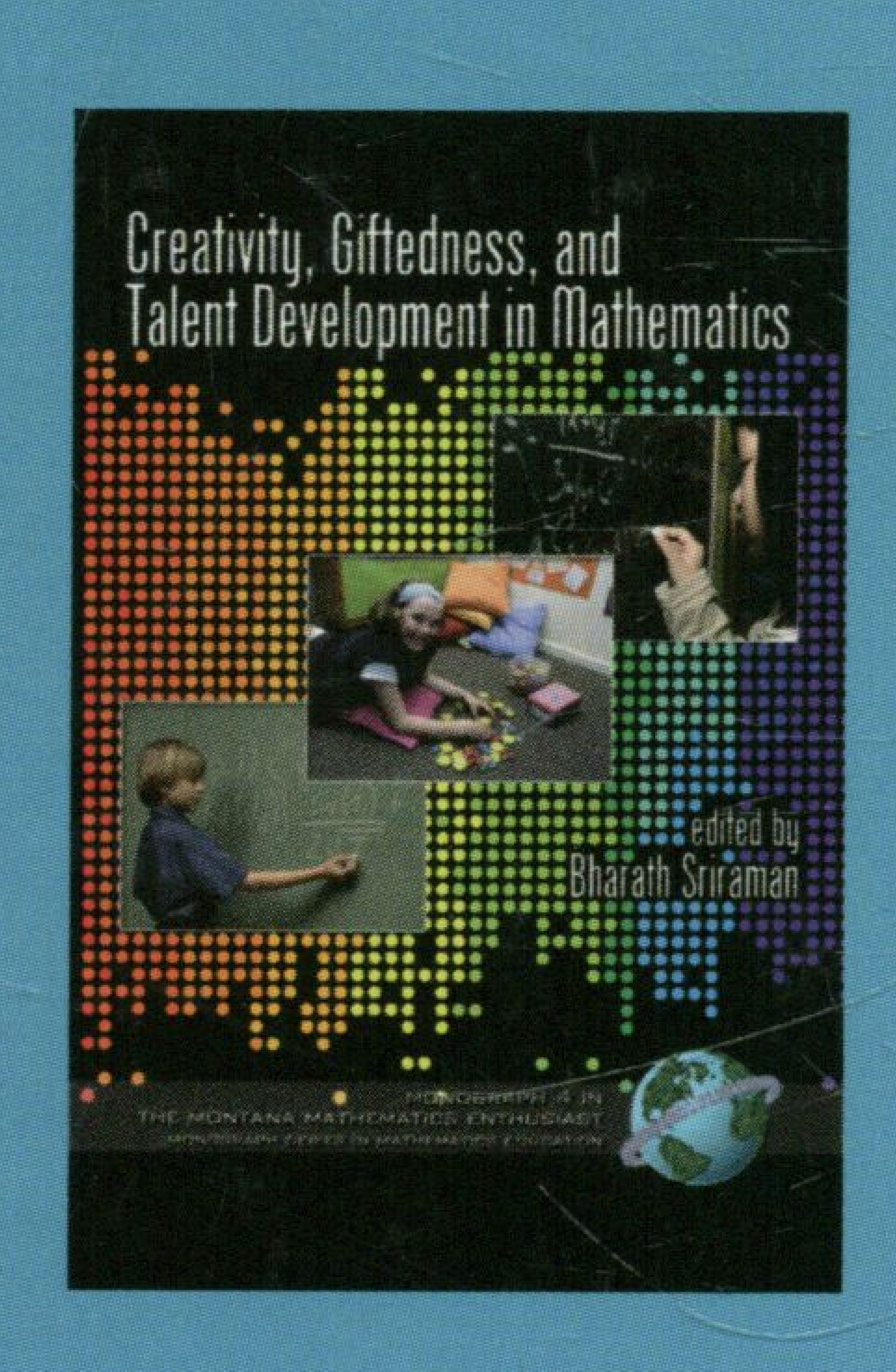
ملاحظة

1–لقـد هدفت البورباكي أساساً إلى تأليف مجموعة مـن الأعمال القائمة على أسس دقيقـة ورسميـة يستطيع خبـراء الرياضيـات استخدامهـا في المستقبـل. لمزيد مـن المعلومـات، أنظـر Théorie des Ensembles dela collection elements de Mathématique, Hermann, Paris وموقع http://www.bourbaki.ens.fr/

2– يقـول مبـدأ برج الحمـام : إذا كان لدينا عـدد m من الحمام و عـدد n من بيوت الحمـام حيـث $m \geq n$، فإن بعضـ البيوت ستضـم أكثر من حمامة. ولهـذا المبدأ تطبيقات عملية واسعة في الرياضيات.

3– يمكن العثور على مرجع لهذه النظرية على موقع

http://mathworld.wolfram.com/Birkhoffs ErgodicTheorem.html



يعود الفضل في سهولة وأمان مجتمع اليوم المتطور تكنولوجياً إلى روح الإبداع والابتكار الكامنة فينا؛ إذ يؤدي العلماء المخترعون والمستثمرون والفنانون والقادة دوراً مهمًّا في تقدم المعرفة ونقلها، ويؤدي خبراء الرياضيات بصورة خاصة دوراً رئيساً في مهنٍ عدة، وقد كانوا تاريخيًّاً صمام الأمان لعدد من مجالات الدراسات الأخرى، وبخاصة العلوم البحتة والهندسة والأعمال، وإن الرياضيات مكونٌ رئيس في الاختبارات المقننة في الولايات المتحدة وفي امتحانات دخول الجامعة في أجزاء كثيرة من العالم.

ويكون الإبداع والخيال على أوضح وإن عندما يبدأ الأبطال الصغار في تكوين مفاهيم عددية وفراغية وفي استكشاف مهمات رياضية تجذب اهتمامهم. كما أن الإبداع هو أيضاً مكون جوهري في عمل خبراء الرياضيات المحترفين، ومع ذلك بتركز معظم التفكير الرياضي الذي تشجعه المدارس على الحفظ والاستذكار عن ظهر قلب، وإتقان مهارات عدة لحلول مسائل محددة في المنهاج أو التي يقصد منها النجاح في الاختبارات المقننة.

ونظرًا لقلة وجهات النظر المبنية على البحث الخاصة بتطوير المواهب في تعلم الرياضيات، فإن أوراق البحوث هذه تركز تحديدًا على الإسهامات في تعريف مفاهيم الإبداع والموهبة في الرياضيات، وتقدم أوراق البحوث الواردة في هذا الكتاب وجهات نظر جديدة لتطوير الموهبة الرياضية في غرفة الصف، وتقدم أيضاً رؤية في علم نفس الإبداع والموهبة.

إن كتاب **تطوُّر الإبداع، والموهبة والنبوغ في الرياضيات** موجَّهٌ إلى معلمي الصفوف ومنسقي برامج الموهبة ومدربي مسابقات الرياضيات والطلاب الخريجين والباحثين المهتمين بالإبداع والموهبة وتطويرهما في الرياضيات.

ISBN:978-603-503-603-0




موضوع الكتاب:

الرياضيات - طرق التدريس